Capítulo 1

Variedades diferenciables

El propósito esencial del primer capítulo de este texto es la introducción al estudio de variedades, tanto con borde como sin él. Desde una perspectiva intuitiva, estas estructuras pueden describirse como entidades matemáticas que localmente se asemejan al espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Constituyen una generalización natural de dicho espacio y proporcionan un marco para la extensión de conceptos del cálculo diferencial e integral a entidades que exhiben, desde cierto punto de vista, «*formas*» que pueden tener algún tipo de «*curvatura*». Ejemplos típicos de tales variedades incluyen la esfera y la superficie de un toroide.

A lo largo de este texto, las variedades desempeñarán un papel central, puesto que el objetivo primordial es ampliar el alcance del cálculo diferencial e integral a las variedades diferenciables. En consecuencia, el enfoque predominante será el estudio de funciones definidas sobre estas variedades. Para un óptimo aprovechamiento del capítulo, se recomienda poseer un sólido entendimiento de los principios básicos de teoría de conjuntos, tales como la intersección y la unión, así como de conceptos fundamentales de cálculo, incluyendo la continuidad y diferenciabilidad de funciones de varias variables.

En las primeras dos secciones del capítulo, se introducen los conceptos esenciales de topología, se definen las variedades topológicas y diferenciables, tanto con borde como sin él, y se aborda la noción de función diferenciable sobre una variedad, tema que se explorará con mayor profundidad en el capítulo subsiguiente. La sección siguiente está dedicada a demostrar algunas propiedades topológicas clave que confieren a estos espacios características similares a las de $\mathbb{R}^n$. Finalmente, la última sección se enfoca exclusivamente en el análisis de ejemplos concretos de variedades diferenciables, como son la esfera y el toroide mencionado.

1.1. Preliminares topológicos

Antes de introducir la noción de variedad, vamos a presentar el concepto de espacio topológico, y algunas de sus propiedades fundamentales (para un estudio más detallado se recomienda [4, 8]). El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ sirve como modelo paradigmático en este contexto. En particular, destacamos dentro de este espacio una colección de conjuntos *abiertos*, específicamente las bolas abiertas definidas como

$$B_r^n(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ ||x - a|| < r\} ,$$

es decir, el conjunto de puntos que distan de uno dado (a), llamado *centro*, menos que una cantidad determinada (r), llamada *radio*. De esta manera, cualquier otro abierto de $\mathbb{R}^n$ se puede escribir como unión de bolas abiertas, y así generamos la conocida como ***topología usual*** de $\mathbb{R}^n$. En esta línea, definir una *topología* sobre un conjunto no es más que una manera *coherente* de especificar qué subconjuntos serán denominados *abiertos*. Esta estructuración no solo facilita la comprensión de espacios más complejos sino que también es fundamental para el desarrollo posterior de la teoría de variedades.

En este punto, es pertinente invitar al lector a hacer una pausa reflexiva en su lectura. En numerosas ocasiones, se ha demostrado que es sumamente provechoso intentar abordar un problema de manera independiente antes de estudiar la solución propuesta en el texto. En este sentido quizá sería interesante que el lector se planteara la siguiente cuestión:

Dado un conjunto arbitrario X, ¿cuál sería la mejor manera de definir cuáles son los «abiertos» de X? ¿Qué propiedades debería tener esta familia de abiertos para que la definición fuera coherente con lo familia de abiertos del espacio euclídeo usual $\mathbb{R}^n$?

Definición 1.1.1 (Topología)**.** *Sea X un conjunto. Una* ***topología*** *en X consiste en una colección de subconjuntos T de X tales que:*

1. *El conjunto total X y el conjunto vacío $\emptyset$ son elementos de T.*
2. *La intersección finita de elementos de T es un elemento de T.*
3. *La unión arbitraria de elementos de T es un elemento de T.*

Al par (X, T) se le denomina ***espacio topológico****, y a los elementos de T se les llama* ***abiertos de*** *X.*

Cuando se sobreentienda la topología, diremos simplemente que X es un espacio topológico. Un subconjunto $S \subseteq X$ se dice ***cerrado*** si su complementario $X \setminus S$ es abierto. Al complementario de un subconjunto S de un conjunto X se le denota por S^c.

