Capítulo 1

Números reales

Al operar con números se debe precisar el conjunto numérico con el que se trata, puesto que existen varios conjuntos numéricos que pueden ser utilizados. En general, si no se especifica, se suele considerar un conjunto de escalares $\mathbb{K}$ dotado de dos leyes de composición interna;

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (\alpha, \beta) &\longrightarrow \alpha + \beta \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (\alpha, \beta) &\longrightarrow \alpha \cdot \beta \end{aligned}$$

y que se cumplen algunas, o todas, de las siguientes propiedades:

- $(\mathbb{K}, +)$ es un **grupo conmutativo** si y sólo si la operación $+$ satisface las siguientes propiedades para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$:

  1. Asociativa: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma$.
  2. Elemento neutro: Denotado 0, tal que $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$.
  3. Elemento simétrico: El opuesto de α es $-\alpha$; $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$.
  4. Conmutativa: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

- $(\mathbb{K} - \{0\}, \cdot)$ es un grupo conmutativo. La operación $\cdot$ satisface las siguientes propiedades para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} - \{0\}$:

  5. Asociativa: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$.
  6. Elemento neutro: Denotado 1, tal que $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$.
  7. Elemento simétrico: El inverso de α es α^{-1}; $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1$.
  8. Conmutativa: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

- La operación $\cdot$ es distributiva respecto de la operación $+$ en $\mathbb{K}$, es decir, para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ se tiene

  9. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Todas estas propiedades se resumen en la siguiente definición.

Definición 1.1 **Estructura de Cuerpo**
$(\mathbb{K}\ +\ \cdot)$ es un **cuerpo** si y sólo si se cumplen las propiedades del 1 al 9.

Observación La propiedad asociativa es la que permite dar sentido a las sumas, o a los productos, con más de dos números. Es decir, expresiones similares a las expresiones $a+b+c+d$ y $a\cdot b\cdot c\cdot d$ son sintácticamente correctas gracias a la propiedad asociativa, puesto que mediante la inclusión de paréntesis se puede expresar como una cadena de operaciones de dos números cada vez. Además, la forma de cómo se incluyen los paréntesis no afecta al resultado.

Observación La propiedad distributiva es la que permite, con la mezcla de las dos operaciones, construir expresiones con sentido. Al hacer uso de esta propiedad de izquierda a derecha se suele decir que se quitan paréntesis, mientras que el uso de derecha a izquierda se indica cómo sacar factor común.

Los conjuntos numéricos a los cuales se suele hacer referencia son:

- El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales que están definidos mediante los axiomas de Peano. Se emplean los símbolos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ en lugar de una notación que haga referencia al número siguiente de un número n, $s(n)$; $\mathbb{N} = \{0, s(0), s(s(0)), \ldots\}$
- El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros que están definidos como clases de equivalencia de la relación definida por $(n, m)\mathcal{R}(p, q) \iff n+q = m+p$ en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Se emplean los símbolos $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ en lugar de una notación de clases; $\mathbb{Z} = \{\ldots, [(0, 2)], [(0, 1)], [(0, 0)], [(1, 0)], [(2, 0)], \ldots\}$.
- El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales que están definidos por las clases de equivalencia de la relación definida por $(n, m)\mathcal{R}(p, q) \iff n \cdot q = m \cdot p$ en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$. Se emplea la escritura de fracción $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\right\}$ en lugar de una notación de clases $\mathbb{Q} = \{[(a, b)] \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\}$.
- El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.
- El conjunto $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ de los números complejos.

Es claro que estos conjuntos están compuestos por elementos de naturaleza distinta y no hay ninguna relación de contenido como simples conjuntos entre ellos.
Los conjuntos anteriores están dotados con una operación suma y una operación producto, y cumplen distintas propiedades que se resumen diciendo que

- $(\mathbb{N} + \cdot)$ es un **semianillo conmutativo con elemento unidad**, puesto que se cumplen las propiedades 1, 2, 4, 5, 6, 8 y 9.

$$\begin{aligned} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} & \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (0,n) &\longrightarrow 0+n=n & (0,n) &\longrightarrow 0 \cdot n = 0 \\ (n,s(m)) &\longrightarrow n+s(m)=s(n+m) & (n,s(m)) &\longrightarrow n \cdot s(m) = n \cdot m + n \end{aligned}$$

