

Variedades afines

En este capítulo se introduce el *espacio afín* mediante *acciones vectoriales*. Se definen sus subespacios o *variedades afines*, y se describen sus *posiciones relativas*, en especial el *paralelismo*. Se introducen los *puntos de infinito*. Se analizan las intersección y la generación de variedades afines. Se define la *dimensión* y se prueba la *fórmula de Grassmann*.

1. El espacio afín

En todo lo que sigue, consideramos un cuerpo base $\mathbb{K}$ de característica cero, que para nosotros siempre será el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales o el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. La primera definición es la siguiente:

Definición 1.1. Un *espacio afín* (sobre $\mathbb{K}$) es un conjunto no vacío X equipado con una *acción vectorial* γ , que es una aplicación

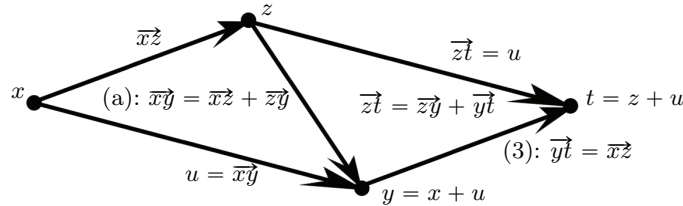
$$\gamma : X \times X \rightarrow \vec{X} : (x, y) \mapsto \gamma(x, y) = \overrightarrow{xy},$$

con valores en un espacio vectorial $\vec{X}$ sobre $\mathbb{K}$, tal que:

- (a) Se cumple $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{xz} + \overrightarrow{zy}$ para cualesquiera $x, y, z \in X$, y
- (b) La aplicación $\gamma_x : X \rightarrow \vec{X} : y \mapsto \overrightarrow{xy}$ es biyectiva para algún $x \in X$.

Los elementos de X son los *puntos* y los vectores de $\vec{X}$ son las *direcciones*. Dados dos puntos $x, y \in X$ y el correspondiente vector $u = \overrightarrow{xy}$, diremos que x es el *origen de u* e y es el *extremo de u* ; la igualdad $u = \overrightarrow{xy}$ se escribe también $y = x + u$, operación que se denomina *traslación*.

La figura siguiente representa la propiedad (a) de la definición anterior y la observación 1.2(3) que veremos a continuación.



De la primera de las condiciones de esta definición se deducen inmediatamente varias propiedades naturales:

Observaciones 1.2. Sea X un espacio afín.

(1) Para cualquier punto $x \in X$ se cumple $\overrightarrow{xx} = 0$.

En efecto, la propiedad (a) para $x = y = z$ dice que $\overrightarrow{xx} = \overrightarrow{xx} + \overrightarrow{xx}$, luego $\overrightarrow{xx} = 0$.

(2) Dados $x, y \in X$, es $\overrightarrow{yx} = -\overrightarrow{xy}$.

De nuevo por (a), ahora cuando $y = x$, resulta $\overrightarrow{xx} = \overrightarrow{xz} + \overrightarrow{zx}$, y como $\overrightarrow{xx} = 0$, concluimos que los vectores $\overrightarrow{xz}$ y $\overrightarrow{zx}$ son opuestos.

(3) Dados cuatro puntos $x, y, z, t \in X$, si $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{zt}$, entonces $\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{yt}$.

Aplicando dos veces (a) deducimos:

$$\overrightarrow{xz} + \overrightarrow{zt} = \overrightarrow{xt} = \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yt},$$

de modo que si $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{zt}$, restando este vector en ambos miembros queda $\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{yt}$. ■

La condición (b) de la definición de espacio afín tiene el inconveniente de ser existencial, de modo que su comprobación parece requerir una exploración incierta. Pero esto es sólo aparente:

Proposición 1.3. Sea X un espacio afín y γ su acción vectorial. Entonces la aplicación $\gamma_x : y \mapsto \overrightarrow{xy}$ es biyectiva para todo $x \in X$.

