Capítulo I

Variedades diferenciables

En este capítulo se definen los objetos geométricos que son nuestro tema de estudio: las *variedades diferenciables* con y sin *borde*. Para ello se extiende a subconjuntos arbitrarios del espacio afín la noción de aplicación diferenciable en un abierto, y en particular la de *difeomorfismo*. Las variedades son conjuntos localmente difeomorfos a un espacio afín, o a un semiespacio afín si tienen borde. Esta descripción local permite utilizar *sistemas locales de coordenadas*, y definir la *dimensión* y el *borde* de modo consistente. Asimismo se introducen las *particiones diferenciables de la unidad*, que serán imprescindibles en muchas construcciones posteriores. Todas estas nociones se introducen primero en un ambiente afín, pero después se describen con independencia de ese ambiente.

1. Definición de variedad

Sea $U \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto abierto. Una aplicación $f : U \to \mathbb{R}^q$ se llama *diferenciable* si todas sus derivadas parciales $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}}$ existen y son continuas. Nótese por tanto que usamos aquí el término diferenciable para referirnos a aplicaciones de clase infinito. Más generalmente, una aplicación $f : X \to Y$ entre dos subconjuntos arbitrarios $X \subset \mathbb{R}^p$ e $Y \subset \mathbb{R}^q$ se llama *diferenciable* si cada punto $x \in X$ tiene un entorno abierto U en $\mathbb{R}^p$ al que f se extiende diferenciablemente, es decir, existe una aplicación diferenciable $F : U \to \mathbb{R}^q$ que coincide con f en $U \cap X$. Por ser diferenciable, F es continua, luego f lo es también. Remarquemos que la extensión F depende del punto x y en general no es única. El conjunto de las aplicaciones diferenciables de X en Y se denota $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$. Para $Y = \mathbb{R}$, tenemos el conjunto $\mathcal{C}^\infty(X) = \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ de las funciones diferenciables de X.

Claramente, la composición de aplicaciones diferenciables es de nuevo diferenciable.

Definición 1.1 Una aplicación $f : X \to Y$ se llama *difeomorfismo* si es biyectiva y tanto ella como su inversa son diferenciables. Se dice que f es un *difeomorfismo local en un punto* $a \in X$ si f es un difeomorfismo de un entorno abierto de a en X sobre otro de $f(a)$ en Y.

Observaciones 1.2 (1) Un difeomorfismo es algo más que un homeomorfismo diferenciable: $f(t) = t^3$ no es un difeomorfismo, pues la raíz cúbica no es diferenciable en $t = 0$.

(2) Un difeomorfismo local (en todos los puntos de su dominio) $f : X \to Y$ es una aplicación abierta. Sin embargo, no es necesariamente inyectiva, luego no es necesariamente un difeomorfismo. Si es inyectiva, entonces es un difeomorfismo sobre su imagen $f(X)$ que es un conjunto abierto de Y (pero no necesariamente todo Y, pues f no tiene por que ser una aplicación suprayectiva). ■

La noción de difeomorfismo nos permite centrar la atención en ciertos subconjuntos del espacio afín que no son completamente arbitrarios, y forman una categoría importante desde el punto de vista geométrico:

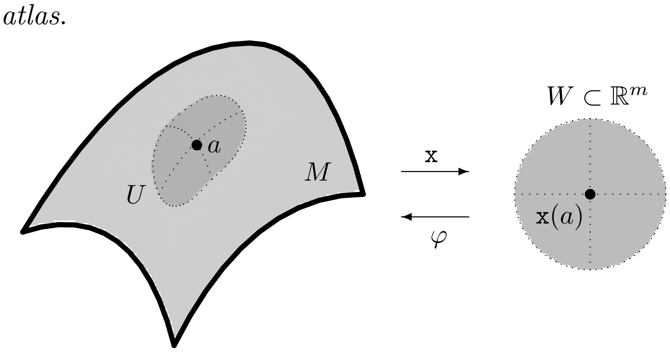
Definición 1.3 Un conjunto $M \subset \mathbb{R}^p$ se llama *variedad diferenciable* o simplemente *variedad* si cada punto $x \in M$ tiene un entorno abierto U en M que es difeomorfo a un abierto W de un espacio afín. Un difeomorfismo particular

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p) : W \to U \subset M$$

se denomina *parametrización de M en x*, el difeomorfismo inverso

$$\mathtt{x} = (\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_m) : U \to W \subset \mathbb{R}^m$$

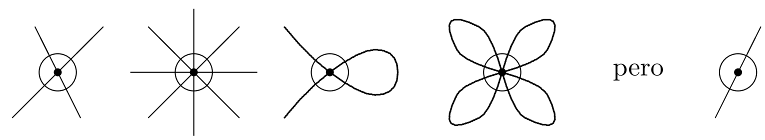
se llama *sistema de coordenadas de M en x*, y el abierto U se llama *dominio de coordenadas.* A veces se escribe simplemente $\varphi : W \to M$, $\mathtt{x} : U \to \mathbb{R}^m$, pero esto sólo elude especificar las imágenes de $\varphi, \mathtt{x}$ y no supone que sean suprayectivas. Una colección de parametrizaciones cuyos dominios de coordenadas recubran M se denomina *atlas.*



Dadas dos parametrizaciones φ y ψ con dominios de coordenadas U y V, se llama *cambio de coordenadas* a la composición $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(U \cap V) \to \psi^{-1}(U \cap V)$, que es un difeomorfismo entre abiertos afines.

Ejemplos 1.4 (1) Los ejemplos primeros de variedades son los subespacios afines de $\mathbb{R}^p$, porque son difeomorfos a un $\mathbb{R}^m$. Sea $M \subset \mathbb{R}^p$ un tal subespacio, $x \in M$ y $M = x + L[u_1, \ldots, u_m]$ (los u_i independientes). Entonces la aplicación afín $\varphi(t) = x + \sum_i t_i u_i$ es una parametrización en el sentido anterior, y $\varphi(\mathbb{R}^m) = M$.

(2) Un par de rectas que se cortan no es variedad, por un razonamiento topológico elemental. En efecto, el punto de corte de las rectas desconecta cualquier entorno suyo en al menos cuatro componentes, y si uno de esos entornos fuera homeomorfo a un intervalo de $\mathbb{R}$, lo desconectaría en dos (y si fuera homeomorfo a una bola de $\mathbb{R}^m, m \geq 2$, no lo desconectaría). Esto es:



Igualmente por conexión, un cono $X : x^2 + y^2 = z^2$ no es una variedad. Pero la conexión es insuficiente para mostrar que el semicono $X \cap \{z \geq 0\}$ no es variedad, ni que un par de planos $Y : xy = 0$ tampoco lo es. Puede hacerse sólo con la definición, pero la manera eficiente de tratar conjuntos así son las tangencias que estudiamos en el capítulo siguiente (véase II.1.8).

(3) La esfera unidad $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ de ecuación $x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1$ es una variedad diferenciable. Se pueden usar como sistemas de coordenadas las proyecciones sobre los hiperplanos coordenados, que dan parametrizaciones del tipo:

$$W \to \mathbb{S}^m : (t_1, \ldots, t_m) \mapsto \Big(t_1, \ldots, t_m, \pm\sqrt{1 - (t_1^2 + \cdots + t_m^2)}\Big),$$

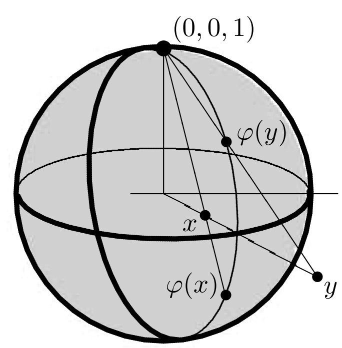
siendo W la bola abierta $\|t\| < 1$. Así parametrizamos semiesferas abiertas, y hacen falta $2(m+1)$ para recubrir toda la esfera. Este número de parametrizaciones puede reducirse a solamente dos, utilizando como coordenadas las proyecciones estereográficas desde dos puntos antipodales,

$$(x_1, \ldots, x_{m+1}) \mapsto \Big(\frac{x_1}{1 \mp x_{m+1}}, \ldots, \frac{x_m}{1 \mp x_{m+1}}\Big),$$

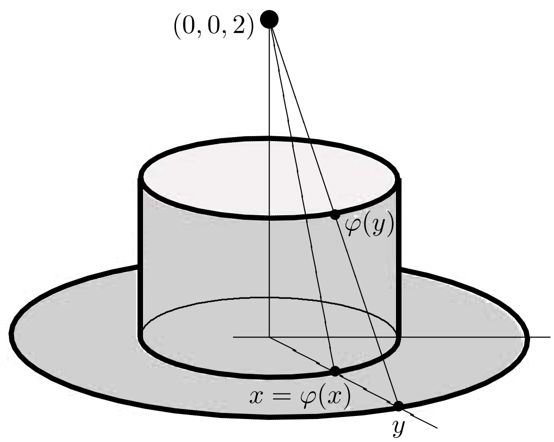
que corresponden a las parametrizaciones de la figura adjunta, $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{S}^m$ dadas por

$$\varphi(t_1, \ldots, t_m) = \Big(\frac{2t_1}{\|t\|^2+1}, \ldots, \frac{2t_m}{\|t\|^2+1}, \pm\frac{\|t\|^2-1}{\|t\|^2+1}\Big).$$

El cambio de coordenadas (en cualquier orden) es $\mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^m \setminus \{0\} : t \mapsto t/\|t\|^2$.



(4) Aunque las proyecciones estereográficas se suelen asociar siempre a las esferas, son también útiles para parametrizar otras variedades. Por ejemplo, en la figura siguiente se ve cómo proyectando el cilindro $x_1^2+x_2^2=1$, $0<x_3<1$ desde el punto $(0,0,2)$ se obtiene un difeomorfismo sobre la corona circular plana $1<x_1^2+x_2^2<4$.



(5) En los ejemplos anteriores hemos visto cómo recubrir un cilindro con una parametrización, y una esfera con dos. En este último caso, dos parametrizaciones es lo mínimo, pues si una bastara, su dominio, un abierto de $\mathbb{R}^m$, sería homeomorfo a una esfera, que es compacta. De hecho, dos parametrizaciones son las que hacen falta para recubrir cualquier superficie compacta de $\mathbb{R}^3$ (en I.2 Prob.4 se explica esto para un toro de revolución).