- $(\mathbb{Z} + \cdot)$ es un **anillo conmutativo con elemento unidad,** puesto que se cumplen las propiedades del 1 al 6, 8 y 9.
$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad [(n,m)] + [(h,k)] = [(n+h, m+k)]$$
$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad [(n,m)] \cdot [(h,k)] = [(n \cdot h + m \cdot k, m \cdot h + n \cdot k)]$$

- $(\mathbb{Q} + \cdot)$ es un cuerpo.
$$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \qquad [(n,m)] + [(h,k)] = [(n \cdot k + m \cdot h, m \cdot k)]$$
$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \qquad [(n,m)] \cdot [(h,k)] = [(n \cdot h, m \cdot k)]$$

- $(\mathbb{R} + \cdot)$ y $(\mathbb{C} + \cdot)$ son cuerpos.

La existencia de isomorfismos entre las estructuras algebraicas de los conjuntos numéricos con una parte de otro conjunto numérico permiten identificar algunos números de dos conjuntos distintos.

- $(\mathbb{N} + \cdot)$ y el sub-semianillo de los números enteros no negativos, $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, de $(\mathbb{Z} + \cdot)$. Por ello, se suele hablar de número natural para hacer referencia a número entero no negativo.

- $(\mathbb{Z} + \cdot)$ y el sub-anillo de las fracciones con denominador 1 de $(\mathbb{Q} + \cdot)$. Por ello, se suele hablar de número entero para hacer referencia a cualquier fracción de denominador 1. Se habla de número racional entero o, simplemente, entero.

- $(\mathbb{Q} + \cdot)$ es un sub-cuerpo de $(\mathbb{R} + \cdot)$. Cualquier número racional puede ser tratado como un número real. Se habla de número real racional o, simplemete, racional.

- $(\mathbb{R} + \cdot)$ es sub-cuerpo de $(\mathbb{C} + \cdot)$. Cualquier número real puede ser tratado como un número complejo de parte imaginaria nula.

Observación La existencia de estos isomorfismos indica que se operan de forma análoga los números de un cierto conjunto y los números del conjunto imagen. No distinguir si se trata del conjunto inicial o de su imagen es un uso muy común. Un ejemplo de este uso implícito, y ambiguo, permite hablar de la suma de un número real y un número natural o entero. En general, se opera en el marco numérico más amplio que en este caso es el de los números reales. De esta forma, al número natural aludido se le representa por el número entero no negativo correspondiente. Este último es representado por el número racional cuyo numerador es ese número entero y cuyo denominador es 1. De esta forma se establece cierta ambigüedad cuando se presentan operaciones donde hay distintos tipos de números por medio, que se resuelve al considerar el marco operacional más amplio. En cierta medida esto explica que sea muy común ver la expresión

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$

que sólo tiene sentido operacionalmente y bajo la referencia de los isomorfismos aludidos de las estructuras algebraicas y de orden.

Otras propiedades: De las propiedades de la estructura de cuerpo se derivan las siguientes propiedades: Para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$,

10. $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.
11. Si $\alpha \cdot \beta = 0$, entonces $\alpha = 0$ o $\beta = 0$ (En $\mathbb{K}$ no hay divisores de 0).
12. Si $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$ y $\alpha \neq 0$, entonces $\beta = \gamma$ (P. Cancelativa en $(\mathbb{K} - \{0\}\ \cdot)$).
13. $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2$; $\cdots$; $\alpha \cdot \alpha^{n-1} = \alpha^n$. (Potencias en $(\mathbb{K}\ \cdot)$).
14. $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
15. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ (Binomio de Newton).
    $(\alpha + \beta)^n = \binom{n}{0}\alpha^n + \binom{n}{1}\alpha^{n-1}\beta + \cdots + \binom{n}{n-1}\alpha\beta^{n-1} + \binom{n}{n}\beta^n$.

Observación Todas las propiedades mencionadas del 1 al 15 se cumplen sobre cualquier cuerpo, por ello, se cumplen en $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. En $\mathbb{Z}$ se cumplen todas menos la propiedad 7 y en $\mathbb{N}$ se cumplen todas menos las propiedades 3, 7 y la propiedad 14 por no estar definida en $\mathbb{N}$ la expresión $\alpha - \beta$.