Demostración. Sabemos que existe un punto $a \in X$ tal que la aplicación $\gamma_a : y \mapsto \overrightarrow{ay}$ es biyectiva, y debemos deducir lo mismo para cualquier $x \in X$.

Veamos primero que $\gamma_x : X \rightarrow \overrightarrow{X}$ es suprayectiva. Sea $u \in \overrightarrow{X}$, y consideremos el vector $\overrightarrow{ax} + u$. Por ser γ_a suprayectiva, existe $y \in X$ tal que $\overrightarrow{ax} + u = \overrightarrow{ay}$. Obtenemos:

$$u = \overrightarrow{ay} - \overrightarrow{ax} = \overrightarrow{xa} + \overrightarrow{ay} = \overrightarrow{xy} = \gamma_x(y).$$

Vista así la suprayectividad, pasemos a la inyectividad. Supongamos $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{xz}$. Entonces

$$\overrightarrow{xa} + \overrightarrow{ay} = \overrightarrow{xy} = \overrightarrow{xz} = \overrightarrow{xa} + \overrightarrow{az},$$

con lo que $\overrightarrow{ay} = \overrightarrow{az}$ y por ser γ_a inyectiva concluimos $y = z$. ■

El modelo fundamental de espacio afín es el *espacio afín estándar* que denotamos $\mathbb{A}^n$, y está definido como sigue: (i) el conjunto X es $\mathbb{K}^n$, pero despojado de cualquier estructura, simplemente como conjunto de puntos, (ii) el espacio vectorial de direcciones $\overrightarrow{X}$ es $\mathbb{K}^n$, ahora sí considerado como espacio vectorial, y (iii) la acción vectorial es

$$\gamma(x, y) = \overrightarrow{xy} = y - x,$$

la resta hecha en el espacio vectorial $\mathbb{K}^n$. En esta definición los elementos de $\mathbb{K}^n = \mathbb{A}^n = \overrightarrow{\mathbb{A}^n}$ se contemplan a veces como puntos, a veces como vectores: en lo que acabamos de escribir, $y - x$ es un vector, pero x e y son puntos. Aunque el rigor matemático parece requerir escribir siempre $\mathbb{A}^n$ para denotar el espacio afín y $\overrightarrow{\mathbb{A}^n}$ para denotar el espacio vectorial, muy frecuentemente escribiremos $\mathbb{K}^n$ tanto para el espacio afín como para el vectorial, dejando al contexto aclarar a cuál nos referimos. Este ejercicio de ambigüedad (como en prob.I.8, p.11) es muy provechoso una vez asimilado; lo remarcaremos más en I.2.2, p.4 y en otras ocasiones que lo aconsejen.

Veremos más adelante que este espacio estándar es el modelo universal de espacio afín.

2. Variedades afines

La noción de subespacio de un espacio afín es la siguiente:

Definición 2.1. Sea X un espacio afín sobre $\mathbb{K}$. Una *variedad afín* de X es un subconjunto no vacío $Y \subset X$ en el que la acción vectorial de X induce por restricción una estructura de espacio afín.

Aunque es una trivialidad, señalemos que el propio X es un variedad afín. Se suele calificar de *ambiente*.

Analicemos lo que la definición significa. Sea $\gamma : X \times X \rightarrow \overrightarrow{X}$ la acción vectorial de X , y consideremos su restricción

$$\gamma|_{Y \times Y} : Y \times Y \rightarrow \gamma(Y \times Y) : (x, y) \mapsto \gamma(x, y) = \overrightarrow{xy}.$$