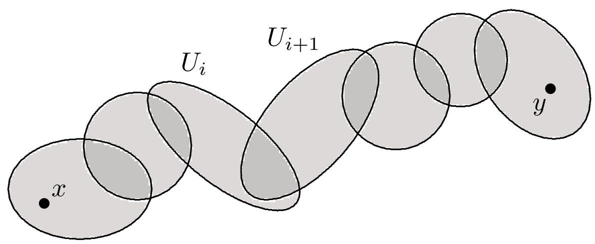
Observaciones 1.5 (1) A veces es útil el hecho sencillo de que siempre se pueden utilizar parametrizaciones definidas en todo el espacio $\mathbb{R}^m$. Sea M una variedad y fijemos $a\in M$. Si $\mathtt{x}:U\to\mathbb{R}^m$ es un sistema de coordenadas con $a\in U$, mediante una traslación podemos suponer que $\mathtt{x}(a)$ es el origen, y reduciendo U, que $\mathtt{x}(U)$ es una bola $\|x\|<\varepsilon$. Entonces basta componer con el difeomorfismo $x\mapsto x/\sqrt{\varepsilon^2-\|x\|^2}$ de esa bola sobre $\mathbb{R}^m$.

(2) Las propiedades topológicas locales de las variedades son las del espacio afín: son localmente compactas y localmente conexas. Por lo último, sus componentes conexas son abiertas. Por supuesto, por ser subconjuntos del espacio afín son metrizables y tienen una base de abiertos numerable.

(3) En toda variedad M se puede construir una sucesión de compactos $L_k\subset M$ que recubran M y cumplan $L_k\subset\mathrm{Int}(L_{k+1})$.

Ésta es una cuestión puramente topológica. Se comienza recubriendo M con dominios de coordenadas U cuyas adherencias B sean compactas (por ejemplo, difeomorfas a bolas cerradas). Después se extrae un recubrimiento numerable $\{U_\ell\}$ (pues la topología tiene una base numerable). Así, sólo falta la condición de monotonía, que se consigue tomando $L_{k+1} = B_1 \cup \cdots \cup B_\ell$, con ℓ tal que el compacto anterior L_k esté contenido en $U_1 \cup \cdots \cup U_\ell$.

(4) Sean x, y dos puntos de una variedad conexa M. Si recubrimos M mediante abiertos U existe una *cadena* $(U_i)_{0\le i\le r}$, que conecta x con y, es decir, tal que $x \in U_0$, $y \in U_r$, y cada abierto U_i $(i < r)$ interseca al abierto siguiente U_{i+1}.



La demostración, típica en cuestiones de conexión, consiste en probar que los puntos que se pueden conectar con uno dado forman un conjunto abierto y cerrado.

(5) Lo anterior se usa normalmente tomando los U dominios de coordenadas adecuados. Por ejemplo, veamos que una variedad conexa M es conexa por arcos. Tomando los U difeomorfos a bolas euclídeas, obtenemos una cadena U_i y una sucesión de puntos

$$x = x_0 \in U_0, x_1 \in U_0 \cap U_1, \ldots, x_r \in U_{r-1} \cap U_r, y = x_{r+1} \in U_r.$$

Como cada dos puntos consecutivos están en el mismo dominio, se pueden conectar por un arco, y la sucesión de esos arcos conecta el punto x con el punto y. ■

Sea $U \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto abierto. Como es bien sabido, la *derivada en un punto* $a \in U$ de una aplicación diferenciable $f = (f_1, \ldots, f_q) : U \to \mathbb{R}^q$ es la aplicación lineal $d_a f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ cuya matriz es la *matriz jacobiana en el punto* a:

$$d_a f(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$$

para cada $u = (u_1, \ldots, u_p) \in \mathbb{R}^p$; vemos que esta expresión matricial es diferenciable respecto de (a, u). También se tiene la descripción como *derivada direccional*

$$d_a f(u) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}.$$

Dos propiedades fundamentales que recordamos ahora son las siguientes:

(1) Toda aplicación lineal es diferenciable, y su derivada en cualquier punto es ella misma.

(2) La derivada de una composición de aplicaciones diferenciables es la composición de las derivadas. Esta es la conocida *regla de la cadena*, que se puede escribir con la fórmula:
$$d_a(g \circ f) = d_{f(a)} g \circ d_a f.$$

El resultado básico sobre la derivada es el célebre

Teorema de inversión local. Una aplicación diferenciable $f : U \to \mathbb{R}^q$ es un difeomorfismo local en un punto $a \in U$ si y sólo si la derivada $d_a f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ es un isomorfismo lineal (en particular, $p = q$).

Demostración. La necesidad es fácil, pues si g es el difeomorfismo inverso de un entorno de $b = f(a)$ sobre otro de a, aplicando la regla de la cadena a las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$ resulta que $d_b g$ es inverso por ambos lados de $d_a f$. La suficiencia, que es lo difícil, se encuentra en todos los tratados de Análisis. ■

Aplicando la parte fácil del teorema anterior a los cambios de coordenadas de una variedad M, resulta que dos parametrizaciones en un mismo punto están definidas en espacios afines de la misma dimensión. Por ello se puede tomar esa dimensión como *dimensión* de la variedad en el punto en cuestión a, y se denota $\dim_a M$. Por lo que acabamos de decir la dimensión es localmente constante, luego constante en cada componente conexa de M, y si es la misma en todas ellas la denotamos $\dim(M)$. Las variedades de dimensión 1 se llaman *curvas* y las de dimensión 2 se llaman *superficies*. Si $M \subset N$ son dos variedades de dimensiones m y n respectivamente, la diferencia $n - m$ se llama *codimensión* de M en N y se denota $\operatorname{codim}(M)$; si es 1 decimos que M es una *hipersuperficie* de N.

(1.6) Localización de aplicaciones continuas. Sea $f : M \to N$ una aplicación continua entre dos variedades M y N. Para cualesquiera dos parametrizaciones

$\varphi : A \to U \subset M$ y $\psi : B \to V \subset N$ tales que $f(U) \subset V$ tenemos definida la aplicación continua

$$g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi : A \to B,$$

que denominamos *localización de* f. Como f es continua, estos U recubren M, y concluimos que f es diferenciable si y sólo si todas sus localizaciones lo son.

Problemas

Número 1. Probar que un difeomorfismo local $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de hecho un difeomorfismo sobre un intervalo abierto. ¿Se puede generalizar este hecho a dimensión superior?

Número 2. Construir un difeomorfismo de $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ sobre el exterior de la bola unidad $\|x\| > 1$ y otro sobre la corona $1 < \|x\| < 2$.

Número 3. Sea $E \subset \mathbb{R}^2$ la unión de todas las rectas $y = kx$, $k \in \mathbb{Z}$. ¿Es $\mathbb{R}^2 \setminus E$ una variedad?

Número 4. Consideramos en $\mathbb{R}^3$ el par de planos $X : xy = 0$. Mostrar que no hay ninguna parametrización diferenciable de un entorno del origen en X. Más delicado es probarlo sin usar la diferenciabilidad, pues requiere un mínimo de Topología Algebraica.

Número 5. Demostrar que ni el semicono $X : x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$, ni la *cúspide* $Y : x^2 + y^2 = z^3$ son variedades diferenciables, pero nótese que ambos son homeomorfos a $\mathbb{R}^2$.

Número 6. Construir para cada entero $r > 0$ un difeomorfismo local suprayectivo $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ tal que cada $b \in \mathbb{S}^1$ tenga exactamente r preimágenes. (Considerar $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ y utilizar $(x, y) \equiv z \mapsto z^r$.)

Número 7. (*Espacio recubridor*) Sea $f : M \to N$ un homeomorfismo local suprayectivo entre variedades compactas, la segunda conexa. Demostrar que cada punto $b \in N$ tiene un entorno abierto conexo V tal que: (i) $f^{-1}(V) = U_1 \cup \cdots \cup U_r$ con los U_i abiertos disjuntos, (ii) cada restricción $f|U_i$ es un homeomorfismo sobre V, y (iii) el número r es independiente de b. En consecuencia todas las fibras $f^{-1}(y)$, $y \in N$, tienen r puntos.

Número 8. Identificamos $\mathbb{R}^2$ con el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos usando partes reales e imaginarias, y sea P un polinomio mónico en una indeterminada con coeficientes complejos. Mostrar que $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto P(z)$ es una aplicación diferenciable, y que es un difeomorfismo local en todos los puntos salvo una cantidad finita. ¿Cuáles son esos puntos excepcionales?

Número 9. Sea $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ el conjunto definido por $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = x_{n+1}^2 - 1$, $x_{n+1} > 0$. Probar que la *pseudoinversión*

$$f(x) = \Big(\frac{x_1}{x_{n+1} + 1}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1} + 1} \Big)$$

induce un difeomorfismo de M sobre un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, e identificar ese subconjunto.

Número 10. Identificamos $\mathbb{R}^{2\times 2}$ con el conjunto de las aplicaciones lineales $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, y denotamos M el conjunto de las que dejan invariante la parábola $y = x^2$. Probar que M es una curva difeomorfa a la propia parábola. ¿Qué obtenemos si sustituimos la parábola por la hipérbola $xy = 1$?

2. Construcción de variedades

El método más directo para construir variedades es encontrar parametrizaciones, es decir aplicaciones $\varphi : W \to \mathbb{R}^p$ que definan difeomorfismos de su dominio $W \subset \mathbb{R}^m$ sobre su imagen $M = \varphi(W) \subset \mathbb{R}^p$, que en consecuencia será una variedad diferenciable. Una condición necesaria fácil es que cada derivada $d_a\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ es *inyectiva*. En efecto, como $\mathtt{x} = \varphi^{-1} : \varphi(W) \to W$ es una aplicación diferenciable, existe, tal vez después de reducir W, una aplicación diferenciable $\bar{\mathtt{x}} : A \to \mathbb{R}^m$ que extiende $\mathtt{x}$ a un abierto A de $\mathbb{R}^p$, de modo que $\bar{\mathtt{x}} \circ \varphi$ es la inclusión $W \subset \mathbb{R}^m$. Derivando resulta $d_{\varphi(a)}\bar{\mathtt{x}} \circ d_a\varphi = \mathrm{Id} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, con lo que $d_a\varphi$ es inyectiva.