Nota En $\mathbb{K}$ escribiremos $\alpha\beta$ en lugar de $\alpha \cdot \beta$ y expresiones como 3α para representar a $\alpha + \alpha + \alpha$ o α^3 para representar a $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$. De forma análoga se interpretan las expresiones $n\alpha$ y α^n para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.2 **Estructura de Cuerpo ordenado**
$(\mathbb{K}\ \ +\ \ \cdot\ \ \leqslant)$ es un **cuerpo ordenado** si y sólo si $(\mathbb{K}\ \ +\ \ \cdot)$ es un cuerpo, $(\mathbb{K}\ \ \leqslant)$ es un conjunto ordenado con orden total y la relación de orden $\leqslant$ es compatible con las dos operaciones $+$ y $\cdot$. Es decir, para todo $\alpha, \beta, \gamma, \rho \in \mathbb{K}$:

Si $\alpha \leqslant \beta$ y $\gamma \leqslant \rho$, entonces $\alpha + \gamma \leqslant \beta + \rho$.
Si $0 \leqslant \alpha$ y $0 \leqslant \beta$, entonces $0 \leqslant \alpha\beta$.

En un cuerpo ordenado se debe cumplir que si $\alpha \neq 0$ entonces $0 < \alpha^2$. Además, $0 < 1$ y por tanto $-1 < 0$. En general un cuerpo puede carecer de una estructura de orden total compatible con las operaciones, por ejemplo $(\mathbb{C}\ \ +\ \ \cdot)$ puesto que si $\alpha = i \neq 0$ se tiene $\alpha^2 = -1 < 0$.

Ejemplo 1.3 **Orden en un cuerpo**
Una forma habitual de crear un orden compatible con las operaciones consiste en determinar la existencia de un subconjunto $\mathbb{K}^+$ que cumpla las condiciones:

1. $0 \notin \mathbb{K}^+$, donde 0 es el elemento neutro de la suma.

2. Para cualquier $a \in \mathbb{K}$ se cumple que o $a \in \mathbb{K}^+$ o $a = 0$ o $-a \in \mathbb{K}^+$, donde $-a$ es el elemento opuesto para la suma.

3. Para cualquier $a, b \in \mathbb{K}^+$ se cumple $a + b \in \mathbb{K}^+$ y $ab \in \mathbb{K}^+$. ♣

Proposición 1.4 La relación

$$a \leqslant b \iff \{a = b \quad \text{o} \quad b - a \in \mathbb{K}^+\}$$

es una relación de orden total compatible con las operaciones.

Demostración
La propiedad *reflexiva*, $\forall a \in \mathbb{K}$ se cumple $a \leqslant a$ por definición de la relación.
La propiedad *antisimétrica* se cumple. Si $a \leqslant b$ y $b \leqslant a$, y suponemos que $a \neq b$, se tiene que $b - a, a - b \in \mathbb{K}^+$ que es una contradicción. El escalar $b - a$ y su opuesto $a - b$ no pueden pertenecer a $\mathbb{K}^+$.
La propiedad *transitiva* se cumple. Si $a \leqslant b$ y $b \leqslant c$, entonces $b - a \in \mathbb{K}^+$ y $c - b \in \mathbb{K}^+$. Así pues, $(c - b) + (b - a) = c - a \in \mathbb{K}^+$, es decir, $a \leqslant c$.
Además, de la segunda propiedad de $\mathbb{K}^+$ se obtiene que se es un orden total, puesto que si $a, b \in \mathbb{K}$, entonces o bien $b - a \in \mathbb{K}^+$, es decir $a \leqslant b$, o $b - a = 0$, es decir $a = b$, o $-(b - a) = a - b \in \mathbb{K}^+$, es decir $b \leqslant a$. ♣

Observación Al conjunto $\mathbb{K}^+$ se le denomina el conjunto de escalares positivos. Además, se considera la relación estricta: $a < b \iff b - a \in \mathbb{K}^+$ que no es de orden, por no cumplir la propiedad reflexiva.

Ejercicio 1.5 **Una propiedad del orden**

Si $\alpha \leqslant \beta$ y $0 < \gamma$, entonces $\alpha\gamma \leqslant \beta\gamma$.