Dado un espacio topológico (X, T), una ***base de la topología de*** X es una colección $\mathcal{B}$ de abiertos de $U \in T$ tales que cualquier otro abierto $U \in T$ es la unión de elementos de $\mathcal{B}$. Es importante observar que para definir de manera unívoca una topología sobre un conjunto es suficiente proporcionar una base de la misma, ya que esta determina la estructura completa de los conjuntos abiertos del espacio. De hecho, dada una base $\mathcal{B}$ de la topología, podemos afirmar que *un subconjunto U de X es abierto si, y solo si, para todo $x \in U$, existe $V \in \mathcal{B}$, tal que $x \in V \subseteq U$.*

Ejemplo 1.1.2 (Espacio euclídeo)**.** Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio euclídeo de dimensión n. La ***topología usual*** de $\mathbb{R}^n$ es la única topología que tiene como base la familia de todas las bolas abiertas. Cabe destacar que el conjunto de todas las bolas con radio racional y centro con coordenadas racionales,

$$\mathcal{B} = \{B_r^n(a) \mid r \in \mathbb{Q}^n \text{ y } a \in \mathbb{Q}\} \ ,$$

es otra base de la topología usual de $\mathbb{R}^n$ $\diamondsuit$

Dadas dos topologías T y $\overline{T}$ sobre un conjunto X, se dice que T es ***más fina*** que $\overline{T}$ si $\overline{T} \subset T$. A grandes rasgos, una topología es más fina que otra si *divide al espacio es partes más pequeñas*, esto es, si contiene más abiertos.

Ejemplo 1.1.3 (Discreta e indiscreta)**.** Sea X un conjunto arbitrario. La ***topología indiscreta*** de X se denota por T_I y se define como la topología «*menos fina*» que se puede construir en X, es decir,

$$T_I \coloneqq \{\emptyset, X\} \ .$$

Por otro lado, la ***topología discreta*** de X, denotada por T_D, se define como la topología «*más fina*» que se puede asociar a X, esto es,

$$T_D \coloneqq \{S \ : \ S \text{ es un subconjunto de } X\} \ .$$

$\diamondsuit$

Ejemplo 1.1.4 (Producto)**.** Sean (X, T_1) e (Y, T_2) dos espacios topológicos. Se define la ***topología producto*** $T_1 \times T_2$, como la topología sobre $X \times Y$ cuya base viene dada por

$$\mathcal{B} \coloneqq \{U_1 \times U_2 \ : \ U_1 \in T_1, \ U_2 \in T_2\} \ .$$

$\diamondsuit$

Sea (X, T) un espacio topológico. Uno puede pensar en los abiertos de X como entornos que «*rodean*» a sus puntos, y permiten estudiar las propiedades locales del espacio alrededor del punto. Sin embargo, existe una noción algo más general para dar rigor a esta idea intuitiva de «*entorno local de un punto*» que vendrá dada por subconjuntos que cumplen esta función para algunos de sus puntos.

Definición 1.1.5 (Entorno)**.** *Consideremos un espacio topológico (X, T) y un elemento $x \in X$. Se define un **entorno** de x, denotado como U_x, como un subconjunto de X para el cual existe un conjunto abierto U de X tal que*

$$x \in U \subseteq U_x \ .$$

Reformulando, un subconjunto se considera un entorno de un punto si, y solo si, incluye un conjunto abierto que a su vez contiene a dicho punto. Por consiguiente, es posible que un subconjunto funcione como entorno para ciertos puntos específicos que contiene sin serlo para todos los elementos del subconjunto. Es trivial verificar que todos los conjuntos abiertos de la topología son entornos para los puntos que comprenden.

Además, si un subconjunto actúa como entorno para cada uno de sus puntos, entonces puede ser expresado como la unión de abiertos (pues es unión de todos sus puntos) y, por lo tanto, constituye un abierto dentro de la topología. Así, los conjuntos abiertos representan una categoría especial de entornos, *son los únicos que sirven como entornos para todos sus elementos.* Para entornos, es posible definir un concepto análogo al de base de la topología.

Definición 1.1.6 (Base de entornos)**.** *Sea (X, T) un espacio topológico, y $x \in X$. Una familia $\beta(x)$ de entornos de x es una* ***base de entornos*** *de x si, para todo entorno U de x, existe $V \in \beta(x)$ tal que $V \subseteq U$.*

De este modo, igual que ocurre con la base de la topología, todos los entornos de un punto dado se pueden obtener uniendo los entornos de una base de entornos.