Lo importante es que, de hecho, esta condición necesaria es también suficiente:

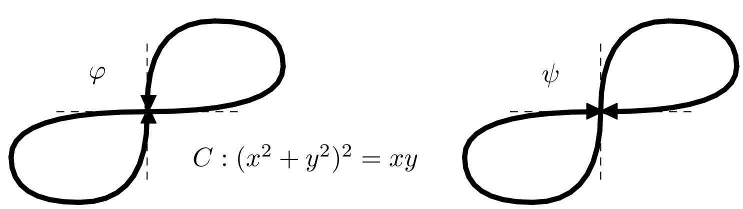
Proposición 2.1 *Sea $g : V \to \mathbb{R}^p$ una aplicación diferenciable definida en un abierto V de $\mathbb{R}^m$. Si la derivada de g en un punto $a \in V$ es inyectiva, entonces existe un entorno abierto $W \subset V$ de a tal que $g|W : W \to g(W)$ es un difeomorfismo. En consecuencia, $M = g(W) \subset \mathbb{R}^p$ es una variedad diferenciable de dimensión m y $\varphi = g|W : W \to M$ una parametrización de M en a.*

Demostración. Como $d_a g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ es inyectiva, existe un isomorfismo lineal $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ tal que $h|\mathbb{R}^m = d_a g$ (identificamos $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times \{0\}$). Entonces definimos $f : V \times \mathbb{R}^{p-m} \to \mathbb{R}^p : (x, y) \mapsto g(x) + h(0, y)$, cuya derivada es

$$d_{(a,0)}f(u, v) = d_a g(u) + h(0, v) = h(u, v).$$

De este modo, por el teorema de inversión local, f es un difeomorfismo de un entorno $W \times W'$ de $(a, 0)$ sobre un entorno de $f(a, 0) = g(a)$ en $\mathbb{R}^p$. Por tanto, $g|W = f|W \times \{0\}$ es un difeomorfismo sobre $g(W) = f(W \times \{0\})$. ■

Observación 2.2 Es muy importante comprender la naturaleza local del resultado anterior. Para ilustrarla considérese el siguiente ejemplo. Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ la *lemniscata de Bernoulli* de ecuación $(x^2 + y^2)^2 = xy$, que *no es* una curva diferenciable porque en el origen se cortan dos ramas.



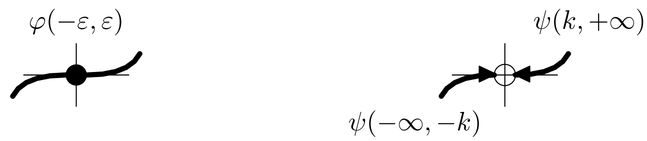
Sin embargo, la aplicación

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : \, t \mapsto \Big(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4}\Big)$$

es inyectiva, su derivada en cualquier punto también, y su imagen es exactamente C, recorrida como indica la figura de la izquierda anterior. La de la derecha corresponde a la aplicación

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : \, s \mapsto \Big(\frac{s^3}{1+s^4}, \frac{s}{1+s^4}\Big),$$

que cumple las mismas propiedades. Sin embargo, si intentamos el cambio de coordenadas resulta $s = \psi^{-1}(\varphi(t)) = 1/t$, que no es ni siquiera continuo en $t = 0$. Para entender esto basta mirar las imágenes por φ y ψ de los entornos de $t = 0$ y $s = \pm\infty$:



Por supuesto, $\varphi(-\varepsilon, \varepsilon)$ sí es una curva diferenciable, como garantiza el resultado anterior. ■

La demostración de la proposición 2.1 muestra también cómo se describen los pares de variedades:

Proposición 2.3 *Sean $M \subset N$ dos variedades, de dimensiones $m \leq n$, y $a \in M$ un punto cualquiera. Entonces existe un sistema de coordenadas $\mathtt{x} : U \to \mathbb{R}^n$ de N en a tal que $\mathtt{x}(U \cap M) = \mathtt{x}(U) \cap \big(\mathbb{R}^m \times \{0\}\big)$.*

Esta situación se resume diciendo que $\mathtt{x}$ es un *sistema de coordenadas de N adaptado a M*.

Demostración. Mediante un sistema de coordenadas de N en a podemos suponer que $N = \mathbb{R}^n$, y consideramos una parametrización $\varphi : W \to M \subset \mathbb{R}^n$ de M con $a = \varphi(0)$. Entonces $d_0\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva, y, reduciendo W como en la demostración anterior, podemos construir un difeomorfismo $f : W \times W' \to U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi = f|W \times \{0\}$. Como $\varphi(W)$ es abierto en M, reduciendo U se tiene $U \cap M = \varphi(W)$ y $\mathtt{x} = f^{-1}$ es el sistema de coordenadas de $\mathbb{R}^n = N$ buscado. ■

Si $m < n$ resulta que $N \setminus M$ tiene interior denso en N (luego M interior vacío en N). En efecto, si un abierto W de N tiene algún punto $a \in M$, contiene un dominio $U \subset W$ de coordenadas de N adaptadas a M, y $U \setminus M$ es un abierto no vacío de U, luego de N. Por otra parte, si $m = n$, lo que ocurre es que M es abierto en N.

La versión dual de la proposición anterior es ésta:

Proposición 2.4 *Sea $f = (f_1, \dots, f_q) : V \to \mathbb{R}^q$ una aplicación diferenciable en el abierto V de $\mathbb{R}^p$. Si la derivada de f en un punto $a \in V$ es suprayectiva, entonces existe un entorno abierto $U \subset V$ de a tal que*

$$M = \{x \in U : f_1(x) = f_1(a), \dots, f_q(x) = f_q(a)\}$$

es una variedad diferenciable de dimensión $p - q$.

Esta situación se resume diciendo que M es una *intersección completa en U*, y que $f_i(x) = f_i(a)$, $1 \leq i \leq q$, son *ecuaciones globales de M en U*.

Demostración. Como la derivada $d_a f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ es suprayectiva, su núcleo $E \subset \mathbb{R}^p$ es un espacio vectorial de dimensión $p - q$, luego existe un isomorfismo lineal $E \to \mathbb{R}^{p-q}$ que tiene una extensión lineal suprayectiva $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{p-q}$. En esta situación definimos $h : V \to \mathbb{R}^p : x \mapsto (f(x), g(x))$. Resulta que $d_a h = (d_a f, g) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ es inyectiva: si $d_a f(u) = 0$, entonces $u \in E$, y como $g|E$ es inyectiva, $g(u) = 0$ si y sólo si $u = 0$. Por tanto, $d_a h$ es un isomorfismo lineal, y por el teorema de la función inversa, h es un difeomorfismo de un entorno U de a sobre un entorno W de $(f(a), g(a))$. En fin, una comprobación inmediata muestra que $h(M) = (\{f(a)\} \times \mathbb{R}^{p-q}) \cap W$, y hemos terminado.
■

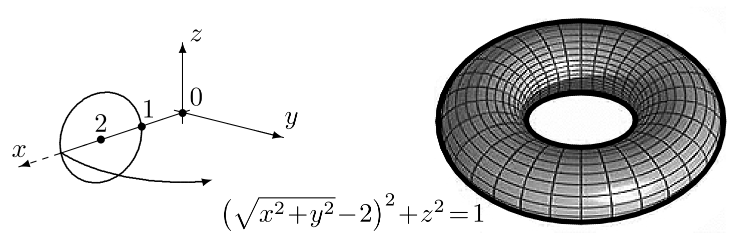
En realidad, todas las variedades son *localmente* intersección completa. En efecto, una variedad M de $\mathbb{R}^p$ es en un entorno de cada punto suyo, como $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ en $\mathbb{R}^p$ (I.2.3), y aquí podemos tomar las ecuaciones lineales $x_{m+1} = \cdots = x_p = 0$. Nos referiremos a esto diciendo que cualquier variedad *tiene ecuaciones locales*.

Ejemplos 2.5 (1) Los subespacios afines $M \subset \mathbb{R}^p$ son ejemplos de lo anterior. En efecto, un tal M es el conjunto de soluciones de unas ecuaciones lineales no homogéneas $f_1 = c_1, \dots, f_q = c_q$, de rango $q = \operatorname{codim}(M)$. Así $f = (f_1, \dots, f_q)$ es lineal, luego su derivada en cada punto es ella misma y tiene rango máximo, es decir, es suprayectiva.

(2) La función $f : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2$, tiene derivada no nula si $x \neq 0$. En este caso no nula implica suprayectiva y concluimos de nuevo que la esfera $\mathbb{S}^m : f(x) = 1$ es una variedad diferenciable.

(3) Por el mismo procedimiento se demuestra que el conjunto $M \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $x^{2k} + y^{2\ell} + z^{2m} = 1$ $(k, \ell, m \geq 1)$ es una superficie diferenciable. Más adelante veremos que es difeomorfa a la esfera: es un dado redondeado en los vértices (II.2.2(3)).

(4) La función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto \big(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\big)^2 + z^2$ tiene derivada suprayectiva en cada punto del *toro de revolución* T de ecuación $f = 1$, obtenido al girar alrededor del eje de las z's la circunferencia $y = 0, (x - 2)^2 + z^2 = 1$.



(5) Identificamos las matrices de orden 3 con los elementos del espacio afín $\mathbb{R}^{3\times 3} = \mathbb{R}^9$, y consideramos el subconjunto M formado por las de rango 1. Veamos que M es una variedad diferenciable de dimensión 5.

Primero utilizamos parametrizaciones. Si una matriz $a = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tiene rango 1, alguna columna suya $c \in \mathbb{R}^3$ será no nula, digamos la primera $c = a_1 \neq 0$, y las otras dos serán proporcionales a ésa: $a_2 = \lambda c$, $a_3 = \mu c$. Es fácil comprobar que: $(c, \lambda, \mu) \mapsto (c, \lambda c, \mu c)$ es un difeomorfismo de $W_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sobre el abierto M_1 de M formado por las matrices con la primera columna no nula. Haciendo esto con las tres columnas se recubre M. Busquemos ahora ecuaciones implícitas. Lo natural es anular todos los menores de orden 2. Sin embargo, de esos hay 9, demasiados; de hecho, el número correcto de ecuaciones sería la codimensión $q = 9 - 5 = 4$. Ahora bien, una matriz a de rango 1 debe tener alguna entrada no nula, digamos $a_{11} \neq 0$, y entonces sólo hay que considerar los menores de orden 2 que contienen esa entrada, que son exactamente 4. El lector comprobará fácilmente que esos 4 menores definen una aplicación diferenciable $f : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^4$ cuya derivada $d_a f$ es suprayectiva. Las correspondientes ecuaciones implícitas valen en el abierto dado por la condición $a_{11} \neq 0$.

