Capítulo 1

Teoría de conjuntos

Dado que la topología utilizada en este libro es básicamente de conjuntos, empezaremos con un capítulo que servirá para comprender los conceptos más esenciales de los mismos. No obstante, para nuestros propósitos no es necesario tratarlos con todo el rigor que reciben desde la lógica matemática. Por otra parte, si se desea ampliar la teoría de conjuntos aquí expuesta recomendamos consultar el accesible y breve libro de Vereshchagin (ver [24]) que incluye muchos ejercicios, o bien el texto de Kaplansky (ver [8]) cuyo material abarca además el siguiente capítulo dedicado a los espacios métricos, mientras que en español podemos mencionar el clásico y mucho más amplio libro de Baldor ([4]), responsable de la formación algebraica en muchas universidades latinoamericanas. Por supuesto, al igual que el nuestro, libros de Topología como [10, 15] dedican un capítulo a este contenido, pero para profundizar realmente en teoría de conjuntos aconsejamos recurrir al texto de Enderton ([20]), nuevamente escrito en inglés.

1.1. Conceptos básicos

Partimos de que el lector conoce la noción de *conjunto* como entidad formada por *elementos* , pese a que en Matemáticas dichas definiciones responden a una serie de axiomas cuidadosamente escogidos para no caer en contradicciones.

Definición 1.1.1. Diremos que un elemento a *pertenece* a un conjunto A, denotado $a \in A$, si forma parte del mismo. En caso contrario, si a no pertenece al conjunto A, se denota $a \notin A$.

Si un conjunto consta de pocos elementos se puede expresar mencionando explícitamente cuáles son del modo

$$A = \{a, b, c\}.$$

Las llaves plasman la consabida idea de que el conjunto A es una "caja" que contiene "cosas" que son sus elementos (o más bien, los elementos que lo forman). En el caso de que el conjunto solo conste de un elemento lo denominaremos *conjunto unipuntual* . Si un elemento no pertenece al conjunto, no estará en la "caja", por ejemplo $d \notin A$.

Usualmente un conjunto lo forman los elementos que cumplen una propiedad (o varias a la vez), y en ese caso el conjunto se expresa con un elemento genérico e indicando la propiedad o propiedades que cumple.

Ejemplo 1.1.1. *Las siguientes formulaciones*

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq z \leq 4, z \in \mathbb{Z}\}$$

$$A = \{z \in \mathbb{Z} : 0 \leq z \leq 4\}$$

dan el mismo conjunto. Nótese que las dos últimas muestran qué propiedades cumplen los elementos de A y, como se ha comentado, son las que normalmente se utilizan cuando el conjunto contiene infinitos elementos.

Definición 1.1.2. Si todo elemento de un conjunto A' está en otro conjunto A se dice que A' es *subconjunto de* A, representado como $A' \subset A$.

Dos elementos son *iguales*, $a = b$, si ambas letras representan al mismo. En caso contrario lo denotamos $a \neq b$. La misma idea sirve para dos conjuntos A, B, de forma que si $A \subset B$ y $B \subset A$ es $A = B$, es decir, ambos tienen los mismos elementos. Sin embargo si A posee algún elemento (es suficiente con uno) que B no tiene es $A \not\subset B$, por lo que $A \neq B$. Como $A = A$, tenemos en particular que siempre $A \subset A$, lo que por otra parte era lógico ya que todo elemento de A está trivialmente en A.

Definición 1.1.3. Dados dos conjuntos A, B, la *unión de A y B* es un nuevo conjunto $A \cup B$ que contiene los elementos de A así como los de B. Es decir,

$$A \cup B \coloneqq \{x : x \in A \text{ ó } x \in B\}.$$

Nota 1.1.2. *Aunque suponemos al lector familiarizado con la notación más básica, queremos comentar que el símbolo* $\coloneqq$, *cuya primera aparición en este libro es en la definición anterior, se utiliza únicamente al presentar un objeto matemático (un conjunto, una aplicación, etc.) para indicar de qué forma se define.*

Claramente, es el mismo conjunto $A \cup B$ que $B \cup A$, y se tiene que A, B son subconjuntos de $A \cup B$. Además es importante señalar que $x \in A$ ó $x \in B$ no necesariamente son posibilidades excluyentes, bien podría ser a la vez que x pertenece a A y a B. Este hecho sirve para dar la siguiente definición.