Dado un espacio topológico (X, T). A cada subconjunto S de X se le puede asociar una serie de subconjuntos notables que cumplen la función de *clasificar* los puntos de X en relación con S. Un punto $x \in X$ se dice ***interior*** a S si existe un abierto U tal que $x \in U \subseteq S$. De un modo opuesto, un punto $x \in X$ se dice ***exterior*** a S si existe un abierto U tal que $x \in U \subseteq S^c$, esto es, x es un punto interior del complementario S^c. Por último, un punto $x \in X$ se dice ***frontera*** de x si no es ni exterior ni interior. Dicho de otro modo, x es un punto frontera si todo abierto U que contenga a x tiene intersección no vacía con S y con S^c.

La familia de todos los puntos interiores de S se denota por $\mathring{S}$, y se conoce como ***interior*** de S. El conjunto de todos los puntos frontera se denomina **frontera** de S, y se denota por ∂S. Por último, la ***clausura*** se denota por $\overline{S}$, y se define como la unión de S y su frontera.

Proposición 1.1.7. *Sea (X, T) un espacio topológico, y S un subconjunto de X. Entonces,*

- *El interior de S es el mayor abierto contenido en S.*
- *La clausura de S es el menor cerrado que contiene a S, y está dada por*

$$\overline{S} \;=\; \mathring{S} \sqcup \partial S \,.$$

donde «$\sqcup$» denota a la unión disjunta de conjuntos.

Consideremos la colección de todos los subconjuntos de X:

$$\mathrm{Sub}(X) \coloneqq \{S \;:\; S \subseteq X\} \,.$$

En el contexto de subconjuntos, el término *mayor* (respectivamente, *menor*) se refiere al máximo (respectivamente, mínimo) de una determinada familia de subconjuntos con respecto al orden parcial $\subseteq$. Observemos que, en general, estos máximos y mínimos no tienen por qué existir. No obstante, en este caso en particular sí existen, pues se definen de manera explícita.

Obviamente, un subconjunto S de un espacio topológico es abierto si, y solo si, $S = \mathring{S}$. Por otro lado, S es cerrado si, y solo si, $S = \overline{S}$.

La continuidad de funciones de una o varias variables es un concepto profundamente relacionado con la noción de «*proximidad*». Una función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en un punto a si, para todo valor $\epsilon > 0$, existe otro valor $\delta > 0$ tal que

$$||f(x) - f(a)|| < \epsilon \text{ siempre que } ||x - a|| < \delta\,,$$

donde $||\cdot||$ denota la norma euclídea en el espacio que corresponda. En otras palabras, para toda bola abierta $B^m_\epsilon(f(a)) \subset \mathbb{R}^m$ de centro $f(a)$ y radio ϵ, existe otra bola abierta $B^n_\delta(a) \subset \mathbb{R}^n$ de centro a y radio δ tal que

$$f(B^n_\delta(a)) \subseteq B^m_\epsilon(f(a))\;,$$

o, equivalentemente,

$$B^n_\delta(a) \subseteq f^{-1}(B^m_\epsilon(f(a)))\;.$$

Esto nos da ya una pista de como generalizar la noción de continuidad a espacios topológicos.

Definición 1.1.8 (Continuidad)**.** *Dados dos espacios topológicos* (X, T_1) *e* (Y, T_2)*, una aplicación* $f\colon X \to Y$ *se dice* ***continua*** *en* x *si la antiimagen* $f^{-1}(U_{f(x)})$ *de cualquier entorno abierto* $U_{f(x)}$ *de* $f(x)$ *es un entorno abierto de* x*. La aplicación* f *se dice* ***continua*** *si lo es en todo punto.*

Es importante observar que *una función* f *es continua si, y solo si, la antiimagen por* f *de cualquier conjunto abierto es también un conjunto abierto.* La definición topológica de continuidad se destaca por su *simplicidad* en comparación con la definición clásica basada en el criterio de $\epsilon : \delta$. Este enfoque alternativo no solo simplifica la comprensión de la continuidad, sino que también alinea la noción con las estructuras topológicas subyacentes, facilitando así su aplicación en diversos contextos matemáticos.