(6) Por supuesto, si un conjunto está descrito por unas ecuaciones que no cumplen la condición de la proposición, no podemos concluir que el conjunto sea

variedad, *pero tampoco que no lo sea,* ¡tal vez existan ecuaciones mejores! Por ejemplo, $x^3 + xy^2 = 0$ define el eje de las y en el plano, y ese eje es desde luego una variedad, aunque la derivada de $f = x^3 + xy^2$ en el origen sea nula.

(7) Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ el conjunto definido por $x^2 + y^2 - az^2 = a$. Si $a < 0$, $M = \varnothing$. Si $a = 0$, M es la recta $x = y = 0$, que es una variedad, pero no por expresarse $x^2 + y^2 = 0$. Por último, si $a > 0$, M es un hiperboloide reglado de revolución, que es una superficie con ecuación global la dada. ■

Otra construcción sencilla es el *producto de variedades*. Consideremos dos variedades diferenciables $M \subset \mathbb{R}^p$ y $N \subset \mathbb{R}^q$. Para un punto $(a, b) \in M \times N$ tomamos coordenadas $\mathtt{x} : U \to \mathbb{R}^m$ de M en a e $\mathtt{y} : V \to \mathbb{R}^n$ de N en b, y la aplicación $(\mathtt{x}, \mathtt{y}) : U \times V \to \mathbb{R}^{m+n}$ es un sistema de coordenadas de $M \times N$ en (a, b).

Problemas

Número 1. Mostrar que la aplicación $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t)$ es biyectiva sobre su imagen y tiene derivada siempre inyectiva, pero su imagen no es una variedad. Explicar por qué este ejemplo es compatible con la caracterización de las parametrizaciones vista en esta sección.

Número 2. Demostrar que el *semicono* $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2,\ z \geq 0\}$ no es una variedad diferenciable.

Número 3. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ la superficie de revolución generada por una curva $x = f(z) > 0, y = 0$, al girar alrededor del eje de las z. Mostrar que M tiene la ecuación global $x^2 + y^2 = f(z)^2$, y que la aplicación $x = f(\rho)\cos\theta,\ y = f(\rho)\operatorname{sen}\theta,\ z = \rho$ parametriza M. ¿Cómo debe interpretarse esta afirmación en este caso?

Número 4. Sea T el toro de revolución generado al girar alrededor del eje de las z's la circunferencia $y = 0, (x - 2)^2 + z^2 = 1$.

(1) Construir un difeomorfismo local suprayectivo y periódico $\varphi : \mathbb{R}^2 \to T \subset \mathbb{R}^3$.
(2) Utilizar φ para definir un difeomorfismo de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^4$ sobre T.
(3) Utilizar φ para recubrir T con abiertos difeomorfos a cilindros $\mathbb{S}^1 \times (a, b)$.
(4) Concluir que T se puede cubrir con dos parametrizaciones.

Número 5. Se considera la aplicación $f : \mathbb{R} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}^3$ de ecuaciones

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \operatorname{sen} x \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{x}{2} \\ 0 \\ \operatorname{sen} \frac{x}{2} \end{pmatrix}.$$

Mostrar que la imagen de f es una variedad diferenciable, que se denomina *banda de Möbius.*

Número 6. Demostrar que si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ se anula en un punto $a \in \mathbb{R}^p$ y tiene derivada suprayectiva en ese punto, entonces f cambia de signo en todo entorno de a en $\mathbb{R}^p$. Deducir que si una hipersuperficie de un espacio afín tiene una ecuación global, entonces lo desconecta.

Número 7. Una función diferenciable $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se llama *homogénea positiva de grado* $k \in \mathbb{Z}$ si $f(tx) = t^k f(x)$ para todo $t > 0$. Probar que esto equivale a que se cumpla la *igualdad de Euler:* $\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = kf(x)$. En ese caso, probar que:

(1) Para cada $\varepsilon \neq 0$ la ecuación $f = \varepsilon$ (si no es trivial), define una hipersuperficie M_ε.

(2) M_ε es difeomorfa a M_1 para $\varepsilon > 0$ y a M_{-1} para $\varepsilon < 0$.

(3) Mostrar que M_1 y M_{-1} pueden ser difeomorfas y también no serlo.

Número 8. Sean $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^p$ dos variedades de igual dimensión, tales que $N = M_1 \cup M_2$ es también una variedad. Demostrar que M_1, M_2 y $M_1 \cap M_2$ son subconjuntos abiertos de N. Utilizar esto para probar que la unión de dos planos secantes distintos no es variedad.

Número 9. Demostrar que el conjunto $M \subset \mathbb{R}^4$ de las matrices que representan isometrías lineales es una intersección completa de codimensión 3, y que tiene dos componentes conexas, difeomorfas ambas a la circunferencia.

Número 10. Denotamos Σ el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n\times n}$ formado por las matrices simétricas (resp. antisimétricas) de orden n y fijamos una matriz regular $Q \in \Sigma$, es decir, una forma bilineal simétrica (resp. antisimétrica) no degenerada. Mostrar que la aplicación $f:\mathbb{R}^{n\times n} \to \Sigma : A \mapsto A^tQA$ es diferenciable, que

$$d_Af : \mathbb{R}^{n\times n} \to \Sigma : B \mapsto A^tQB + B^tQA$$

y que d_Af es suprayectiva si $\det(A) \neq 0$. El grupo de matrices $O(Q) = f^{-1}(Q) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ es el *grupo ortogonal de* Q. Mostrar que:

(1) Este grupo $O(Q)$ es una variedad diferenciable, intersección completa en $\mathbb{R}^{n\times n}$, de dimensión $n(n-1)/2$ (resp. $n(n+1)/2$) del que $SO(Q) = O(Q) \cap \{\det = +1\}$ es un subgrupo abierto y cerrado, denominado subgrupo *especial*.

(2) Las operaciones (el producto y la inversión de matrices) son aplicaciones diferenciables. Es decir, $O(Q)$ y $SO(Q)$ son *grupos de Lie*.

(3) Si Q y Q' son congruentes: $Q' = C^tQC$ con $\det(C) \neq 0$, la aplicación $A \mapsto C^{-1}AC$ es un isomorfismo y un difeomorfismo de $O(Q)$ sobre $O(Q')$ que lleva $SO(Q)$ sobre $SO(Q')$. Estudiar cuántos grupos diferentes $O(Q)$ existen. ¿Cuáles de estos grupos son compactos?

Si Q es simétrica definida positiva obtenemos el grupo ortogonal $O(n)$ y el grupo ortogonal especial $SO(n)$, ambos de dimensión $n(n-1)/2$. Si Q es antisimétrica, $n = 2k$ necesariamente, y obtenemos el *grupo simpléctico real* $Sp(2k)$ de dimensión $k(2k+1)$; en este caso se puede demostrar que el subgrupo especial coincide con todo el grupo simpléctico.

3. Particiones diferenciables de la unidad

El resultado fundamental de esta sección es el siguiente:

Proposición y Definición 3.1 *Sea $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ un recubrimiento abierto de una variedad M. Entonces existe una familia $\Theta = \{\theta_i : i \in I\}$ de funciones diferenciables definidas en M que cumplen las siguientes propiedades:*

(1) $0 \leq \theta_i \leq 1$ *para todo* i.

(2) *Cada punto* $x \in M$ *tiene un entorno* W *en el que se anulan todas las* θ_i *salvo una cantidad finita.*

(3) *La suma* $\sum_i \theta_i$ *está bien definida y vale constantemente* 1.

(4) *Para cada* i*, la función* θ_i *se anula fuera de* U_i*:* $\overline{\{x \in M : \theta_i(x) \neq 0\}} \subset U_i$.

La familia Θ se denomina *partición diferenciable de la unidad*, por las tres primeras propiedades. A la segunda nos referiremos diciendo que Θ es una familia *localmente finita*. Por la última diremos que Θ *está subordinada al recubrimiento abierto* $\mathcal{U}$.

Demostración. Consideramos una sucesión de compactos L_k, $k \geq 0$, que recubran M y cumplan $L_k \subset \operatorname{Int}(L_{k+1})$; podemos suponer que L_0 es un punto. Fijamos k y consideramos el conjunto compacto

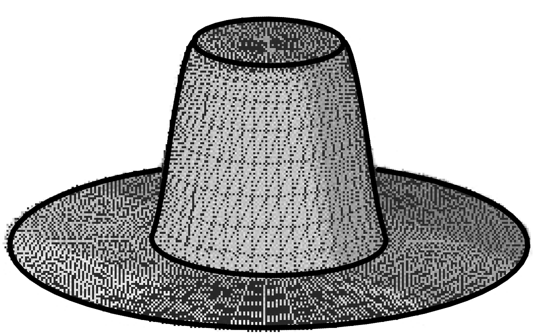
$$K = L_{k+1} \setminus \operatorname{Int}(L_k) \subset M.$$

Como los U_i recubren K, para cada $a \in K$ podemos elegir un entorno abierto D de a en M contenido en $\operatorname{Int}(L_{k+2}) \setminus L_{k-1}$ y en algún $U_{i(k)}$, y un difeomorfismo $\mathtt{x} : D \to \mathbb{R}^m$. Ahora definimos en D la función diferenciable

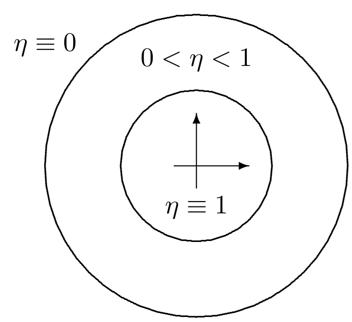
$$\eta = \frac{f(2 - \|\mathtt{x} - \mathtt{x}(a)\|^2)}{f(2 - \|\mathtt{x} - \mathtt{x}(a)\|^2) + f(\|\mathtt{x} - \mathtt{x}(a)\|^2 - 1)}\,,$$

donde $f(t) = \exp(-1/t)$ para $t > 0$, $f(t) = 0$ para $t \leq 0$.

Esta función es ≥ 0 siempre, $\equiv 1$ en un entorno abierto $B \subset D$ de a, y se extiende a M haciéndola $\equiv 0$ fuera de D, según indica la figura siguiente:



gráfica de η (en $\mathbb{R}^{m+1}$)



dominio de η (en $\mathbb{R}^m$)

En fin, como los abiertos B recubren K, que es compacto, una cantidad finita B_ℓ de ellos también lo harán, y tenemos las funciones asociadas $\eta_{k\ell}$. Así hemos construido una familia de funciones diferenciables no negativas $\{\eta_{k\ell}\}_{k\ell}$, cada $\eta_{k\ell}$ nula fuera de un abierto $U_{i(k\ell)}$, de hecho $\overline{\{\eta_{k\ell} \neq 0\}} \subset U_{i(k\ell)}$.