Dejemos de momento la condición de que $\gamma|_{Y \times Y}$ tome valores en un espacio vectorial, y veamos como se expresan con las condiciones (a) y (b). La primera condición se cumple para cualesquiera puntos de X , luego en particular para

cualesquiera $x, y, z \in Y$. En cuanto a la segunda, como $Y \neq \emptyset$, tomemos un punto $a \in Y$. Como la aplicación $\gamma_a : X \rightarrow \vec{X}$ es biyectiva, su restricción a Y es inyectiva, y prescribiendo su imagen, obtenemos una biyección

$$\gamma_a|_Y : Y \rightarrow \gamma_a(Y) = \{u = \vec{a}z : z \in Y\}.$$

Tenemos pues $Y = a + \gamma_a(Y)$, y para que Y sea una variedad afín, es necesario que el conjunto $\gamma_a(Y)$ sea un subespacio vectorial de $\vec{X}$. Pero, además, esa condición es suficiente. En efecto, basta ver que si $\gamma_a(Y)$ es un subespacio vectorial, entonces

$$\gamma(Y \times Y) = \gamma_a(Y).$$

Pero si $x, y \in Y$, tenemos

$$\vec{xy} = \vec{xa} + \vec{ay} = -\vec{ax} + \vec{ay} \in \gamma_a(Y),$$

por estar suponiendo que $\gamma_a(Y)$ es subespacio vectorial.

Acabamos pues de demostrar que *un subconjunto $Y \subset X$ es una variedad afín si y sólo si los vectores $\vec{az}, z \in Y$, constituyen un subespacio vectorial de $\vec{X}$* , que será el espacio de direcciones o *dirección* $\vec{Y}$ de Y . Otra forma de decir esto es que el subconjunto Y se puede escribir como $Y = a + V$ para un subespacio vectorial V de $\vec{X}$. Claramente $\vec{a} + \vec{V} = V$ está completamente determinado por Y .

Sean $Z \subset Y$ son dos variedades afines. Como cualquier punto a de Z es un punto de Y , tenemos $\vec{Z} = \gamma_a(Z) \subset \gamma_a(Y) = \vec{Y}$. Esto se deduce también de que Z es una variedad afín *del espacio afín* Y , luego $\vec{Z}$ es un subespacio vectorial del espacio de direcciones $\vec{Y}$ de Y . Si tenemos $\vec{Z} = \vec{Y}$, entonces $Z = a + \vec{Z} = a + \vec{Y} = Y$.

Observación 2.2. Acabamos de describir las variedades afines como las *traslaciones* $Y = a + V$ de los subespacios vectoriales. Esta sugerente terminología es literal en el caso del espacio afín estándar $\mathbb{A}^n = \mathbb{K}^n$. Sea $Y \subset \mathbb{K}^n$ una variedad afín y $V = \vec{Y}$ su espacio de direcciones. Para cualquier punto $a \in Y$, tenemos:

$$\begin{aligned} y = a + \vec{ay} \in Y & \quad \text{si y sólo si} \quad \vec{ay} \in V, \\ & \quad \text{si y sólo si} \quad y - a \in V, \\ & \quad \text{si y sólo si} \quad y \in a + V. \end{aligned}$$

Por tanto, las igualdades

$$Y = \{a + u : u \in V\} = a + V, \quad \vec{Y} = V = -a + Y$$

representan lo que parece: suma en $\mathbb{K}^n$. En particular, si Y pasa por $(0, \dots, 0)$ podemos tomar $a = (0, \dots, 0)$, y tenemos $Y = \vec{Y}$.

Como hemos dicho el espacio afín estándar $\mathbb{K}^n$ es el modelo de todos los demás, la manera natural de calcular que acabamos de describir debe valer en un afín X arbitrario. Y de hecho vale, una vez hayamos introducido las *coordenadas* en X . ■

Debe advertirse que los puntos son variedades afines con dirección $\{0\}$.

(2.3) Posiciones relativas de dos variedades afines. Dos variedades afines Y, Z de X pueden cortarse o no, en cuyo caso se pueden dar diversas *incidencias*. Si $Y \cap Z = \emptyset$, nosotros distinguiremos dos extremas: (i) si uno de los espacios de direcciones $\vec{Y}, \vec{Z}$ está contenido en el otro, diremos que Y y Z son *paralelos*, y (ii) si $\vec{Y} \cap \vec{Z} = \{0\}$ diremos que Y y Z *se cruzan*. Obsérvese que entre la intersección nula y el contenido hay muchas posibilidades, tantas más cuanto mayor sea X . ■

