

---

# TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

## muy elemental en dimensión muy baja

### Contenido

<b>Lección 0. Recordatorio de topología</b>	1
Homeomorfismos útiles. Cocientes topológicos. El teorema de extensión de Tietze. Número de Lebesgue de un recubrimiento abierto. Compactificación por un punto y proyección estereográfica. Curvas y superficies.	
<b>Lección 1. Homotopía</b>	10
Aplicaciones homótopas. Aplicaciones nulhomótopas. Convexidad y conjuntos estrellados. Interpolación lineal. Interpolación en esferas. Espacios contráctiles. Homotopía relativa.	
<b>Lección 2. Homotopías de caminos</b>	15
Caminos y lazos; extremos y puntos base. Homotopías de caminos; extremos fijos. Homotopías de lazos; punto base fijo. Representaciones geométricas de los diversos tipos de homotopía. Espacios simplemente conexos; caracterizaciones.	
<b>Lección 3. Esferas</b>	19
Una esfera (de dimensión $\geq 2$ ) es simplemente conexa. Demostración directa por manipulación elemental de caminos. Formulación de la Conjetura de Poincaré. Pequeña reseña histórica.	
<b>Lección 4. Operaciones con caminos</b>	23
Sistematización de las manipulaciones de caminos utilizadas en la lección anterior. Producto de caminos. Propiedades algebraicas salvo homotopía: asociatividad, elementos neutros, inversión.	
<b>Lección 5. El grupo fundamental</b>	26
Grupo fundamental de base un punto dado. Ejemplos sencillos: conjuntos estrellados y esferas. Independencia del punto base. Invarianza por homeomorfismo.	
<b>Lección 6. El problema de elevación</b>	28
Elevación de aplicaciones continuas. Espacios recubridores. Comportamiento local de las elevaciones. Unicidad. Lema de elevación para homotopías. Naturaleza homotópica de la existencia. Elevación de caminos.	
<b>Lección 7. Espacios proyectivos reales</b>	32
Recubridores de los espacios proyectivos reales. Cálculo del grupo fundamental de un espacio proyectivo real de dimensión $\geq 2$ . El espacio proyectivo de dimensión 3 y el grupo de rotaciones del espacio afín.	

<b>Lección 8. La circunferencia</b>	35
El recubridor exponencial de la circunferencia. Número de vueltas. Invarianza por homotopía de lazos. Cálculo del grupo fundamental de la circunferencia. El Teorema fundamental del Álgebra.	
<b>Lección 9. Teoremas de Borsuk-Hirsch</b>	39
Variantes de estos teoremas en dimensión 2: de paridad, de la aplicación impar, de coincidencias antipodales, de Lyusternik. Formulaciones en dimensión arbitraria y equivalencias diversas.	
<b>Lección 10. Teorema de invarianza del dominio</b>	42
Una aplicación continua localmente inyectiva del plano en sí mismo es abierta. Consecuencias en dimensión 2: invarianza de interiores y fronteras, invarianza del borde, invarianza de la dimensión. Validez en dimensión arbitraria.	
<b>Lección 11. Funtorialidad <i>aka</i> general non-sense</b>	45
El grupo fundamental como funtor: propiedades formales. Consecuencias: invarianza por homeomorfismo, retracciones. Invarianza del borde. Grupo fundamental de un producto. Ejemplos: el toro, el grupo de rotaciones de $\mathbb{R}^3$ .	
<b>Lección 12. Teoremas de Brouwer</b>	48
La circunferencia no es retracto del disco. Teorema del punto fijo. Ejemplos con un único punto fijo. Teorema de la esfera despeinada: no hay campos sin ceros en la esfera. Ejemplos con un único cero.	
<b>Lección 13. La esfera no es contráctil</b>	52
Campos tangentes a la esfera a lo largo de una aplicación continua. Campos tangentes independientes en la esfera. Traslación por homotopía de campos tangentes.	
<b>Lección 14. Separación del plano: cuadrivértices</b>	55
Cerrados que separan en el plano. Resultados iniciales sencillos. La engañosa evidencia de muchos resultados delicados. El lema del cuadrivértice.	
<b>Lección 15. Grado de Brouwer-Kronecker</b>	58
Grado de una aplicación entre circunferencias. Ejemplos: la identidad, la antipodal, las simetrías. Reformulación del teorema de paridad de Borsuk-Hirsch. Multiplicatividad. Conservación de la orientación. Teorema de Brouwer-Hopf.	
<b>Lección 16. Retractos de deformación</b>	62
Retractos de deformación fuerte. Espacios fuertemente contráctiles. Deformaciones por interpolación lineal. El isomorfismo inducido entre grupos fundamentales. Espacios agujereados, cilindro, banda de Moebius.	