Definición 1.1.4. Dados dos conjuntos A, B, la *intersección de A y B* es el conjunto $A \cap B$ formado por los elementos que están a la vez en ambos conjuntos, por lo que

$$A \cap B \coloneqq \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Nuevamente se tiene que $A \cap B = B \cap A$ y $A \cap B$ es subconjunto tanto de A como de B.

Por tanto, tenemos que la conjunción "ó" abre la posibilidad a que un elemento esté en un solo conjunto o en los dos, mientras que "y" obliga a que simultáneamente pertenezca a ambos. En ocasiones dos conjuntos A, B son tan distintos que no tienen ningún elemento en común, y en dicho caso $A \cap B$ es un conjunto que pasamos a definir.

Definición 1.1.5. Llamamos *conjunto vacío* , denotado $\emptyset$, a aquel formado por ningún elemento. Cuando la intersección de dos conjuntos A, B es el conjunto vacío, esto es, $A \cap B = \emptyset$, se dice que A y B son *disjuntos*.

De forma similar al importante papel que desempeña el cero en los números, el conjunto vacío es un concepto que ayuda notablemente a desarrollar la teoría de conjuntos. De hecho, la analogía va un poco más lejos, como veremos a continuación. Aunque pueda no tener sentido, por convenio se considera que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto y que su único subconjunto es él mismo. Es decir:

- Para todo conjunto A se cumple que $\emptyset \subset A$.
- Si un conjunto B satisface $B \subset \emptyset$ entonces debe ser $B = \emptyset$.

Si unir conjuntos es "sumarlos", existe una operación que hace de "resta" y que exponemos a continuación.

Definición 1.1.6. La *diferencia* de dos conjuntos A, B es el conjunto $A \setminus B$ formado por los elementos que están en A pero que no están en B. Es decir

$$A \setminus B \coloneqq \{x : x \in A, x \notin B\}.$$

Por definición, $A \setminus B \subset A$ y $B \not\subset A \setminus B$. Además, si A, B son disjuntos entonces $A \setminus B = A$ y $B \setminus A = B$. Para ayudar a comprender la naturaleza de los conjuntos y operaciones que hemos definido presentamos las siguientes figuras.

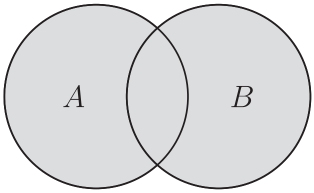

Figura 1.1: $A \cup B$.

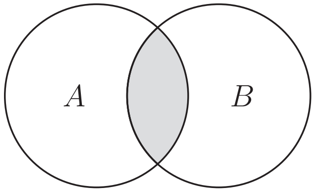

Figura 1.2: $A \cap B$.

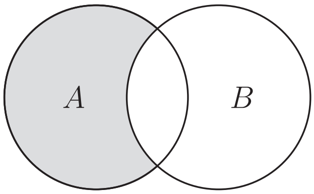

Figura 1.3: $A \setminus B$.

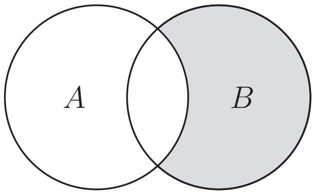

Figura 1.4: $B \setminus A$.