Fijemos ahora un punto $x \in M$, y sea k_0 el primer entero tal que $x \in L_{k_0}$. Por construcción $\eta_{k\ell}$ se anula en L_{k-1}, que contiene a $W = \mathrm{Int}(L_{k_0+1})$ si $k \geq k_0 + 2$, y W es un entorno abierto de x. Por tanto la suma $\sum_{k\ell} \eta_{k\ell}$ es en realidad una suma finita en W. Además, por construcción, $\eta_{k\ell}(x) \neq 0$ para ciertos k, ℓ, de modo que esa suma es > 0. Esto muestra que cualquier suma de las funciones $\eta_{k\ell}$ es una función diferenciable bien definida, y que la suma h de todas es > 0 siempre. Dicho esto, para cada i definimos

$$\theta_i = \frac{1}{h} \sum_{k,\ell \,\mid\, i(k\ell)=i} \eta_{k\ell},$$

y estas funciones forman la partición de la unidad buscada. ■

Mediante particiones se construyen diversas funciones de uso frecuente:

Proposición 3.2 *Sea $M \subset \mathbb{R}^p$ una variedad diferenciable.*

(1) Funciones meseta: *Sean $A \subset M$ un conjunto cerrado y U un entorno abierto de A. Entonces existe una función diferenciable $\theta : M \to \mathbb{R}$ que es $\equiv 1$ en A, $\equiv 0$ fuera de U, y ≥ 0 siempre.*

(2) Funciones separantes de Uryshon: *Sean A y B dos cerrados disjuntos de M. Entonces existe una función diferenciable $\theta : M \to \mathbb{R}$ que es $\equiv 1$ en A, $\equiv 0$ en B, y ≥ 0 siempre.*

(3) Teorema de extensión de Tietze diferenciable: *Sean A un conjunto cerrado de M y $f : A \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces existe una función diferenciable $F : M \to \mathbb{R}$ tal que $F|A = f$.*

Demostración. Las afirmaciones (1) y (2) son en realidad la misma, tomando $U = M \setminus B$. Para demostrarlas se toma el recubrimiento abierto de M formado por U y $V = M \setminus A$. Por la proposición anterior existe una partición diferenciable de la unidad $\{\theta, \eta\}$ subordinada a $\{U, V\}$. Como $\theta + \eta \equiv 1$ y $\eta \equiv 0$ fuera de V, debe ser $\theta \equiv 1$ en A. Por otra parte, $\theta \equiv 0$ fuera de U, o sea en B.

Para probar la tercera afirmación elegimos extensiones locales diferenciables $F_i : U_i \to \mathbb{R}$ de $f|A \cap U_i$ de modo que los U_i formen un recubrimiento abierto de

A. Como $M\setminus A$ es abierto, existe una partición diferenciable de la unidad $\{\eta, \theta_i\}_i$ subordinada a $\{M\setminus A, U_i\}_i$. Ahora observamos que θ_i se anula en $U_i \setminus \overline{\{\theta_i \neq 0\}}$, por lo que podemos definir la función diferenciable

$$\theta_i F_i : M \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \theta_i(x)F_i(x) & \text{si } x \in U_i, \\ 0 & \text{si } x \in M \setminus \overline{\{\theta_i \neq 0\}}. \end{cases}$$

En esta situación la suma $F = \sum_i \theta_i F_i$ está bien definida y es diferenciable, pues al ser la partición localmente finita la suma también lo es.

Veamos que $F|A = f$. Si $x \in A \cap U_i$ se tiene $\theta_i(x)F_i(x) = \theta_i(x)f(x)$, y si $x \in A\setminus U_i$ también, pues $\theta_i(x) = 0$. Por tanto, si $x \in A$

$$F(x) = \sum_i \theta_i(x)F_i(x) = \big(\sum_i \theta_i(x)\big)f(x) = (1 - \eta(x))f(x) = f(x),$$

pues η se anula en A. ■

En la última demostración se utiliza un artificio que interesa explicitar para uso posterior. Sirve para salvar la dificultad de que una función sólo sea diferenciable en un entorno de un punto.

(3.3) Extensión por cero. Sea M una variedad diferenciable. Sean a un punto de M y U un entorno suyo. Se fijan dos entornos abiertos V, W de a tales que $\overline{V} \subset W \subset \overline{W} \subset U$, y se elige una función meseta $\theta \equiv 1$ en $\overline{V}$ y $\theta \equiv 0$ en $M \setminus W$. Cualquier función diferenciable $f : U \to \mathbb{R}$ se puede multiplicar por θ *en todo* M poniendo

$$\theta f : M \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \theta(x)f(x) & \text{si } x \in U, \\ 0 & \text{si } x \in M \setminus \overline{W}. \end{cases}$$

Como ya sabemos, al ser $\theta f = 0$ en $U \setminus \overline{W}$, la función está bien definida y es diferenciable. Pero además $\theta f = 1 \cdot f = f$ en V. Por estas propiedades se dice que θf es una *extensión por cero de* f (la asociada a θ).

Obsérvese que se fijan V, donde la multiplicación no modifica f, y W, fuera de donde la multiplicación anula f. Utilizamos $\overline{W}$ para asegurar la diferenciabilidad en la frontera de U.

Problemas

Número 1. Construir explícitamente una función diferenciable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea $\equiv 0$ en $t \leq 0$, $\equiv 1$ en $t \geq 1$.

Número 2. Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función diferenciable en todo el intervalo excepto en un punto $t=a$, $0<a<1$, tal que $f(0)=0$. Sean $\varepsilon>0$ y $\theta:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función meseta que es $\equiv 0$ en $|t-a|\geq\varepsilon$ y es $\equiv 1$ en un entorno de a. Demostrar que para una constante adecuada λ, la función diferenciable $h(t)=\int_0^t(\lambda\theta+(1-\theta)f')$ coincide con f en $|t-a|\geq\varepsilon$.

Número 3. Construir una función diferenciable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(t)=t$ para $t\leq 1$, $f(t)\geq t$ para $1\leq t\leq 2$, y $f(t)=2$ para $t\geq 2$.

Número 4. Sea $D\subset\mathbb{R}^p$ una bola abierta y C un conjunto cerrado contenido en ella. Construir explícitamente una función de Uryshon que sea $\equiv 0$ en C, $\equiv 1$ en $\mathbb{R}^p\setminus D$.

Número 5. Construir dos cerrados disjuntos A y B de la recta afín tales que ninguna función polinomial sea >0 sobre A y <0 sobre B.

Número 6. Sean M una variedad diferenciable de dimensión ≥ 1 y $a\in M$ un punto arbitrario. Probar que existen funciones diferenciables $f,g:M\to\mathbb{R}$ no idénticamente nulas en ningún entorno de a cuyo producto fg lo es en toda la variedad.

Número 7. Sean (a_k) una sucesión discreta de puntos de $\mathbb{R}^p$ y (r_k) una sucesión de enteros ≥ 0. Para cada k y cada $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_p)$ con $|\nu|=\nu_1+\cdots+\nu_p\leq r_k$, elegimos $f_{\nu k}\in\mathbb{R}$. Construir una función diferenciable $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ cuyas derivadas parciales sean $\frac{\partial^{|\nu|}f}{\partial x_1^{\nu_1}\cdots\partial x_p^{\nu_p}}(a_k)=f_{\nu k}$.

Número 8. Sean $M\subset N$ dos variedades diferenciables de dimensiones $m<n$, M cerrada en N. Demostrar que existe una función diferenciable $f:N\to\mathbb{R}$ tal que $M=f^{-1}(0)$. (Utilizar sumas de cuadrados de ecuaciones locales.)

Número 9. Sea $M\subset\mathbb{R}^p$ una variedad diferenciable no cerrada. Sea $\{\theta_i\}$ una partición diferenciable de la unidad subordinada a un recubrimiento numerable por abiertos relativamente compactos de M. Probar que la función $f=\sum_i i\theta_i$ es propia y que $g:M\to\mathbb{R}^{p+1}:x\mapsto(x,f(x))$ es un difeomorfismo sobre una variedad $N\subset\mathbb{R}^{p+1}$ cerrada.

Número 10. Sean M una variedad diferenciable y $C\subset M$ un conjunto cerrado. Demostrar que C es intersección numerable de abiertos $G_k=\{g_k>0\}$ con $g_k:M\to\mathbb{R}$ diferenciable.

4. Variedades con borde

El modelo para definir variedades con borde es un *semiespacio cerrado*

$$\mathbb{H}^m=\{x=(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m:\ \lambda(x)\geq 0\},$$

donde $\lambda:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ es una forma lineal no idénticamente nula. Por supuesto, mediante un cambio lineal siempre se puede conseguir que λ sea una proyección coordenada, y por ello salvo que se diga otra cosa se supone siempre

$$\mathbb{H}^m=\{x=(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m:\ x_1\geq 0\}.$$

De modo natural, denominamos *borde de* $\mathbb{H}^m$ a su frontera topológica

$$\partial\mathbb{H}^m=\{x\in\mathbb{R}^m:\ \lambda(x)=0\}.$$

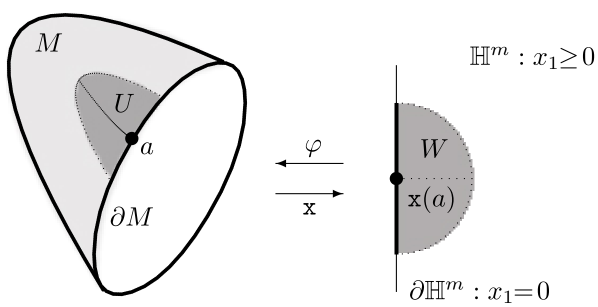
Obviamente, esta frontera es una variedad lineal de dimensión $m-1$, luego una variedad difeomorfa a $\mathbb{R}^{m-1}$. Si $\mathbb{H}^m : x_1 \geq 0$, el borde es $\partial\mathbb{H}^m = \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$.

El cálculo diferencial usual en abiertos de $\mathbb{R}^m$ se extiende sin dificultad a abiertos de $\mathbb{H}^m$. La razón es que la derivada de una función diferenciable $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ en un punto $a \in \partial\mathbb{H}^m$ depende sólo de la restricción $f = F|\mathbb{H}^m$, pues

$$d_a F = \lim_{\substack{x \to a \\ \lambda(x) > 0}} d_x f\,;$$

en consecuencia, denotamos $d_a f$ en lugar de $d_a F$. Repárese en que aunque el dominio de f es un semiespacio, el de su derivada es todo $\mathbb{R}^m$.