Solución
Si $\alpha \leqslant \beta$, entonces o $\alpha = \beta$ o $0 < \beta - \alpha$. En el caso $\alpha = \beta$ se tiene $\alpha\gamma = \beta\gamma$. En el caso $0 < \beta - \alpha$, como $0 < \gamma$ se tiene $0 \leqslant (\beta - \alpha)\gamma = \beta\gamma - \alpha\gamma$, es decir, $\alpha\gamma \leqslant \beta\gamma$. ♣

Práctica 1.6 **Otras propiedades del orden**

Si $0 < \alpha$, entonces $0 < \alpha^{-1}$.
Si $0 < \alpha \leqslant \beta$, entonces $0 < \beta^{-1} \leqslant \alpha^{-1}$.
Si $\alpha \leqslant \beta < 0$, entonces $\beta^{-1} \leqslant \alpha^{-1} < 0$.

Ejemplo 1.7 **Valor absoluto en un cuerpo ordenado**

La existencia de subconjunto $\mathbb{K}^+$ en un cuerpo ordenado $(\mathbb{K}\ +\ \cdot\ \leqslant)$ permite definir la aplicación valor absoluto de la forma siguiente:

$$|\ | : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}^+ \cup \{0\} \qquad |\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \in \mathbb{K}^+ \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ -\alpha & \text{si } \alpha \notin \mathbb{K}^+ \cup \{0\} \end{cases} \quad \clubsuit$$

Ejercicio 1.8 **Propiedades del valor absoluto**

$$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \quad , \quad |\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|.$$

Solución

Si $0 < \alpha$ y $0 < \beta$, entonces $0 < \alpha\beta$ y $0 < \alpha + \beta$. Luego,

$$|\alpha\beta| = \alpha\beta = |\alpha| \cdot |\beta| \quad ; \quad |\alpha + \beta| = \alpha + \beta = |\alpha| + |\beta|.$$

Si $\alpha < 0$ y $\beta < 0$, entonces $0 < \alpha\beta$ y $\alpha + \beta < 0$. Luego,

$$|\alpha\beta| = \alpha\beta = (-\alpha)(-\beta) = |\alpha| \cdot |\beta| \quad ; \quad |\alpha + \beta| = -(\alpha + \beta) = -\alpha - \beta = |\alpha| + |\beta|.$$

Si $\alpha < 0$ y $0 < \beta$, entonces $\alpha\beta < 0$ y $\alpha + \beta < -\alpha + \beta$. Luego,

$$|\alpha\beta| = -\alpha\beta = (-\alpha)\beta = |\alpha| \cdot |\beta| \quad ; \quad |\alpha + \beta| < |-\alpha + \beta| = -\alpha + \beta = |\alpha| + |\beta|.$$

El caso $\alpha < 0$ y $\beta < 0$ es análogo al anterior. $\clubsuit$

Práctica 1.9 **Otras propiedades del valor absoluto**

$$|\alpha| = |-\alpha| \quad , \quad |\alpha - \beta| \geqslant |\beta| - |\alpha|.$$

Ejercicio 1.10 **Distancia definida en un cuerpo ordenado**

La aplicación $d : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}^+ \cup \{0\}$ definida por $d(\alpha, \beta) = |\beta - \alpha|$ cumple las propiedades:

$$\begin{array}{l} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad d(\alpha, \beta) \geqslant 0. \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad d(\alpha, \beta) = 0 \iff \alpha = \beta. \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha). \\ \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} \quad d(\alpha, \gamma) \leqslant d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma). \end{array}$$

Solución

Al aplicar la definición de d y las propiedades del valor absoluto se tiene:

$$d(\alpha, \beta) = 0 \iff |\beta - \alpha| = 0 \iff \beta - \alpha = 0 \iff \beta = \alpha.$$

$$d(\alpha, \beta) = |\beta - \alpha| = |\alpha - \beta| = d(\beta, \alpha).$$

$$d(\alpha, \gamma) = |\alpha - \gamma| = |\alpha - \beta + \beta - \gamma| \leqslant |\alpha - \beta| + |\beta - \gamma| = d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma). \quad \clubsuit$$

1.1. Números decimales

Cada número racional es una clase $[(a,b)]$ de pares de números enteros correspondiente al conjunto cociente $\big(\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})\big)/\mathcal{R}$ mediante la relación de equivalencia definida sobre $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})$ de la forma

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff ad = bc \qquad ; \qquad [(a,b)] \in \big(\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})\big)/\mathcal{R} = \mathbb{Q}.$$

Un número racional $[(a,b)]$ se suele escribir en forma de **fracción**, $\dfrac{a}{b}$, de números enteros. Si bien, cualquier número racional α puede ser representado por cada elemento de la clase y, por tanto, por distintas fracciones de la forma $\dfrac{a}{b}$, resulta que existe una única fracción $\dfrac{a'}{b'}$, con $b' \in \mathbb{Z}-0$, tal que $1 = \operatorname{mcd}(|a'|,|b'|)$. Este representante es denominado **fracción irreducible**.