Proposición 1.1.9. *Sean* (X_1, T_1) *y* (X_2, T_2) *dos espacios topológicos, y* $f\colon X \to Y$ *una aplicación. Entonces,* f *es continua si, y solo si, la antiimagen de todo cerrado es cerrado.*

Consideremos dos espacios topológicos (X, T_1) e (Y, T_2). Si $T_2 = T_I$ o $T_1 = T_D$, entonces todas las funciones $f\colon X \to Y$ son continuas. Por otro lado, si $T_1 = T_I$ y $T_2 = T_D$, las únicas aplicaciones continuas son las constantes.

Ejemplo 1.1.10 (Topologías inicial y final sobre f)**.** Dados dos espacios topológicos (X_1, T_1) e (Y, T_2), y una aplicación $f\colon X \to Y$, llamaremos:

1. **topología final** a la topología más fina sobre Y de tal manera que f es continua,

2. **topología inicial** a la topología menos fina sobre X de tal manera que f es continua.

Denotaremos a la topología final por T_f, y a la topología inicial por T^f.

Es sencillo comprobar (ejercicio 1.1) que las topologías final e inicial se pueden describir de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
T_f &:= \left\{U \subseteq Y \ : \ f^{-1}(U) \in T_1\right\} ,\\
T^f &:= \left\{f^{-1}(U) \ : \ U \in T_2\right\} .
\end{aligned}
$$

$\diamondsuit$

Estas topologías asociadas a una aplicación f son relevantes cuando se busca construir topologías que cumplan que ciertas funciones sean continuas.

Ejemplo 1.1.11 (Subespacio)**.** Dado un espacio topológico (X, T), cualquier subconjunto $S \subseteq X$ se puede dotar de forma natural de una topología T_S, llamada ***topología de subespacio*** o ***topología inducida***, tomando como abiertos de S a la intersección con S de cada uno de los abiertos en T. En otras palabras, la topología de subespacio es la topología inicial de la inclusión $i_S : S \hookrightarrow X$. $\diamondsuit$

Salvo que se diga lo contrario, en el resto del libro consideraremos que la topología de cualquier subconjunto S de un espacio topológico X es la topología de subespacio.

Proposición 1.1.12. *Sea (X, T) un espacio topológico, y $S \subseteq X$. Entonces, S es abierto si, y solo si, $T_S \subseteq T$.*

Demostración. Observemos que $T_S \subseteq T$ implica que $S \in T_S \subseteq T$, esto es, S es abierto en X. Recíprocamente, si S es abierto en X, la intersección de todo abierto de X con S es abierto en X y, por lo tanto, $T_S \subseteq T$. $\square$

Ejemplo 1.1.13 (Unión e intersección)**.** Sea X un conjunto, y T y $\overline{T}$ dos topologías sobre X. Entonces, la intersección $T \cap \overline{T}$ es una topología en X. Esta topología se llama ***topología intersección***.

Por otro lado, es fácil notar que la unión $T \cup \overline{T}$ no será, en general una topología en X; pues ni la intersección ni la unión de dos elementos de $T \cup \overline{T}$ tienen por qué pertenecer a $T \cup \overline{T}$. De esta manera, se define la ***topología unión*** como la topología menos fina que se puede definir en X y que contiene a $T \cup \overline{T}$. En más detalle, esta topología se obtendrá tomando todas las intersecciones finitas y uniones arbitrarias de los elementos de $T \cup \overline{T}$. En lo sucesivo, para la topología unión adoptaremos la notación $T \cup \overline{T}$ con el fin de simplificar el texto, y evitaremos cualquier ambigüedad diferenciando, cuando sea preciso, entre unión de topologías y unión de conjuntos. $\diamondsuit$

Observemos que las nociones de topología inicial y final se pueden generalizar de la siguiente manera:

Definición 1.1.14 (Topologías inicial y final)**.** *Sea (Y_i, T_i) una familia arbitraria de espacios topológicos, indexada en un conjunto I. Para cada familia de aplicaciones $\mathcal{F}_I := \{f_i : Y_i \to X\}$ se define la **topología final** de $\mathcal{F}_I$, denotada por $T_{\mathcal{F}_I}$, como la topología más fina sobre X, de tal manera que todas las aplicaciones de $\mathcal{F}_I$ son continuas. Por otro lado, para cualquier familia de aplicaciones $\mathcal{F}^I := \left\{f^i : X \to Y_i\right\}$ se define la **topología inicial** de $\mathcal{F}^I$, denotada por $T^{\mathcal{F}^I}$, como la topología menos fina sobre X, de tal manera que todas las aplicaciones de $\mathcal{F}^I$ son continuas*