Definición 4.1 Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^p$ se llama *variedad diferenciable con borde* si cada punto $x \in M$ tiene un entorno U en M que es difeomorfo a un abierto W de un semiespacio cerrado. El *borde* de M es el conjunto de los puntos x que corresponden a puntos del borde de un semiespacio por un difeomorfismo local; este borde se denota por ∂M.



Como se ve, esta definición es una extensión inmediata de la definición inicial de variedad. De igual manera hablaremos de *parametrizaciones*, *sistemas de coordenadas* y *cambios de coordenadas* para variedades con borde. El único aspecto que requiere cierta precaución es la definición del borde, pues es preciso comprobar que un punto está o no en el borde independientemente de la parametrización que se use para comprobarlo. Esto lo resuelve el lema de *invarianza del borde:*

Lema 4.2 *Sean U y V dos abiertos de la variedad M, y $\varphi : A \to U$, $\psi : B \to V$ dos parametrizaciones, A abierto en $\mathbb{H}^m$, B abierto en $\mathbb{H}^n$, y sea $a \in U \cap V$. Entonces $m = n$ y $\varphi^{-1}(a) \in \partial\mathbb{H}^m$ si y sólo si $\psi^{-1}(a) \in \partial\mathbb{H}^n$.*

Demostración. El difeomorfismo $f = \psi^{-1}\circ\varphi$ transforma un entorno de $x = \varphi^{-1}(a)$ en $\mathbb{H}^m$ en otro de $y = \psi^{-1}(a)$ en $\mathbb{H}^n$. Por la regla de la cadena, la derivada $d_x f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo lineal, luego $m = n$. Supongamos que $x \notin \partial\mathbb{H}^m$, pero $y \in \partial\mathbb{H}^m$. Entonces $f = (f_1, \dots, f_m)$ es diferenciable en un entorno abierto de x *en* $\mathbb{R}^m$ en el que $f_1 \geq 0$. Pero $y = f(x)$ está en $\partial\mathbb{H}^m$, luego $f_1(x) = 0$ y x es un mínimo de f_1. Por tanto es un punto crítico, es decir, todas las derivadas parciales $\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x)$ se anulan. Concluimos que la jacobiana de f en x tiene la primera fila nula y $d_x f$ no es isomorfismo, contradicción. ■

La demostración anterior evidencia la naturaleza totalmente elemental del lema: que un extremo local es un punto crítico se deduce inmediatamente de la definición de derivada. Como alternativa, si usamos el teorema de inversión local, dado $x \notin \partial\mathbb{H}^m$ deducimos que f es un difeomorfismo local de un entorno suficientemente pequeño de x en $\mathbb{R}^m$, contenido en A, sobre un entorno W de y en $\mathbb{R}^n$, y por tanto $y \in W \subset f(A) \subset \mathbb{H}^n$ no puede estar en $\partial\mathbb{H}^n$.

En cualquier caso, una vez establecido el resultado es inmediato comprobar que el borde ∂M de una variedad M es un subconjunto cerrado, y una variedad diferenciable (sin borde) de dimensión $\dim(M) - 1$. El conjunto $M \setminus \partial M$, que es abierto, se denomina *interior de la variedad* y se denota $\mathrm{Int}(M)$. Este interior no es necesariamente tal desde el punto de vista topológico, y debe evitarse confundir las dos nociones.

Ejemplos 4.3 (1) Una *banda plana* definida en $\mathbb{R}^2$ por dos inecuaciones $r_1 \leq ax + by \leq r_2$ es una variedad con borde las dos rectas afines $ax + by = r_i$.

(2) Otro ejemplo sencillo de variedad con borde es el disco cerrado plano $\mathbb{D}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2$, cuyo borde es la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$. Para verlo consideramos coordenadas polares $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, que lo convierten (localmente) en el semiplano $\rho \leq r$.

(3) El mismo argumento con $\rho \geq r$ muestra que $x^2 + y^2 \geq r^2$ define una variedad con borde la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$. Asimismo podemos ver que una *corona plana* $0 < r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2$ es una variedad con borde las dos circunferencias $x^2 + y^2 = r_i^2$, $i = 1, 2$. ■

Sugerimos al lector la tarea de generalizar los ejemplos anteriores a dimensión arbitraria.

Para variedades con borde los enunciados de la sección 2 se modifican de manera que las mismas demostraciones valgan. Diremos tan sólo que en I.2.1 se reemplaza $\mathbb{R}^m$ por $\mathbb{H}^m$, en I.2.3 lo mismo y se supone que N no tiene borde, y I.2.4 queda así:

Proposición 4.4 *Sea $f = (f_1, \ldots, f_q) : V \to \mathbb{R}^q$ una aplicación diferenciable en el abierto V de $\mathbb{R}^p$ cuya derivada en un punto $a \in V$ es suprayectiva. Entonces, existe un entorno abierto $U \subset V$ de a tal que*

$$M = \{x \in U : f_1(x) = f_1(a), \ldots, f_{q-1}(x) = f_{q-1}(a), f_q(x) \geq f_q(a)\}$$

es una variedad diferenciable de dimensión $p - q + 1$ con borde la variedad

$$\partial M = \{x \in U : f_1(x) = f_1(a), \ldots, f_{q-1}(x) = f_{q-1}(a), f_q(x) = f_q(a)\}.$$

Demostración. Como en la demostración de I.2.4, se obtiene un difeomorfismo de la forma $h = (f, g)$ de un entorno $U \subset V$ de a sobre un entorno abierto W de $(f(a), g(a))$ en $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{p-q}$. Pero ahora escribimos $f = (\bar{f}, f_q)$ y observamos que h transforma M en $(\{\bar{f}(a)\} \times [f_q(a), +\infty) \times \mathbb{R}^{p-q}) \cap W$, que se identifica con $\mathbb{H}^{1+p-q}$. Esto proporciona la parametrización de M como variedad con borde. ■

Las variedades con borde siempre se pueden representar *localmente* como en la proposición anterior.

Ejemplos 4.5 (1) El disco unidad cerrado $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{R}^2$ viene dado por la inecuación $x^2 + y^2 \leq 1$, y por lo anterior es una variedad de dimensión 2 con borde la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1$.

(2) Si $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ es una hipersuperficie con una ecuación global $f : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$, entonces $\{f \geq 0\}$ y $\{f \leq 0\}$ son dos variedades con borde $\{f = 0\} = M$. Resulta que M desconecta $\mathbb{R}^{m+1}$ (I.2 Prob.6).

Problemas

Número 1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la aplicación: $t \mapsto (\cos t, \cos 2t)$. Mostrar que la imagen de cualquier intervalo abierto $(a, b) \subset \mathbb{R}$ es una curva diferenciable, y estudiar cuándo tiene borde y en cuántos puntos consiste según los casos.

Número 2. Sea $f : V \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un abierto $V \subset \mathbb{R}^p$, y sean $a < b$ tales que $d_x f$ es suprayectiva si $f(x) = a$ o $f(x) = b$. Probar que las inecuaciones $a \leq f \leq b$ definen una variedad diferenciable con borde la unión de las dos hipersuperficies $f = a$ y $f = b$.

Número 3. Demostrar que el *tronco de cono* $M : x^2 + y^2 = z^2$, $0 < a \le z \le b$, y el *tronco de cilindro* $N : x^2 + y^2 = b^2$, $a \le z \le b$, son dos variedades con borde, ambas difeomorfas a una corona plana cerrada.

Número 4. Sean $C \subset \mathbb{R}^3$ un cono y $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma lineal no nula. Para cada dos parámetros $a < b$ consideramos el conjunto $M(a, b) = \{x \in C : \ a \le h(x) \le b\}$. Estudiar cuándo es $M(a, b)$ una variedad, y demostrar que, caso de serlo, es difeomorfa a una corona plana, a una banda plana, o a la unión de dos de tales bandas.

Número 5. Se llama *toro sólido* al conjunto $M \subset \mathbb{R}^3$ generado al girar alrededor del eje de las z's el disco cerrado $\mathbb{D} : y = 0, (x - 2)^2 + z^2 \le 1$. Utilizar el método de I.2 Prob.4 para construir un difeomorfismo de $\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1$ sobre M, y deducir que M es una variedad con borde difeomorfo a un toro de revolución.

Número 6. Consideramos la esfera unidad $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ y los subconjuntos suyos definidos por las siguientes inecuaciones:

$$M \subset \mathbb{S}^3 : x_1^2 + x_2^2 \le \tfrac{1}{2}\,, \qquad M' \subset \mathbb{S}^3 : x_3^2 + x_4^2 \le \tfrac{1}{2}.$$

Demostrar que M y M' son difeomorfos a toros sólidos y deducir que $\mathbb{S}^3$ es unión de dos toros sólidos pegados por su borde de manera que los meridianos del uno son los paralelos del otro.

Número 7. Se considera la aplicación $f : \mathbb{R} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}^3$ de I.2 Prob.5, cuya imagen M es una banda de Möbius. Demostrar que la adherencia de M en $\mathbb{R}^3$ es una variedad con borde, cuyo interior como tal es M, y cuyo borde es difeomorfo a una circunferencia.

Número 8. Sea $M \subset \mathbb{R}^p$ una variedad cerrada con borde, de dimensión p. Demostrar que el borde de M coincide con su frontera topológica.

Número 9. Sea $W \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto abierto cuya frontera topológica $\overline{W} \setminus W$ es una hipersuperficie diferenciable. Probar que la adherencia M de W es una variedad diferenciable posible, pero no necesariamente, con borde.

Número 10. Construir un abierto W del plano $\mathbb{R}^2$ que sea homeomorfo al disco unidad, pero cuya frontera M no sea una curva diferenciable. ¿Y que no sea homeomorfa a una?

5. Variedades abstractas

La definición de variedad que hemos adoptado presupone su inmersión en un espacio afín, por lo que en rigor deberíamos decir *variedad sumergida*. Este punto de vista es formalmente restrictivo y conviene considerar una noción más general, que desarrollamos a continuación.