Es ahora cuando vemos que, análogamente al número cero (que no representa ningún valor o cantidad), el conjunto vacío juega un papel de neutro respecto a las "operaciones" unión y diferencia. Así, su unión o diferencia con cualquier conjunto A es el mismo conjunto A, ya que $\emptyset$ ni aporta ni suprime ningún elemento respecto a los que posea A, esto es,

$$A \cup \emptyset = A, \qquad A \setminus \emptyset = A.$$

Además la intersección del conjunto vacío con cualquier conjunto A no contiene ningún elemento ya que ambos no pueden tener nada en común (de hecho, el conjunto vacío no contiene nada), luego $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Puede comprobar el lector que, para dos conjuntos A, B, calcular la diferencia $A \setminus B$ equivale a hallar la diferencia $A \setminus (A \cap B)$, pues $A \cap B$ es la única parte de B que se puede suprimir a A, luego $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$. Recordemos que $A \cap B$ es subconjunto de A, por lo que surge el siguiente concepto.

Definición 1.1.7. Dado un conjunto A y un subconjunto suyo A' decimos que $A \setminus A'$ es el *complementario de A' en A*, esto es, son los elementos que le "faltan" a A' para ser igual a A. Cuando no haya confusión posible, el complementario de un conjunto A se denota A^c.

De forma más general, si tenemos un segundo subconjunto $A'' \subset A$ podemos calcular $A' \setminus A''$ y $A'' \setminus A'$, ya que tanto A' como A'' están en un mismo conjunto A, aunque ninguno sea subconjunto del otro. Observemos que para hablar del complementario siempre hemos de especificar respecto de qué conjunto lo es y en dónde se considera.

Existe una expresión que relaciona el complementario de un conjunto con la diferencia, pues ambos conceptos abarcan la misma idea. En efecto, si A' es subconjunto de A se tiene que

$$A \setminus A' = A \cap (A')^c$$

y es un buen ejercicio comprobarlo.

Ejemplo 1.1.3. *Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, y sea $A' = \{3\} \subset A$. Entonces*

$$A \setminus A' = A \cap (A')^c = \{1, 2\}.$$

Dado otro subconjunto $A'' = \{1, 3\}$, entonces

$$A \setminus A'' = \{1, 2, 3\} \setminus \{1, 3\} = \{2\},$$
$$A'' \setminus A' = \{1, 3\} \setminus \{3\} = \{1\},$$

que coinciden respectivamente con

$$A \cap (A'')^c = \{1, 2, 3\} \cap \{2\} = \{2\},$$
$$A'' \cap (A')^c = \{1, 3\} \cap \{1, 2\} = \{1\}.$$

Combinando uniones, intersecciones y diferencias de conjuntos podemos obtener nuevos conjuntos. Normalmente el orden en que se realizan dichas operaciones importa ya que condiciona el resultado, como vemos en las siguientes figuras.

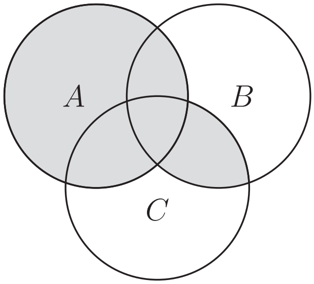

Figura 1.5: $A \cup (B \cap C)$.

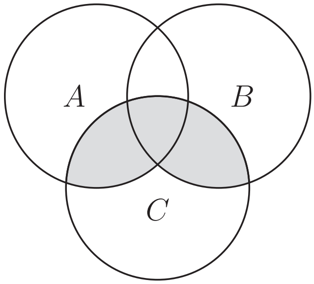

Figura 1.6: $(A \cup B) \cap C$.

No obstante, en el caso de que un mismo conjunto se pueda obtener siguiendo un orden u otro en las operaciones permite establecer una *ley* en la teoría de conjuntos. Ya hemos visto las *leyes de conmutatividad* (tras Definición 1.1.3 y Definición 1.1.4) que afirman que para dos conjuntos A, B se cumple

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$A \cap B = B \cap A.$$

Igualmente tenemos las *leyes de distributividad* (respecto a la unión e intersección) para tres conjuntos cualesquiera A, B, C:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

La demostración de ambas leyes se dejan al lector (ver el ejercicio resuelto 1 y el ejercicio 2 de este capítulo).

Una de las leyes más usuales, y que usaremos en los siguientes capítulos, son las *leyes de De Morgan* , llamadas así por Augustus De Morgan (un resumen de su biografía aparece en Anexo 9.8.2).