Las topologías final e inicial de las familiar $\mathcal{F}_I$ y $\mathcal{F}^I$ están dadas por

$$T_{\mathcal{F}_I} := \cap_{i\in I} T_{f_i} \,,$$
$$T^{\mathcal{F}^I} := \cup_{i\in I} T^{f_i} \,.$$

Dados dos espacios topológicos (X, T_1) e (Y, T_2), las proyecciones $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ y $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$, dadas por

$$\mathrm{pr}_X(x, y) = x\,, \quad \mathrm{pr}_Y(x, y) = y\,,$$

son continuas con la topología producto. De hecho, la topología producto es la topología inicial asociada a la familia de la aplicaciones dada por las proyecciones pr_X y pr_Y.

Definición 1.1.15 (Abierta o cerrada)**.** *Sean (X, T_1) e (Y, T_2) dos espacios topológicos. Una aplicación $f : X \to Y$ se dice **abierta** si $f(U) \in T_2$ para todo abierto $U \in T_1$. Análogamente, se dice que f es **cerrada** si $f(C)$ es cerrado para todo subconjunto cerrado C.*

Observemos que, intuitivamente, ser *abierta* (o *cerrada*) parece ser lo «*opuesto*» a ser continua. De hecho, da la impresión, de cierta manera, de que se está definiendo la *continuidad de la inversa* (en caso de que esta existiera).

Proposición 1.1.16. *Dada una aplicación biyectiva $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos (X, T_1) e (Y, T_2), las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

I) f es abierta,

II) f es cerrada,

III) f^{-1} es continua.

Demostración. Dado que f es biyectiva, para cualquier subconjunto $S \subseteq X$, se tiene

$$f(S^c) = (f(S))^c \,.$$

Esto prueba que I) y II) son equivalentes. Por otro lado, f es abierta si, y solo si, para cada abierto U de X, $f(U)$ es abierto en Y. Dicho de otro modo, teniendo en cuenta de nuevo la biyectividad, $(f^{-1})^{-1}(U)$ es abierto para todo abierto U de X, esto es, f^{-1} es continua. □

Definición 1.1.17 (Homeomorfismo)**.** *Sean (X, T_1) e (Y, T_2) dos espacios topológicos. Una aplicación $f : X \to Y$ es un* ***homeomorfismo*** *si es continua, biyectiva y su inversa es continua. Si tal aplicación existe, X e Y se dicen espacios* ***homeomorfos****.*

En virtud de la proposición anterior, los homeomorfismos preservan abiertos y cerrados. Además, preservan el interior y la frontera.

Teorema 1.1.18. *Sean (X, T_1) e (Y, T_2) dos espacios topológicos, y $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Entonces, para todo subconjunto $S \subseteq X$, se tiene que*

I) $\mathring{\overbrace{f(S)}} = f\left(\mathring{S}\right)$,

II) $\overline{f(S)} = f\left(\overline{S}\right)$,

III) $f(\partial S) = \partial\big(f(S)\big)$.

Demostración. Para demostrar este teorema, hay que tener en cuenta que un homeomorfismo es biyectivo, continuo, y preserva abiertos y cerrados. Comencemos por demostrar I). Dado un subconjunto S de X, $f\left(\mathring{S}\right)$ es abierto. Si consideramos otro abierto U contenido en $f(S)$, se tiene (por continuidad) que $f^{-1}(U)$ es abierto y está contenido en S. Por definición de interior, $f^{-1}(U) \subseteq \mathring{S}$ y, por consiguiente, $f\left(f^{-1}(U)\right) = U \subseteq f\left(\mathring{S}\right)$. Es decir, $f\left(\mathring{S}\right)$ es el mayor abierto contenido en $f(S)$ o, lo que es lo mismo,

$$f\left(\mathring{S}\right) = \mathring{\overbrace{f(S)}}.$$

La prueba de II) es análoga. Por último,

$$\begin{aligned} f(\partial S) &= f\left(\overline{S} \setminus \mathring{S}\right) \\ &= f\left(\overline{S}\right) \setminus f\left(\mathring{S}\right) \\ &= \overline{f(S)} \setminus \mathring{\overbrace{f(S)}} \\ &= \partial f(S) . \end{aligned}$$