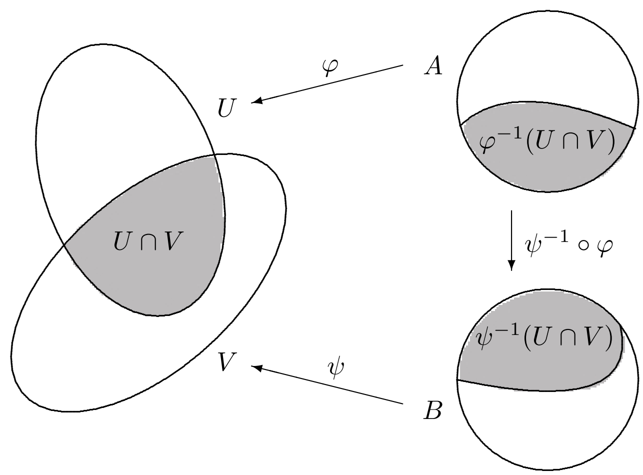
En toda esta sección, M denota un espacio topológico separado (cada dos puntos distintos tienen entornos disjuntos) y con una base numerable de abiertos.

(5.1) Parametrizaciones. Una *parametrización de M* es un homeomorfismo $\varphi : W \to U$ de un abierto W de un semiespacio afín $\mathbb{H}^m$ sobre un abierto U de

M. El homeomorfismo inverso $\mathtt{x} = \varphi^{-1} : U \to W$ se denomina *sistema local de coordenadas*, y el abierto U *dominio de coordenadas.* (Ya se ve cómo se repite la terminología de las variedades sumergidas.)

Dos parametrizaciones $\varphi : A \to U$ y $\psi : B \to V$ son *compatibles* si el *cambio de coordenadas* $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(U \cap V) \to \psi^{-1}(U \cap V)$ es un difeomorfismo entre abiertos de semiespacios afines (esto es trivial si $U \cap V = \varnothing$).

La figura siguiente representa un cambio de coordenadas de una variedad abstracta o de una variedad sumergida, pero hay una diferencia: en el caso abstracto el cambio es difeomorfismo *por definición,* en el caso sumergido *se deduce* de la definición.



(5.2) Atlas y estructuras diferenciables de un espacio topológico. Un *atlas de* M es una colección de parametrizaciones compatibles dos a dos cuyas imágenes recubren M. Dos atlas son *compatibles* si todas las cartas de uno lo son con todas las del otro, o sea, si su unión es de nuevo un atlas.

La compatibilidad de atlas es una relación de equivalencia. La parte menos inmediata de esta afirmación es que dos parametrizaciones que son compatibles con todas las de un atlas son compatibles entre sí. Para probar este hecho consideremos dos parametrizaciones $\varphi_i : W_i \to U_i \subset M$, $i = 1, 2$, compatibles con todas las de un atlas dado. Tenemos que probar que $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ es una aplicación diferenciable. Sean pues $x \in U_1 \cap U_2$, y $\psi : B \to V \subset M$ una parametrización del atlas con $x \in V$. Como en un entorno de $\varphi_j^{-1}(x)$ se cumple

$$\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j = (\varphi_i^{-1} \circ \psi) \circ (\psi^{-1} \circ \varphi_j),$$

la conclusión se sigue de ser ψ compatible con φ_i y con φ_j.

Resulta de lo anterior que cualquier atlas está contenido en uno *maximal* único. Un atlas maximal de M se llama *estructura diferenciable*, y para definir una tal estructura basta simplemente elegir un atlas: el maximal correspondiente se obtiene añadiendo todas las parametrizaciones compatibles con todas las del elegido. El espacio M se denomina *variedad diferenciable (abstracta)* cuando se ha dotado de una estructura diferenciable, y las parametrizaciones del atlas maximal que la define se llaman simplemente *parametrizaciones de M*.

La dimensión $\dim(M)$ de una variedad M se define consistentemente según la dimensión de los espacios afines en los que están definidas las parametrizaciones de la variedad.

El borde ∂M de una variedad M se define como en el caso sumergido, y por lo mismo que entonces esa definición es consistente, y el borde es a su vez una variedad (sin borde), de dimensión $\dim(M) - 1$.

Dotado M de una estructura diferenciable, las imágenes U de sus parametrizaciones $\varphi : W \to U$ forman una base de su topología. En efecto, basta observar que la restricción de φ a cualquier abierto $W' \subset W$ es una parametrización compatible con todas con las que φ lo es.

Observación 5.3 Es claro con estas definiciones que si $M \subset \mathbb{R}^p$ es una variedad sumergida, sus parametrizaciones como tal son parametrizaciones de M como espacio topológico, y son todas compatibles dos a dos. Pero además, el atlas formado por esas parametrizaciones es maximal, esto es, cualquier homeomorfismo $\varphi : W \to U$ de un abierto W de $\mathbb{R}^m$ sobre un abierto U de M compatible con todas ellas, es de hecho un difeomorfismo. En efecto, supongamos primero que W es un abierto de $\mathbb{R}^m$. Como en los puntos de U el par $M \subset \mathbb{R}^p$ es localmente difeomorfo a $\mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^p$, podemos simplemente suponer que $M = \mathbb{R}^m \times \{0\}$. En esta situación, consideramos las dos aplicaciones lineales $\pi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m : (x, y) \mapsto x$, y $\eta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p : x \mapsto (x, 0)$. La hipótesis de compatibilidad dice que $\pi \circ \varphi : W \to \pi(U) \subset \mathbb{R}^m$ es un difeomorfismo, y podemos escribir $\varphi = \eta \circ (\pi \circ \varphi)$, $\varphi^{-1} = (\pi \circ \varphi)^{-1} \circ \pi$. En conclusión, φ y φ^{-1} son diferenciables. Si φ está definida en un abierto W de $\mathbb{H}^m$ se repite el argumento, reemplazando $\mathbb{R}^m$ por $\mathbb{H}^m$.

De este modo toda variedad sumergida M tiene una estructura diferenciable y es una variedad abstracta en los términos de esta sección.

Ejemplos 5.4 (1) Los espacios proyectivos son los ejemplos más naturales de variedades que no se definen sumergidas. En el espacio proyectivo real $P_m(\mathbb{R})$ con coordenadas homogéneas $(x_0 : \ldots : x_m)$, los complementarios U_i de los hiperplanos proyectivos $x_i = 0$ son abiertos homeomorfos a $\mathbb{R}^m$ vía las parametrizaciones

$$\varphi_i : (x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m) \mapsto (x_0 : \ldots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \ldots : x_m).$$

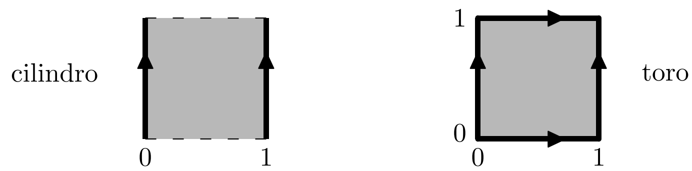
Sea ahora H un hiperplano proyectivo de $P_m(\mathbb{R})$ y consideremos nuevas coordenadas homogéneas $(y_0 : \ldots : y_m)$ de modo que H tenga por ecuación $y_0 = 0$. Entonces la aplicación $\psi : \mathbb{R}^m \to V = P_m(\mathbb{R}) \setminus H : (y_1, \ldots, y_m) \mapsto (1 : y_1 : \ldots : y_m)$ es una parametrización compatible con las anteriores. Esto quiere decir que la estructura diferenciable que acabamos de definir no depende de las coordenadas homogéneas.

(2) El espacio proyectivo $P_m(\mathbb{R})$ puede también obtenerse identificando en la esfera $\mathbb{S}^m$ los puntos antipodales. La aplicación que representa esta identificación es $\pi : (x_0, \ldots, x_m) \mapsto (x_0 : \ldots : x_m)$. Podemos definir un atlas de $P_m(\mathbb{R})$ del siguiente modo. Sean H un hiperplano vectorial de $\mathbb{R}^{m+1}$, y $D \subset \mathbb{S}^m$ uno de los dos hemisferios abiertos que H define en la esfera. La proyección ortogonal define un homeomorfismo de D sobre la bola abierta unidad $B \subset H \equiv \mathbb{R}^m$, cuyo inverso denotamos por $\psi : B \to D$. Entonces $\varphi = \pi \circ \psi : B \to U \subset P_m(\mathbb{R})$ es una parametrización con imagen el abierto U complementario del hiperplano proyectivo $\pi(H)$. Es fácil comprobar que esta estructura diferenciable es la misma que la anterior.

(3) La circunferencia se describe topológicamente como el cociente de la recta $\mathbb{R}$ por el subgrupo $\mathbb{Z}$, o equivalentemente por la relación de equivalencia que genera $x \sim x+1$. Este cociente $M = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ se dota de estructura de variedad diferenciable como sigue. La aplicación suprayectiva asociada $\mathbb{R} \to M$ es un homeomorfismo local: basta restringirla a cualquier intervalo $(a, a+1)$. Estas restricciones son parametrizaciones compatibles de M (las composiciones que aparecen al comparar dos son traslaciones), que denominaremos *canónicas*. Utilizando el difeomorfismo local $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dado por $f(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi)t$ se deduce que la variedad abstracta $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es difeomorfa a $\mathbb{S}^1$.

(4) El cilindro es el cociente $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, \mathbb{Z} \times \{0\}$, o sea, es el cociente de $\mathbb{R}^2$ por la relación de equivalencia que genera $(x, y) \sim (x+1, y)$. Las parametrizaciones canónicas están en este caso definidas en los abiertos $(a, a+1) \times \mathbb{R}$.

(5) El toro es $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, es decir, es el cociente de $\mathbb{R}^2$ por la relación de equivalencia que generan $(x, y) \sim (x+1, y)$ y $(x, y) \sim (x, y+1)$. Las parametrizaciones canónicas están definidas en los rectángulos abiertos $(a, a+1) \times (b, b+1)$.



(6) La *banda de Möbius* es el cociente del plano $\mathbb{R}^2$ por la relación de equivalencia que genera $(x, y) \sim (x + 1, -y)$. Los dominios de definición de las parametrizaciones canónicas son los rectángulos abiertos $(a, a + 1) \times \mathbb{R}$.

(7) La *botella de Klein* es el cociente de $\mathbb{R}^2$ por la relación de equivalencia que generan $(x, y) \sim (x+1, -y)$ y $(x, y) \sim (x, y+2)$. Sus parametrizaciones canónicas están definidas en los rectángulos abiertos $(a, a + 1) \times (b, b + 2)$.

Observaciones 5.5 (1) Las propiedades topológicas locales de las variedades son las mismas del espacio afín. Las más importantes son la conexión local y la compacidad local.