Se pueden enunciar como “el complementario de la unión es la intersección de los complementarios” y “el complementario de la intersección es la unión de los complementarios”. Por tanto, para los conjuntos A, B, C se expresan como

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C),$$

o bien, más usualmente,

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Las Figuras 1.7 a 1.10 representan estas operaciones.

Al igual que con las leyes anteriores, es un buen ejercicio para el lector intentar probar estas. En cualquier caso su demostración se encuentra en Anexo 9.6.3.

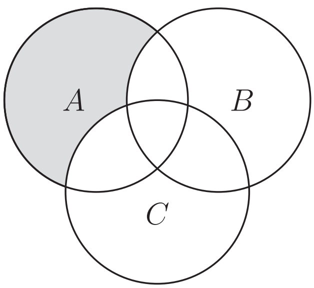

Figura 1.7: $A \setminus (B \cup C)$.

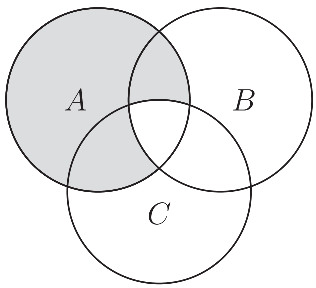

Figura 1.8: $A \setminus (B \cap C)$.

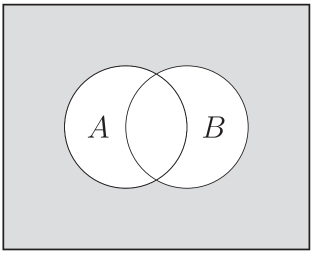

Figura 1.9: $(A \cup B)^c$.

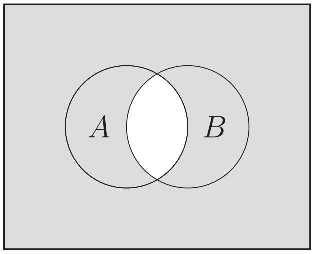

Figura 1.10: $(A \cap B)^c$.

Una forma de construir un conjunto que podríamos decir "de dimensión mayor" a partir de otros dos dados es la siguiente.

Definición 1.1.8. Sean A, B conjuntos. El *producto cartesiano de A por B* es el conjunto

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

donde los nuevos elementos (a, b) se llaman *pares ordenados*, siendo a la *primera coordenada* y b la *segunda coordenada*.

Ejemplo 1.1.4. *Sean los conjuntos $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b\}$. Entonces*

$$A \times B = \{(a_1, b), (a_2, b)\}.$$

Cuando se aplica el producto cartesiano de un conjunto A consigo mismo suele utilizarse la notación $A^2 := A \times A$.

Ejemplo 1.1.5. *El producto cartesiano de la recta real $\mathbb{R}$ consigo misma nos da el plano real*

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

que efectivamente es una dimensión mayor (como espacio vectorial) que $\mathbb{R}$.

Por supuesto, la construcción anterior se puede repetir iterativamente dando conjuntos cuyos elementos tendrán más coordenadas al modo

$$(A \times B) \times C = \{((a, b), c) : a \in A, b \in B, c \in C\},$$

y que por comodidad escribiremos como

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) : a \in A, b \in B, c \in C\},$$

obteniéndose así por ejemplo el espacio real tridimensional $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Para nuestros propósitos será suficiente realizar el producto cartesiano de solo dos conjuntos.

Para cerrar esta sección, recordaremos que los elementos de un conjunto pueden ser a priori arbitrarios, es decir, un conjunto A puede estar formado por elementos tomados al azar sin ningún criterio, por ejemplo $A = \left\{1, -\sqrt{2}, \frac{5}{3}, \pi\right\}$. En este sentido está el hecho de que un conjunto puede contener incluso otros conjuntos, dándonos la siguiente definición.

Definición 1.1.9. Decimos que un conjunto $\mathcal{C}$ es una *colección* o *familia de conjuntos* si sus elementos son conjuntos.