□

La noción de homeomorfismo es crucial en topología puesto que son aplicaciones que preservan cualquier propiedad topológica; desde el punto de vista topológico, dos espacios homeomorfos son *indistiguibles*. Esto es análogo a cuando en álgebra lineal dos espacios vectoriales se consideran indistinguibles si son isomorfos, o cuando en álgebra abstracta dos grupos se consideran indistiguibles si son isomorfos. Esta es una idea de suma importancia en muchas áreas de las matemáticas: no importa tanto un objeto en sí, sino la clase de equivalencia de todos los objetos que comparten las mismas propiedades relevantes para la cuestión que se está estudiando (su topología, su estructura algebraica, su estructura diferenciable, etc.). El concepto de homeomorfismo no solo es central para entender la equivalencia topológica entre espacios, sino que también es esencial para la definición de conceptos nucleares de este texto, como los de variedad topológica y diferencial.

Introduzcamos ahora algunas propiedades fundamentales que nos permiten clasificar los espacios topológicos. En primer lugar, los *axiomas de contabilidad* hacen alusión a la «*cantidad*» de entornos o abiertos que nos permiten generar la topología. En este libro estaremos interesados únicamente en el *segundo axioma de contabilidad.* En los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$, es usual trabajar con bases de la topología dadas por bolas abiertas. Esto permite, entre otras cosas, *dar una base numerable de la topología*, inducida por aquellas bolas cuyo radio es un número racional. El segundo axioma de contabilidad supone una generalización natural de esta propiedad.

Definición 1.1.19 (Segundo axioma de contabilidad)**.** *Un espacio topológico (X, T) es **segundo contable** (o **segundo numerable**) si podemos encontrar una base numerable de la topología.*

La propiedad de ser *segundo contable* aporta grandes beneficios sobre el espacio topológico. Muchas de estas ventajas tienen relación con la noción de *sucesión.* Una ***sucesión*** sobre un espacio topológico se define como una aplicación $x : \mathbb{N} \to X$, y se denota por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de tal manera $x(n) = x_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.1.20 (Convergencia)**.** *Sea (X, T) un espacio topológico, y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión sobre X. Se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** a x, y se denota por $x_n \to x$, si, para todo entorno U_x de x, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$x_n \in U_x \quad \textit{siempre que } n \geq N\,.$$

Desde una perspectiva intuitiva, una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in X$ si, independientemente de cuán cerca estemos de x, siempre encontraremos un número infinito de elementos de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposición 1.1.21. *Sea (X, T) un espacio topológico segundo contable. Entonces, se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

- *Una aplicación $f : X \to Y$ entre espacios topológicos es continua si, y solo si, la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a $f(x)$ siempre que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converja a x.*
- *Dado $C \subseteq X$, se cumple que $x \in \overline{C}$ si, y solo si, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ convergente a x.*
- *Un subconjunto $C \subseteq X$ es cerrado si, y solo si, toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ convergente a x cumple que $x \in C$.*

De esta forma, el segundo axioma de contabilidad nos permite estudiar muchas propiedades utilizando sucesiones convergentes sobre el espacio topológico.

El otro tipo de axiomas que tienen interés, son los *axiomas de separación.* Los axiomas de separación definen condiciones que nos permiten, de manera más o menos restrictiva, «*separar*» puntos del espacio. En el ámbito de este texto, se pone especial énfasis en el axioma $T2$, conocido también como *condición de Hausdorff.* Este axioma es crucial porque garantiza que, para cualquier par de puntos distintos en el espacio, existen entornos abiertos disjuntos que los separan, contribuyendo así a la precisión en el estudio de las propiedades topológicas de los espacios.

Definición 1.1.22 (Hausdorff)**.** *Un espacio topológico* (X, T) *se dice que es* ***Hausdorff*** *(o* ***T2****) si todo par de puntos distintos tiene entornos disjuntos, esto es, para todo* $x, y \in X$*, con* $x \neq y$*, existen sendos entornos* $U \ni x$ *y* $V \ni y$ *tales que*

$$U \cap V = \emptyset\,.$$

De nuevo, una de las propiedades más importantes que cumplen los espacios topológicos Hausdorff tiene relación con las sucesiones del espacio topológico.