Al proceso de hallar la fracción irreducible equivalente a una fracción dada se le denomina "simplificar la fracción". Por ejemplo, $\dfrac{35}{-42} = \dfrac{-5}{6}$ ya que $7 = \operatorname{mcd}(35,42)$ y $35 = 7\cdot 5$ y $42 = 7\cdot 6$.

Cuerpo de los números racionales

Las operaciones en el conjunto $\mathbb{Q}$, se definen de la manera siguiente:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad \text{y} \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, \qquad \forall \frac{a}{b},\frac{c}{d}\in\mathbb{Q},$$

donde $0 = \dfrac{0}{1}$ es el elemento neutro de la suma y $1 = \dfrac{1}{1}$ es el elemento neutro del producto.

En $\mathbb{Q}$ se consideran los subconjuntos: $\mathbb{Q}_+$ de los números racionales positivos o cero y $\mathbb{Q}_-$ de los números negativos o cero.

$$\mathbb{Q}_+ = \left\{\frac{a}{b}\in\mathbb{Q} \mid ab \geqslant 0\right\} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \quad \text{y} \quad \mathbb{Q}_- = \left\{\frac{a}{b}\in\mathbb{Q} \mid ab \leqslant 0\right\} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\},$$

que cumplen:

- $\mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- = \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{Q}_- = \{0\}$.
- La suma y el producto son operaciones cerradas en $\mathbb{Q}_+$. Es decir, si $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}_+$, entonces $\alpha+\beta\in\mathbb{Q}_+$ y $\alpha\beta\in\mathbb{Q}_+$.

En $\mathbb{Q}$ se define la relación de orden de la forma siguiente:

$$\alpha \leqslant \beta \quad \text{si y sólo si} \quad \beta - \alpha \in \mathbb{Q}_+ \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q}.$$

Observación Esta relación de orden es de orden total

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \text{ se cumple } \alpha < \beta \quad \text{o} \quad \alpha = \beta \quad \text{o} \quad \alpha > \beta.$$

Este orden es compatible con la suma, es decir,

$$\alpha \leqslant \beta \text{ si y sólo si } \gamma + \alpha \leqslant \gamma + \beta \qquad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}.$$

Todo esto se recuerda diciendo que $(\mathbb{Q}\ +\ \cdot\ \leqslant)$ es un cuerpo ordenado.

Como en todo cuerpo ordenado, $\mathbb{Q}$ satisface las propiedades siguientes:

16. Si $\alpha \leqslant \beta$ y $\alpha' \leqslant \beta'$, entonces $\alpha + \alpha' \leqslant \beta + \beta'$.
17. Si $\alpha \leqslant \beta$, entonces $-\beta \leqslant -\alpha$.
18. Si $\alpha \leqslant \beta$ y $0 \leqslant \gamma$, entonces $\alpha\gamma \leqslant \beta\gamma$.
19. Si $\alpha \leqslant \beta$ y $\gamma \leqslant 0$, entonces $\beta\gamma \leqslant \alpha\gamma$.
20. Para todo $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha^2 \geqslant 0$.
21. Si $\alpha > 0$, entonces $\alpha^{-1} > 0$.
22. Si $0 < \alpha \leqslant \beta$, entonces $0 < \beta^{-1} \leqslant \alpha^{-1}$.
23. Si $\alpha \leqslant \beta < 0$, entonces $\beta^{-1} \leqslant \alpha^{-1} < 0$.

Observación En muchos ejercicios de este texto se presenta la necesidad de tratar con una inecuación. Las propiedades de la 18 a la 23 muestran la forma en la cual se transforman la desigualdades cuando se opera con ellas. Por ejemplo, de la propiedad 19 se tiene que si $\alpha \leqslant \beta$ entonces $-\beta \leqslant -\alpha$ y de la propiedad 22 que para dos números positivos tales que $\alpha \leqslant \beta$ entonces $\dfrac{1}{\beta} \leqslant \dfrac{1}{\alpha}$.

Otras propiedades importantes las presentan los siguientes resultados:

Propiedad arquimediana de $\mathbb{Q}$

24. Para todo $\alpha \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha > 0$, y para todo $\beta \in \mathbb{Q}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\alpha > \beta$.