<b>Lección 17. Separación del plano: arcos</b>	69
Arcos que separan y no separan el plano. El lema del arco. Arcos de Osgood, arcos con área positiva. Fractales.	
<b>Lección 18. Bouquets finitos</b>	71
Bouquets finitos. Deformaciones de la identidad de un bouquet. Cálculo del grupo fundamental: representación de un lazo del bouquet como producto de lazos de los pétalos y carencia de relaciones.	
<b>Lección 19. Puntos singulares</b>	77
Bases de entornos agujerados de un punto del plano. Grupo fundamental de entornos agujerados. Invarianza de la dimensión. Puntos singulares.	
<b>Lección 20. El teorema de la curva de Jordan</b>	82
Interior y exterior de una curva de Jordan, dominio de Jordan. Demostración del teorema a partir del lema del cuadrivértice y del lema del arco.	
<b>Lección 21. Variantes del teorema de Jordan</b>	87
El teorema de Jordan en la esfera. El teorema de Jordan para arcos cerrados sin borde. Un disco topológico no desconecta.	
<b>Lección 22. El teorema de Schoenflies</b>	88
El enunciado y su generalidad. Otras formulaciones más débiles (aparentemente). Consecuencias adicionales de separación.	
<b>Lección 23. Schoenflies para poligonales</b>	92
Demostración para curvas de Jordan poligonales. Exhaustión del disco por una sucesión encajada de dominios de Jordan poligonales.	
<b>Lección 24. El lema de aproximación poligonal</b>	97
Poligonales de lados paralelos a los ejes. Entornos unión de cuadrados abiertos, frontera de esos entornos. Aproximación poligonal de un arco.	
<b>Lección 25. Embaldosado de un dominio de Jordan</b>	102
Cuerdas. Accesibilidad lineal. Cuerdas poligonales. Aproximación. Exhaustión de un dominio de Jordan por una sucesión encajada de dominios de Jordan poligonales.	
<b>Lección 26. Prueba del teorema de Schoenflies</b>	108
Homeomorfismos entre abiertos de embaldosados poligonales del disco y de un dominio de Jordan. Pegados de esos homeomorfismos y límite de los pegados en el borde del disco.	
<b>Lección 27. Interludio complejo</b>	111
El teorema de la aplicación conforme de Riemann y el teorema de Carathéodory. Relaciones con los teoremas de Jordan y de Schoenflies.	

<b>Lección 28. El teorema del anillo</b>	113
Región encerrada por dos curvas de Jordan, una en el interior de la otra. Descripción del tipo topológico por subdivisión. Extensión de homeomorfismos entre pares de curvas de Jordan.	
<b>Lección 29. Jordan-Schoenflies en el plano proyectivo</b>	116
Validez de los teoremas de Jordan y Schoenflies en otras superficies. Posibles problemas alternativos. Solución en el plano proyectivo real.	
<b>Lección 30. Construcción de superficies</b>	121
Superficies. La esfera $S^2$ , el toro $T^2$ , el plano proyectivo real $\mathbb{P}^2$ y la botella de Klein $\mathbb{K}^2$ . Sumas conexas. La relación fundamental $\mathbb{P}^2 \# T^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{K}^2$ .	
<b>Lección 31. El teorema de clasificación de superficies</b>	130
Enunciado del teorema. Distinción de superficies: el grupo fundamental, el primer grupo de homología, orientabilidad, el número de Betti, la característica de Euler, la dimensión de inmersión.	
<b>Referencias</b>	137
<b>Símbolos</b>	139
<b>Índice</b>	141