Teorema 1.1.23. *En un espacio topológico Hausdorff el límite de toda sucesión convergente es único.*

La relevancia de este resultado subraya la importancia intrínseca de la propiedad de Hausdorff en la estructura de un espacio topológico. En ausencia de esta propiedad, pueden surgir fenómenos notablemente peculiares, como la existencia de múltiples límites para una sucesión dada.

Proposición 1.1.24. *Si* X *es un espacio topológico Hausdorff, entonces el conjunto* $\{x\}$ *es cerrado para todo punto* $x \in X$*.*

De este modo, todo espacio topológico Hausdorff cumple la propiedad, bastante intuitiva, de que todos los puntos del espacio son subconjuntos cerrados. Este es otro resultado interesante asociado a los espacios que cumplen la propiedad de ser Hausdorff, el cual impide que se den situaciones inesperadas.

Asimismo, podemos probar que dados dos espacios topológicos X e Y, si tanto X como Y son Hausdorff (respectivamente, segundo contables) entonces $X \times Y$ con la topología producto también es Hausdorff (respectivamente, segundo contable). La demostración se deja como ejercicio para el lector (ejercicio 1.3).

A parte de ser *cerrado* o *abierto*, hay otras muchas propiedades que pueden cumplir los subconjuntos de un espacio topológico dado. La primera de estas características que se va a presentar en la de *conexo.* Intuitivamente, un espacio será conexo si es «*indivisible*», esto es, no es posible separarlo en dos partes. Resulta altamente productivo para el lector que tiene este libro como herramienta de aprendizaje, pararse un momento en este punto hacerse la siguiente pregunta:

Disponiendo únicamente de un conjunto X y su topología T, *¿cómo formalizaría esta idea intuitiva de «estar hecho de una sola pieza»?*

Definición 1.1.25 (Conexo)**.** *Sea (X, T) un espacio topológico. Un espacio es* ***conexo*** *cuando los únicos subconjuntos abiertos y cerrados al mismo tiempo son el vacío y el total.*

Uno puede imaginar un espacio topológico (X, T) que *no es de una sola pieza* como, al menos, dos piezas separadas. Dicho de otra manera, $X = A \sqcup B$, con $A, B \neq \emptyset$. Además, se ha de cumplir que $A = \overline{A}$ y $B = \overline{B}$ (de no ser así, habría puntos frontera $x \in \partial A$ con $x \notin A$ o $x \in \partial B$ con $x \notin B$, de modo que no habría una clara división de X en dos partes). Entonces, A y B son cerrados. Además, $A^c = B$ y $B^c = A$, es decir, A y B también son abiertos. Por lo tanto, X se divide en dos «*partes*» que son tanto abiertas, como cerradas.

Proposición 1.1.26. *Un espacio topológico X es conexo si, y solo si, no existen dos abiertos (o dos cerrados) cuya unión sea X y cuya intersección sea el vacío.*

Notemos que la propiedad de ser *conexo*, aunque puede parecer muy geométrica, depende fuertemente de la topología del espacio. De hecho, sea X un conjunto arbitrario. Si consideramos la topología indiscreta T_I, únicamente hay dos abiertos en la topología y, por lo tanto, X es inmediatamente conexo. Por otro lado, si tomamos la topología discreta T_D, todos los puntos son al mismo tiempo abiertos y cerrados y, por lo tanto, X no es conexo (salvo que conste de un único punto).

Definición 1.1.27. *Sea (X, T) un espacio topológico. Un subconjunto S de X se dirá* ***conexo*** *si lo es con la topología de subespacio.*

Sean S y F dos subconjuntos conexos de X tales que $S \cap F \neq \emptyset$. Supongamos que existen dos abiertos no vacíos A y B de X tales que

$$(A \cap (S \cup F)) \sqcup (B \cap (S \cup F)) = S \cup F \neq \emptyset\,.$$

Entonces, las situaciones posibles son las que siguen:

I) $S \subseteq A$. Entonces, $A \cap F$ y $B \cap F$ son abiertos no vacíos de F, y

$$F = (A \cap F) \sqcup (B \cap F)\,,$$

lo que contradice el hecho de que $\overline{S}$ sea conexo.

II) $S \neq A \cap S \neq \emptyset$. Luego,

$$S = (A \cap S) \sqcup (B \cap S)\,,$$

y $B \cap S \neq \emptyset$. De nuevo, esto contradice el hecho de que S sea conexo.

III) $A \cap S = \emptyset$. Entonces, $S \subseteq B$, y resulta en una situación análoga a la primera.