Ejemplo 1.1.6. *Sean $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b\}$ conjuntos. Entonces la colección de los conjuntos A, B es un nuevo conjunto*

$$\mathcal{C} = \{A, B\} = \{\{a_1, a_2\}, \{b\}\}.$$

Análogamente al concepto de subconjunto como "conjunto dentro de un conjunto", también tenemos la definición de *subcolección* o *subfamilia de conjuntos* como "una familia dentro de una familia de conjuntos". Por ejemplo, dados los conjuntos A, B, C tenemos que $\mathcal{D} = \{A, B\}$ es subcolección de $\mathcal{C} = \{A, B, C\}$.

Definición 1.1.10. Sea $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ un conjunto. El *conjunto potencia de A* es la colección de conjuntos formada por todos los subconjuntos de A, denotado

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A) &:= \{A' : A' \subset A\}\\ &= \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \dots, \{a_1, a_2, a_3\}, \dots, A\}.\end{aligned}$$

Se cumple que si un conjunto A contiene n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ contiene 2^n elementos.

Ejemplo 1.1.7. *Sea el conjunto $A = \{a, b, c\}$, que contiene 3 elementos. Entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene $2^3 = 8$ elementos. En efecto,*

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}.$$

Nota 1.1.8. *Recordemos que si a es un elemento de A lo denotamos como $a \in A$, y por tanto $\{a\}$ es subconjunto de A, es decir, $\{a\} \subset A$. Igualmente, si consideramos $\mathcal{P}(A)$ tenemos que $\{a\}$, el conjunto formado únicamente por el elemento a (es decir, un conjunto de un elemento o un* conjunto unitario*), es un elemento suyo, luego $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$. Pero aunque $\mathcal{P}(A)$ esté formado por conjuntos tenemos que $\{a\}$ no es subconjunto de $\mathcal{P}(A)$, ya que $a \notin \mathcal{P}(A)$. En cambio, $\{\{a\}\} \subset \mathcal{P}(A)$. Otras expresiones incorrectas en esta situación son $\{a\} \in A$ ó $a \subset A$.*
Así, hemos de distinguir entre $\{a, b\}$ y $\{\{a\}, \{b\}\}$, donde el primero es un conjunto y el segundo es una familia de conjuntos (de un elemento).

1.2. Aplicaciones entre conjuntos

Como es habitual en Matemáticas, tras estudiar un objeto pasamos a ver las aplicaciones entre ellos, en este caso se trata de las aplicaciones o funciones entre conjuntos.

Definición 1.2.1. Sean A, B dos conjuntos. Una *aplicación* o *función de A a B*, representada como $f : A \to B$, es una asignación entre elementos de A y B de forma que a todo $a \in A$ se le atribuye un cierto $b \in B$, denotado como $f(a)$.

Más aún, decimos que $f(a)$ es el *valor de f en a*, ó la *imagen de a* por f y a su vez a es *preimagen*, *antiimagen* o *contraimagen* de $f(a)$.

Ejemplo 1.2.1. *Sean los conjuntos $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Una función f de A a B puede estar dada como $f(a_1) := b_1$, $f(a_2) := b_2$ y $f(a_3) := b_4$.*

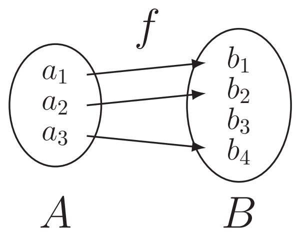

Figura 1.11: Aplicación f definida de A a B.

En lo sucesivo, cuando tengamos una aplicación f definida en un conjunto $A \times B$, por simplificar denotaremos la imagen de $(a, b) \in A \times B$ como $f(a, b)$ en lugar de $f((a, b))$.

Definición 1.2.2. Sean dos conjuntos A, B. El *conjunto de salida* o *dominio* de una función $f : A \to B$ es aquel que contiene los elementos para los que se define f, es decir, A, y se denota

$$Dom(f) := \{a \in A : f(a) \in B\}.$$

El *conjunto de llegada* es el formado por todos los posibles valores (sean o no finalmente seleccionados), que en este caso es B.