(2.4) Puntos de infinito. (1) El concepto de paralelismo es específico del espacio afín, pero conduce inevitablemente al concepto de *punto de infinito*, que es específico del *espacio proyectivo*. Aquí nos limitamos a la siguiente justificación heurística. Un punto de infinito puede entenderse como el punto en el que intersecarían dos rectas paralelas. Lo que comparten las rectas paralelas es la dirección, luego podemos considerar esa dirección como el punto de infinito en cuestión. Así pues, los puntos de infinito de X son las direcciones de $\vec{X}$. Para representar una dirección vale cualquier vector no nulo que la genere. Digámoslo una vez más: el punto de infinito de la recta $r = a + L[u]$ es la dirección $\vec{r} = L[u] \subset \vec{X}$, dirección representada por el vector $u \neq 0$. Denotaremos el punto de infinito por $[u]$.

(2) Lo mismo que para rectas diremos para cualquier variedad afín $Y \subset X$: sus puntos de infinito son las direcciones de $\vec{Y}$, que no son más que las direcciones de todas las rectas paralelas a Y . Según esto, dos variedades afines Y, Z que no se cortan: (i) son paralelas si los puntos de infinito de una son puntos de infinito de la otra, y (ii) se cruzan si no tienen ningún punto de infinito común. ■

3. Operaciones con variedades afines

Sea X un espacio afín sobre $\mathbb{K}$ con espacio de direcciones $\vec{X}$. Veamos qué operaciones hacer con variedades afines. La primera no tiene dificultad:

(3.1) Intersección de variedades afines. Sea $(Y_i : i \in I)$ una familia de variedades afines. Si la intersección $Y = \bigcap_i Y_i$ es no vacía, entonces es una variedad afín con dirección

$$\vec{Y} = \bigcap_i \vec{Y}_i.$$

En efecto, sea $a \in Y$. Entonces $Y_i = a + Y_i$ para todo i , y se comprueba que

$$Y = a + \bigcap_i \vec{Y}_i,$$

lo que implica la afirmación anterior. ■

Una vez visto esto, podemos definir:

Definición 3.2. Sea $A \subset X$ un conjunto no vacío arbitrario. La intersección $V(A) = \bigcap_{Y \supset A} Y$ de todas las variedades afines Y de X en las que está contenido A se denomina *variedad afín generado por A* .

Por lo anterior, $V(A)$ es efectivamente una variedad afín, la menor que contiene a A , y su dirección se puede expresar como sigue: si $a \in A$ es un punto cualquiera de A , entonces

$$\overrightarrow{V(A)} = L[\vec{ax} : x \in A].$$

En efecto, $\overrightarrow{V(A)}$ contiene todos los vectores que unen puntos suyos, en particular, puntos de A , de lo que se sigue el contenido de derecha a izquierda. Para el otro veamos que $V(A)$ está contenido en la variedad afín $Y = a + L[\vec{ax} : x \in A]$. Esto se deducirá de que Y contiene a A : si $b \in A$, entonces

$$b = a + \vec{ab} \in a + L[\vec{ax} : x \in A] = Y.$$

Un caso particular importante es cuando A es la unión de dos variedades afines $Y, Z \subset X$, en cuyo caso denotamos $V(A) = V(Y, Z)$. Se tiene

Proposición 3.3. Consideremos dos puntos $a \in Y$, $b \in Z$. La dirección de la variedad afín $V(Y, Z)$ generada por Y y Z es

$$\overrightarrow{V(Y, Z)} = L[\vec{ab}] + \vec{Y} + \vec{Z}.$$

Si Y y Z no se cortan, entonces $L[\vec{ab}] \cap (\vec{Y} + \vec{Z}) = \{0\}$.