Demostración
Se considera $\alpha = \dfrac{a}{b}$ con $b > 0$ y $\beta = \dfrac{c}{d}$ con $d > 0$, entonces tan sólo hay que determinar un número natural n tal que $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{bc}{ad} < \dfrac{n}{1}$, o lo que es lo mismo, $bc < nad$. Se tienen los números enteros $ad > 0$ y bc, por tanto la propiedad arquimediana de $\mathbb{Z}$ nos asegura la existencia de ese n. ♣

Propiedad de orden divisible

25. El orden de $\mathbb{Q}$ es **divisible**, es decir, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, tales que $\alpha < \beta$, existe $\gamma \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha < \gamma < \beta$.

Demostración
Si $\alpha < \beta$, entonces $2\alpha < \alpha + \beta < 2\beta$. Luego, se tiene que $\alpha < \dfrac{\alpha+\beta}{2} < \beta$. ♣

Valor absoluto en $\mathbb{Q}$ Sea $\alpha \in \mathbb{Q}$, se define $|\alpha| = \begin{cases} -\alpha & \text{si} \quad \alpha < 0 \\ \alpha & \text{si} \quad \alpha \geqslant 0 \end{cases}$

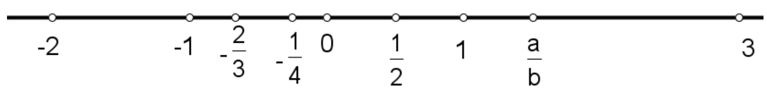

Figura 1.1: Representación de $\mathbb{Q}$ en una línea recta.

Distancia en $\mathbb{Q}$ $\quad \mathrm{d}(\alpha, \beta) = |\beta - \alpha|, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q}$.

Ejercicio 1.11
La ecuación $x^2 = 2$ no tiene solución en $\mathbb{Q}$.
Solución
Supuesto que $\exists x \in \mathbb{Q}$, tal que $x^2 = 2$, se considera la fracción irreducible de $x = \dfrac{a}{b}$ con $\operatorname{mcd}\{a, b\} = 1$.

$$x^2 = 2 \iff \frac{a^2}{b^2} = 2 \iff a^2 = 2b^2 \Longrightarrow 2|a^2 \Longrightarrow 2|a,$$

es decir, 2 divide al número entero a.

$$2|a \iff 2^2|a^2 \Longrightarrow 2|b^2 \Longrightarrow 2|b.$$

Luego, $\operatorname{mcd}\{a, b\} = 2 \neq 1$; contradicción. Así pues, no es posible suponer que existe un x racional solución de esa ecuación. ♣

Práctica 1.12
Sean $n, p \in \mathbb{N}$ con $n > 2$ y p un número primo. Demostrar que no existe raíz racional alguna de la ecuación $x^n = p$.

Práctica 1.13 **Proyección natural de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$**

Demostrar que la aplicación p de $(\mathbb{Z}\ +\ \cdot\ \leqslant)$ a $(\mathbb{Q}\ +\ \cdot\ \leqslant)$ definida por $p(n) = \dfrac{n}{1}$ es un monomorfismo algebráico y de orden; homomorfismo inyectivo que conserva el orden.

$$\begin{array}{l} p(km + n) = kp(m) + p(n) \\ \text{Si } m \leqslant n, \text{ entonces } p(m) \leqslant p(n). \end{array}$$

Nota Se utiliza la notación entera n en lugar de la notación $\dfrac{n}{1}$ en este texto. Además, se entenderá a esta fracción como un número entero. Lo mismo con los números naturales.

Elementos de un conjunto ordenado

En el conjunto $\mathbb{K}$, con $\mathbb{K} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\ \text{ y }\ \mathbb{R}\}$, está definida la relación de orden habitual, $\leqslant$, *menor o igual* que es una relación de orden total. Es decir, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{K}$ se cumple $a \leqslant b$ o $b \leqslant a$ ($a < b$ o $a = b$ o $a > b$).

Ese orden total nos permite disponer de un modelo gráfico del conjunto incluido en una línea recta. Es decir, $\mathbb{K}$ se interpreta como un conjunto de puntos en una línea recta, véase la figura 1.1. Este modelo sobre la recta nos permite hacer referencia a un número $a \in \mathbb{K}$ diciendo que se tiene un punto a de la recta $\mathbb{K}$.