(2) Como la topología de una variedad tiene una base numerable, de la compacidad local resulta que una variedad es un espacio paracompacto, de hecho metrizable. Asimismo, podemos construir compactos L_k que recubran la variedad y cumplan $L_k \subset \mathrm{Int}(L_{k+1})$.

(3) Como en el caso de variedades contenidas en un espacio afín, se pueden usar cadenas de dominios de coordenadas para probar que una variedad abstracta conexa es conexa por arcos.

(5.6) Aplicaciones diferenciables. Una aplicación continua $f : M \to N$ entre variedades se denomina *diferenciable* si para cualquier par de parametrizaciones $\varphi : A \to U \subset M$ y $\psi : B \to V \subset N$ tales que $f(U) \subset V$ la *localización* $g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi : A \to B$ es diferenciable.

Es sencillo demostrar que en esta definición la condición *para cualquier par de parametrizaciones* φ *y* ψ puede reemplazarse por *para cada punto* $x \in M$ *existen parametrizaciones* φ *y* ψ *de entornos de* x *y* $f(x)$. Obsérvese que por la continuidad de f, dado $x \in M$ siempre existen φ, ψ de modo que $x \in U$ y $f(U) \subset V$. En efecto, elegida primero ψ de modo que $f(x) \in V$, el conjunto $f^{-1}(V)$ es un entorno abierto de x, y como las imágenes U de las parametrizaciones de M forman una base de la topología, siempre existe $U \subset f^{-1}(V)$ con $x \in U$.

De modo natural, los difeomorfismos entre variedades son los homeomorfismos diferenciables cuyo inverso es también diferenciable, y en consecuencia se tiene la noción de difeomorfismo local. En particular, con esta terminología, resulta que las parametrizaciones de M son los difeomorfismos de sus abiertos con abiertos de espacios o semiespacios afines.

Por último, también se tienen las particiones diferenciables de la unidad, repitiendo la demostración dada para variedades sumergidas.

Ejemplos 5.7 (1) Si $M \subset \mathbb{R}^p$ y $N \subset \mathbb{R}^q$ son dos variedades sumergidas, una aplicación continua $f : M \to N$ es diferenciable desde el punto de vista anterior si y sólo lo es desde el punto de vista sumergido: esto es la localización I.1.6.

(2) Cualquier homografía $h : P_m(\mathbb{R}) \to P_m(\mathbb{R})$ es una aplicación diferenciable.

En efecto, sean $a \in P_m(\mathbb{R})$, $b = h(a)$. Elegimos unas coordenadas homogéneas y para que b esté en $y_0 \neq 0$ y luego otras x para que el hiperplano $h^{-1}(y_0 = 0)$ sea $x_0 = 0$. Así a está en $x_0 \neq 0$ y podemos localizar h mediante las parametrizaciones $\varphi : \mathbb{R}^m \to \{x_0 \neq 0\}$ y $\psi : \mathbb{R}^m \to \{y_0 \neq 0\}$ asociadas a esas coordenadas (I.5.4(1)). El resultado $\psi^{-1} \circ h \circ \varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación afín, luego diferenciable.

(3) Si contemplamos el cilindro C y el toro T como cocientes del plano (I.5.4(4), (5)), resulta que la identidad de $\mathbb{R}^2$ es la localización de la aplicación $C \to T$ que ella misma induce, y por tanto $C \to T$ es un difeomorfismo local suprayectivo. De manera similar se define un difeomorfismo local suprayectivo de la banda de Möbius sobre la botella de Klein (problema 3 de esta sección).

Observaciones 5.8 Cualquier variedad M puede sumergirse en un espacio afín, es decir, es difeomorfa a una variedad sumergida $N \subset \mathbb{R}^p$. La construcción de N requiere diversas manipulaciones con recubrimientos abiertos, típicas de la topología conjuntista, las más delicadas para obtener un atlas *finito* (algo trivial cuando M es compacta). Lo interesante que queremos señalar es que no se recurre a ninguna técnica diferencial especial, como mostramos en el último problema de esta sección. Por eso mismo, este método controla pobremente la dimensión del espacio afín $\mathbb{R}^p$. Eso requiere métodos diferenciales mucho más finos, que permiten conseguir $p = 2\dim(M) + 1$, e incluso $p = 2\dim(M)$ (*teoremas de inmersión de*

Whitney). La *dimensión de inmersión* mínima en que se puede sumergir una variedad M dada es un invariante importante de la misma.

En conclusión, en esta sección no hemos mejorado nuestro catálogo de variedades, sino nuestro punto de vista: a menudo es mejor contemplar una variedad en términos de atlas, independientemente de su inclusión en un espacio afín.

En todo caso, debe saber distinguirse siempre qué propiedades de una variedad son de naturaleza intrínseca. Consideremos el subconjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ de ecuación $x^2 = y^3$, que como ya sabemos no es una variedad de $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, podemos equipar X con una estructura diferenciable utilizando el homeomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \to X : t \mapsto (t^3, t^2)$. De este modo X es ciertamente una variedad, pero no podemos utilizar la imagen que tenemos de X en $\mathbb{R}^2$ para representarla. Por ejemplo, la aplicación $f : X \to \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = x/y$ para $y \neq 0$, $f(x, 0) = 0$, es diferenciable para esa estructura, pues al localizar obtenemos $f \circ \varphi : t \mapsto t$, pero f no se puede extender diferenciablemente a ningún abierto W de $\mathbb{R}^2$ que contenga a X: si existiera una extensión $F : W \to \mathbb{R}$ sería $F(t^3, t^2) = t$ y derivando $3t^2(\partial F/\partial x)(t^3, t^2) + 2t(\partial F/\partial y)(t^3, t^2) = 1$, lo que en $t = 0$ es imposible.

Problemas

Número 1. Construir tres parametrizaciones de la recta afín $\mathbb{R}$ de modo que una de ellas sea compatible con las otras dos, pero éstas no lo sean entre sí. Obtener con esto dos estructuras diferenciables distintas en la recta real, y mostrar que las dos variedades resultantes son difeomorfas.

Número 2. Demostrar que si una función diferenciable $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ se anula en un único punto entonces no es difeomorfismo local en él. (Pensar en la circunferencia como el cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.)

Número 3. Definir un difeomorfismo local suprayectivo del toro sobre la botella de Klein, de manera que cada punto de la botella tenga exactamente dos preimágenes. (Describir el toro y la botella como cocientes de $\mathbb{R}^2$, de modo que la identidad $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ induzca el difeomorfismo buscado.)

Número 4. Demostrar que el espacio proyectivo real $P_m(\mathbb{R})$ es difeomorfo a una variedad sumergida, identificándolo con la imagen en $\mathbb{R}^p$ de la aplicación inyectiva

$$(x_0 : \ldots : x_m) \mapsto \left(\frac{x_i x_j}{x_0^2 + \cdots + x_m^2} \right)_{0 \leq i \leq j \leq m}.$$

¿Qué variedad sumergida obtenemos para $P_1(\mathbb{R})$?

Número 5. Demostrar que $P_2(\mathbb{R})$ puede sumergirse en $\mathbb{R}^4$ mediante la aplicación $f : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ siguiente:

$$f(x_0 : x_1 : x_2) = \Big(\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_0 x_1}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_0 x_2}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1 x_2}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2} \Big).$$

Se demuestra que $P_2(\mathbb{R})$ no puede sumergirse en $\mathbb{R}^3$.

Número 6. Sea $G_{3,2}$ la grassmanniana de 2-planos en $\mathbb{R}^3$. Cada $L \in G_{3,2}$ se identifica con la matriz de la proyección ortogonal sobre L, y de este modo, representamos $G_{3,2}$ mediante el subconjunto de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ formado por las matrices simétricas, idempotentes y de traza 2. Probar que ese conjunto es una variedad diferenciable difeomorfa a $P_2(\mathbb{R})$.

Número 7. Demostrar que el grupo $SO(3)$ de las matrices ortogonales 3×3 con determinante positivo es una variedad difeomorfa a $P_3(\mathbb{R})$.

Número 8. Demostrar que el espacio proyectivo complejo $P_n(\mathbb{C})$ es una variedad diferenciable de dimensión $m = 2n$, que se puede recubrir con $n+1$ parametrizaciones cuyos dominios son $\mathbb{R}^m$. Demostrar que las homografías entre espacios proyectivos complejos son difeomorfismos.

Número 9. Demostrar que el espacio proyectivo complejo $P_n(\mathbb{C})$ es difeomorfo a una variedad sumergida. ¿Cuál es esa variedad para $P_1(\mathbb{C})$?

Número 10. Sea M una variedad abstracta de dimensión m. Por métodos puramente topológicos, que no son nuestro objetivo aquí, se obtiene un atlas *finito* de M, con digamos r sistemas de coordenadas $\mathtt{x}_i : \Omega_i \to \mathbb{R}^m$, y se construyen dos recubrimientos abiertos $\{V_i\}$ y $\{U_i\}$ de M que cumplen $\overline{V}_i \subset U_i \subset \overline{U}_i \subset \Omega_i$. A partir de esto, construir funciones diferenciables $\theta_i : M \to \mathbb{R}$ tales que $\theta_i|V_i \equiv 1,\ \theta_i|M \setminus U_i \equiv 0$, de modo que los productos $\theta_i \mathtt{x}_i$ se pueden extender por cero fuera de U_i, y demostrar que la aplicación

$$h = (\theta_1 \mathtt{x}_1, \theta_1, \dots, \theta_r \mathtt{x}_r, \theta_r) : M \to \mathbb{R}^{(m+1)r}.$$

es un difeomorfismo sobre una variedad sumergida $N \subset \mathbb{R}^{(m+1)r}$ de dimensión m según los siguientes pasos: (i) h es continua e inyectiva, (ii) h es cerrada de M en $N = h(M)$ (lo que no significa necesariamente que N sea cerrada en $\mathbb{R}^{(m+1)r}$), (iii) la composición $h \circ \mathtt{x}_i^{-1}$ describe $h(V_i)$ como el grafo de una aplicación diferenciable definida en $\mathtt{x}_i(V_i) \subset \mathbb{R}^m$, y por tanto es una parametrización.

Los métodos topológicos mencionados antes son de topología conjuntista, y se pueden calificar de elementales, pero no de fáciles (y como curiosidad mencionemos que $r = m+1$). Si M es compacta las construcciones topológicas se simplifican drásticamente, por lo que sugerimos al lector que aborde este caso primero.