Demostración. Como $V(Y, Z)$ contiene los dos puntos a y b , el espacio de direcciones $\overrightarrow{V(Y, Z)}$ contiene al vector $\overrightarrow{ab}$. Como ese espacio de direcciones también contiene a $\overrightarrow{Y}$ y a $\overrightarrow{Z}$, deducimos el contenido de derecha a izquierda. Para el otro, basta probar que $V(Y, Z)$ está contenida en la variedad afín $T = a + L[\overrightarrow{ab}] + \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}$, viendo que esa variedad T contiene a Y y a Z . Si $y \in Y$ tenemos

$$y = a + \overrightarrow{ay} \in a + \overrightarrow{Y} \subset a + L[\overrightarrow{ab}] + \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z} = T,$$

y si $z \in Z$ tenemos

$$z = a + \overrightarrow{az} = a + \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bz} \in a + L[\overrightarrow{ab}] + \overrightarrow{Z} \subset a + L[\overrightarrow{ab}] + \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z} = T.$$

Ahora supongamos que $L[\overrightarrow{ab}] \cap (\overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}) \neq \{0\}$. Entonces necesariamente $\overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}$, de manera que existen puntos $y \in Y$, $z \in Z$ tales que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ay} + \overrightarrow{bz}$. Resulta:

$$y = a + \overrightarrow{ay} = a + \overrightarrow{ab} - \overrightarrow{bz} = b - \overrightarrow{bz} \in b + \overrightarrow{Z} = Z,$$

y por tanto $y \in Y \cap Z$. Esto prueba la afirmación final del enunciado. ■

4. Dimensión e incidencia

Sea X un espacio afín. Hasta ahora no hemos dicho nada de dimensiones, pero en lo sucesivo supondremos siempre que $\overrightarrow{X}$ es de tipo finito, y por definición la *dimensión de X* , que denotamos $\dim(X)$, es la de $\overrightarrow{X}$; sea $n = \dim(X) = \dim(\overrightarrow{X})$. Si X se reduce a un punto, entonces tiene dimensión 0; si X tiene dimensión 1, se llama *recta afín*, y si tiene dimensión 2 se llama *plano afín*.

Toda variedad afín $Y \subset X$ tiene espacio de direcciones $\overrightarrow{Y} \subset \overrightarrow{X}$ también de tipo finito, y con dimensión $\dim(Y) = \dim(\overrightarrow{Y}) \leq \dim(\overrightarrow{X}) = n$. La *codimensión* de Y en X es

$$\text{codim}(Y) = \dim(X) - \dim(Y) = \dim(\overrightarrow{X}) - \dim(\overrightarrow{Y}) = \text{codim}(\overrightarrow{Y}).$$

Como es habitual, un *hiperplano afín* es una variedad afín de codimensión 1.

La dimensión es importante al considerar las incidencias de variedades. Por ejemplo, si dos variedades $Y, Z \subset X$ de la misma dimensión son paralelas, entonces $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{Z}$, pues esas direcciones tienen igual dimensión y una está contenida en la otra. Más adelante veremos más ejemplos.

Dos puntos distintos $a, b \in X$ generan una recta afín, pues

$$V(a, b) = a + L[\overrightarrow{ab}] \quad \text{con } \overrightarrow{ab} \neq 0.$$

Decimos que tres puntos distintos $a, b, c \in X$ están *alineados* si uno de ellos pertenece a la recta que generan los otros dos.

El resultado básico sobre dimensiones de variedades afines es la siguiente *fórmula de incidencia de Grassmann*:

Proposición 4.1. Sean $Y, Z \subset X$ variedades afines. Entonces

$$\dim(V(Y, Z)) = \dim(Y) + \dim(Z) - \dim(\overrightarrow{Y} \cap \overrightarrow{Z}) + k, \quad k = \begin{cases} 0 & \text{si } Y \cap Z \neq \emptyset. \\ 1 & \text{si } Y \cap Z = \emptyset. \end{cases}$$