Observación Una representación bidimensional posible podría ser la gráfica de la parábola cúbica $y = x^3$ donde el orden estaría definido por $x \leqslant x' \iff y(x) \leqslant y(x')$. Ahora bien, las operaciones algebraicas no tendrían una interpretación tan simple como en una recta.

Intervalos: Sean $a, b \in \mathbb{K}$ tales que $a \leqslant b$, se denomina:

- **Intervalo abierto** (a, b)**:** Es el conjunto $(a, b) = \{x \in \mathbb{K} \mid a < x < b\}$.
- **Intervalo cerrado** $[a, b]$**:** Es el conjunto $[a, b] = \{x \in \mathbb{K} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.
- **Intervalo semiabierto :** Es cada uno de los siguientes conjuntos:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{K} \mid a < x \leqslant b\} \quad \text{y} \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{K} \mid a \leqslant x < b\}.$$

Intervalos iniciales y finales: Sea $a \in \mathbb{K}$, se denomina:

- **Intervalo inicial abierto** $(\leftarrow, a) = \{x \in \mathbb{K} | x < a\}$.
- **Intervalo final abierto** $(a, \rightarrow) = \{x \in \mathbb{K} | a < x\}$.
- **Intervalo inicial cerrado** $(\leftarrow, a] = \{x \in \mathbb{K} | x \leqslant a\}$.

- **Intervalo final cerrado** $[a, \rightarrow) = \{x \in \mathbb{K} | a \leqslant x\}$.

Ejemplo 1.14 En el caso de $(\mathbb{R}, \leqslant)$, la forma habitual de representar los intervalos es como segmentos en una recta. La expresión $a \leqslant b$ se traduce gráficamente en que *el punto* a *está a la izquierda del punto* b en la recta.

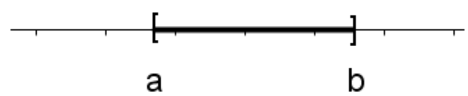

Figura 1.2: Intervalo cerrado $[a, b]$ en $\mathbb{R}$

En el caso de $(\mathbb{R}, \leqslant)$ los intervalos iniciales y finales se denominan **semirrectas** y se escriben de la forma $(-\infty, a)$, (a, ∞), $(-\infty, a]$ y $[a, \infty)$ respectivamente. En el caso de $\mathbb{Q}$ las representaciones son similares debido a que el orden de $\mathbb{Q}$ es dividido, sin embargo, se sobreentiende que hay huecos invisibles. En general, para $\mathbb{Q}$ los intervalos y semirrectas se escriben como $(a, b) \cap \mathbb{Q}$, $(-\infty, a) \cap \mathbb{Q}$, $(a, \infty) \cap \mathbb{Q}$ De forma análoga se escriben $(a, b) \cap \mathbb{Z}$, $(-\infty, a) \cap \mathbb{Z}$ y $(a, \infty) \cap \mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$, si bien en la recta tan sólo se marcan los múltiplos del segmento unidad. ♣

Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{K}$, se denomina:

- **Cota superior del conjunto** A**:** Una cota superior de A es cualquier elemento $u \in \mathbb{K}$ que cumple que $\forall x \in A \quad x \leqslant u$.
- **Cota inferior del conjunto** A**:** Una cota inferior de A es cualquier elemento $b \in \mathbb{K}$ que cumple que $\forall x \in A \quad b \leqslant x$.
- A **conjunto acotado superiormente:** El conjunto A es acotado superiormente si existe una cota superior de A.
- A **conjunto acotado inferiormente:** El conjunto A es acotado inferiormente si existe una cota inferior de A.
- A **conjunto acotado:** El conjunto A es acotado si lo es tanto superiormente como inferiormente.

Observación Un conjunto A es acotado si y sólo si existen dos elementos $a, b \in \mathbb{K}$ tales que $A \subset [a, b]$. Un conjunto B no está acotado superiormente si y sólo si para todo $k \in \mathbb{K}$ existe $u \in B$ tal que $k \leqslant u$. Análogamente, un conjunto no es acotado inferiormente si y sólo si para todo $k \in \mathbb{K}$ existe $b \in B$ tal que $b \leqslant k$.

Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{K}$, se denomina:

- **Máximo del conjunto** A**:** Es un elemento $M \in A$ tal que $\forall x \in A \;\; x \leqslant M$. Se denota $M = \text{máx}(A)$.
- **Mínimo del conjunto** A**:** Es un elemento $m \in A$ tal que $\forall x \in A \;\; m \leqslant x$. Se denota $m = \text{mín}(A)$.
- **Supremo del conjunto** A**:** Es una cota superior $s \in \mathbb{K}$ tal que $s \leqslant u$ para toda cota superior u de A. Se denota $s = \sup(A)$.
- **Ínfimo del conjunto** A**:** Es una cota inferior $i \in \mathbb{K}$ tal que $d \leqslant i$ para toda cota inferior d de A. Se denota $i = \text{ínf}(A)$.

Observaciones: El ínfimo de un conjunto A es el máximo del conjunto de las cotas inferiores de A, y el supremo de A es el mínimo del conjunto de las cotas superiores de A.

De la definición se deduce directamente que si un conjunto posee máximo, entonces posee supremo y $\sup(A) = \text{máx}(A)$. Análogamente, si un conjunto posee mínimo, entonces posee ínfimo e $\text{ínf}(A) = \text{mín}(A)$.

Observación El supremo o el ínfimo de un conjunto $A \subset \mathbb{K}$ puede existir o no. La existencia de un supremo o un ínfimo de A no asegura la existencia de un máximo o un mínimo de A.

Ejemplo 1.15

En el caso de $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ se tienen conjuntos acotados que no poseen ni ínfimo ni supremo. El conjunto A no tiene ni supremo ni ínfimo.

$$A = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 \leqslant 2\}.$$

Es acotado pues $A \subset [-3, 3]$. Supuesto que $\exists s = \sup(A) \in \mathbb{Q}$, entonces el conjunto $B = \{x^2 | x \in A\} \subset [-2, 2]$ cumple que $s^2 = \sup(B) = 2$. Lo que representa una contradicción pues la ecuación $x^2 = 2$ no tiene raíces racionales.
De forma análoga se muestra que no posee ínfimo. ♣

Aproximación decimal de un número racional

En el sistema decimal, cuando escribimos el número 71223 queremos indicar el número entero siguiente:

$$7 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3,$$

mientras que si escribimos 71223,145 indicamos el número racional:

$$7 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3 + 1\frac{1}{10} + 4\frac{1}{10^2} + 5\frac{1}{10^3},$$

que escrito en la forma de fracción es $\dfrac{71223145}{10^3}$.

Definición 1.16 Notación decimal exacta en base 10
Un **número decimal exacto** es un número racional que se puede expresar como una fracción de enteros donde el denominador es una potencia de 10. También se denota por **número decimal finito** o, simplemente, número decimal.

Ejemplo 1.17

Los números racionales $\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{20}$ y 7 pueden ser escritos como $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$, $-\frac{1}{20} = -\frac{5}{10^2}$ y $7 = \frac{7}{1} = \frac{7}{10^0}$. Luego, son números decimales exactos. Escribimos la forma decimal de las fracciones $\frac{1}{5} = 0{,}2$, $-\frac{1}{20} = -0{,}05$ y $7 = 7{,}0$. ♣

Nota En programas de ordenador, calculadoras o en inglés la coma separadora de la parte entera de las cifras decimales se sustituye por un punto. Se suele emplear la escritura 7.2 en lugar de $7,2$ o $7'2$. Además, conviene recordar que los ordenadores operan, principalmente, con dos tipos de datos numéricos, *integer* para tratar con algunos números enteros con aritmética exacta y *float* para tratar con algunos números racionales con una aritmética no exacta denominada *punto flotante*.

Ejemplo 1.18 **Números racionales sin representación decimal finita**

No todos los números racionales se escriben como un número decimal exacto. Por ejemplo $\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{7}$ no son números decimales exactos. Lo demostramos utilizando el método de reducción al absurdo.

Si fuera $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$ con $n \in \mathbb{N}$, se tendría que $10^n = 3a$ y en consecuencia 3 sería un divisor de 10^n. Esto es falso. ♣

Cualquier número racional $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$, que no sea un número decimal exacto, se puede encuadrar entre dos números decimales exactos “consecutivos” a una distancia tan pequeña como se quiera. Supuesto que $\alpha > 0$ (el caso negativo es similar), esto quiere decir que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un único $c \in \mathbb{N}$ que cumple:

$$\frac{c}{10^n} < \alpha < \frac{c+1}{10^n}.$$