Demostración. Como sabemos, dados dos puntos $a \in Y, b \in Z$, es

$$\overrightarrow{V(Y, Z)} = L[\overrightarrow{ab}] + \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \dim(V(Y, Z)) &= \dim(L[\overrightarrow{ab}] + \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}) \\ &= \dim(L[\overrightarrow{ab}]) + \dim(\overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}) - \dim(L[\overrightarrow{ab}] \cap (\overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z})) \\ &= \dim(\overrightarrow{Y}) + \dim(\overrightarrow{Z}) - \dim(\overrightarrow{Y} \cap \overrightarrow{Z}) \\ &\quad + \dim(L[\overrightarrow{ab}]) - \dim(L[\overrightarrow{ab}] \cap (\overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z})) \\ &= \dim(Y) + \dim(Z) - \dim(\overrightarrow{Y} \cap \overrightarrow{Z}) \\ &\quad + \dim(L[\overrightarrow{ab}]) - \dim(L[\overrightarrow{ab}] \cap (\overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z})). \end{aligned}$$

Para terminar observamos que: (i) si Y y Z se cortan, podemos tomar $a = b$, y los dos últimos sumandos valen 0, y (ii) si Y y Z no se cortan, el último sumando es 0 y el penúltimo 1. ■

Observaciones 4.2. (1) En el caso $Y \cap Z \neq \emptyset$ la fórmula de incidencia se puede escribir sin direcciones y queda como para espacios vectoriales:

$$\dim(V(Y, Z)) = \dim(Y) + \dim(Z) - \dim(Y \cap Z).$$

En efecto, se tiene $\overrightarrow{Y \cap Z} = \overrightarrow{Y} \cap \overrightarrow{Z}$ y $\dim(Y \cap Z) = \dim(\overrightarrow{Y \cap Z})$.

(2) Para que dos variedades Y, Z de X se crucen, la suma de sus dimensiones debe ser estrictamente menor que la dimensión de X .

En efecto, si se cruzan, la fórmula de Grassmann dice que

$$\begin{aligned}\dim(X) &\geq \dim(V(Y, Z)) = \dim(Y) + \dim(Z) - \dim(\vec{Y} \cap \vec{Z}) + 1 \\ &= \dim(Y) + \dim(Z) - 0 + 1 > \dim(Y) + \dim(Z).\end{aligned}$$

Por ejemplo, la menor dimensión (del espacio afín ambiente) en que dos planos se cruzan es 5. ■

Como ilustración, veamos cuáles son las posibles posiciones relativas de rectas e hiperplanos en un espacio afín.

Ejemplos 4.3. Sea X un espacio afín de dimensión n .

(1) Un hiperplano de X y un punto fuera de él generan X .

En efecto, sea Y un hiperplano y $a \in X \setminus Y$. Entonces $V(a, Y) \supset Y$, luego la dimensión de $V(a, Y)$ es n , y $V(a, Y) = X$. También podemos usar la fórmula de Grassmann:

$$\begin{aligned}\dim(V(a, Y)) &= \dim(\{a\}) + \dim(Y) - \dim(\{0\} \cap \vec{Y}) + 1 \\ &= 0 + (n - 1) - 0 + 1 = n.\end{aligned}$$

(2) Dos rectas distintas de X pueden cortarse en un punto, ser paralelas o cruzarse. En los dos primeros casos generan un plano, y en el tercero generan una variedad afín de dimensión 3 de X (así, dos rectas del plano afín no pueden cruzarse).

Sean r y s dos rectas distintas de X . La dimensión de $\vec{r} \cap \vec{s}$ es 0 o 1. En el primer caso la fórmula de Grassmann dice que la dimensión de la variedad generada por las dos rectas es: (i) 2 si se cortan, (ii) 3 si no se cortan. Es decir, las dos rectas se cortan y generan un plano, o se cruzan y generan una variedad de dimensión 3. El caso que queda es que $\vec{r} = \vec{s}$, y si pasaran por un mismo punto a , sería $r = a + \vec{r} = a + \vec{s} = s$. Por tanto, las rectas son paralelas.

(3) Dos hiperplanos distintos de X pueden ser paralelos o cortarse en una variedad afín de codimensión 2. En todo caso generan X .

Sean Y y Z dos hiperplanos distintos. La dimensión de $\vec{Y} \cap \vec{Z}$ puede ser $n - 1$ o $n - 2$. En el primer caso, $\vec{Y} = \vec{Z}$ y los planos son paralelos (si se cortaran en un punto a serían iguales: $Y = a + \vec{Y} = a + \vec{Z} = Z$). En el segundo caso, de la fórmula de Grassmann resulta

$$n \geq \dim(V(Y, Z)) = (n - 1) + (n - 1) - (n - 2) + k = n + k,$$

luego $k = 0$, la intersección de los hiperplanos tiene dimensión $n - 2$ y juntos generan X . Se dice que los hiperplanos *se cortan en dimensión $n - 2$* .

(4) Una recta y un hiperplano de X que no la contenga pueden cortarse en un punto o ser paralelos. En todo caso generan X . ■

Sean r e Y una recta y un hiperplano de X . Una vez más miramos la dimensión d de la intersección $\overrightarrow{r} \cap \overrightarrow{Y}$, que puede ser 0 o 1, y aplicamos la formula de Grassmann:

$$n \geq \dim(V(r, Y)) = 1 + (n - 1) - d + k = n - d + k.$$

Si $d = 0$, entonces $k = 0$, y la recta y el hiperplano se cortan en un punto. Si $d = 1$ y $k = 1$, entonces la recta y el hiperplano son paralelos. En estos dos casos, la recta y el hiperplano generan X . En fin, si $d = 1$ y $k = 0$, entonces la recta y el hiperplano se cortan en algún punto a , y $r = a + \overrightarrow{r} \subset a + \overrightarrow{Y} = Y$, contra la hipótesis. ■

Problemas

Número 1. ¿Es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ una variedad afín de $\mathbb{K}^2$? ¿Y la parábola $y = x^2$?

Número 2. Probar que dos variedades Y, Z de un espacio afín X se cortan si y sólo si $\overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}$ contiene todos los vectores $\overrightarrow{yz}$ con $y \in Y, z \in Z$.

Número 3. ¿Cuál es la menor dimensión en que pueden cruzarse dos variedades afines de dimensiones r y s ?

Número 4. Formular y probar el siguiente hecho bien conocido de la Geometría Elemental: *si los lados opuestos de un cuadrilátero son paralelos, entonces dos lados opuestos son iguales.*

Número 5. Sea X un espacio afín de dimensión ≥ 3 . Demostrar que:

- (a) Un punto y una recta que no pasa por él generan un plano.
- (b) Dos rectas que se cortan en un punto generan un plano.

Número 6. Sea Y una variedad del espacio afín estándar $\mathbb{K}^n$. Demostrar que $a + Y, a \in \mathbb{K}^n$, son todas las variedades paralelas a Y y de la misma dimensión que ella.

Número 7. Demostrar que una variedad afín Y de un espacio afín X es un

hiperplano si y sólo si para toda variedad $Z \subset X$ o bien Z es paralela a Y o bien $Z \cap Y \neq \emptyset$.

Número 8. Sea H subconjunto de $\mathbb{K}^n = \mathbb{A}^n$ que no contiene a $(0, \dots, 0)$. Demostrar que H es un hiperplano afín si y sólo si existe una forma lineal $h : \mathbb{K}^n = \overline{\mathbb{A}}^n \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $H = h^{-1}(1)$. Identificar $\overline{H}$ en ese caso. ¿Qué ocurre si $(0, \dots, 0) \in H$?

Número 9. Sean Y, Z variedades de un espacio afín X de dimensión n , distintas y de la misma dimensión. Probar que Y y Z son paralelas si y sólo si no se cortan y son ambas hiperplanos en otra variedad $T \subset X$.

Número 10. Se consideran en un espacio afín dos rectas L y L' que se cortan en un punto, y seis puntos $a, b, c \in L$, $a', b', c' \in L'$ tales que las rectas $V(a, b')$, $V(b, c')$ son paralelas a las rectas $V(b, a')$, $V(c, b')$ respectivamente. Probar que entonces la recta $V(a, a')$ es paralela a $V(c, c')$.