

Índice

Notación	iii
Prólogo	v
1 Preliminares	1
1.1 Introducción	1
1.2 Lema de Zorn	1
1.3 Espacios vectoriales	7
1.4 Bases en espacios vectoriales y dimensión	15
1.5 Aplicaciones lineales	17
1.6 Topología en $\mathbb{R}^N$	20
1.7 Desigualdades en $\mathbb{R}^N$	22
1.7.1 Desigualdad de Young	22
1.7.2 Desigualdad de Hölder en $\mathbb{R}^N$	23
1.7.3 Desigualdad triangular o de Minkowski en $\mathbb{R}^N$	24
1.8 Ejercicios	25
2 Espacios topológicos	29
2.1 Introducción	29
2.2 Espacio topológico: definición	30
2.3 Espacio métrico	36
2.4 Funciones continuas	53
2.5 Conjuntos compactos	56
2.6 Teorema de Baire	60
2.7 Ejercicios	62
3 Integral de Lebesgue	69

3.1	Introducción	69
3.2	Espacio medible	70
3.3	Medida. Espacio de medida	76
3.4	Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$	83
3.5	Función medible	91
3.6	T^{ma} de la convergencia monótona. T^{ma} de la convergencia dominada	100
3.7	Ejercicios	103
4	Espacios de Banach	109
4.1	Introducción	109
4.2	Espacios normados	110
4.3	Espacios de Banach	127
4.4	Base de Schauder en un espacio de Banach	134
4.5	Funciones continuas entre espacios de Banach	138
4.6	Teorema de la aplicación Abierta	148
4.7	Teorema de Hahn Banach: forma analítica	153
4.8	Espacios de Banach separables	156
4.9	Teorema de Banach-Steinhaus	158
4.10	Espacio dual de un espacio de Banach	160
4.11	Ejercicios	166
5	El espacio de las funciones continuas	179
5.1	Introducción	179
5.2	El espacio de las funciones continuas	181
5.3	El espacio de las funciones continuas en un compacto es un espacio de Banach	183
5.4	Equicontinuidad. Conjuntos compactos en $C(K)$	188
5.5	Teorema de Arzelá-Ascoli	194
5.6	Teorema de Stone-Weierstrass y separabilidad de $C(\overline{\Omega})$	195
5.7	Ejercicios	203
6	Espacios L^p	205
6.1	Introducción	205
6.2	Definición de espacios de Lebesgue: $L^p(\Omega)$	205
6.3	Desigualdad de Hölder en $L^p(\Omega)$	207
6.4	$L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach para $p \in [1, +\infty]$	211
6.5	$L^p(\Omega)$ es un espacio separable para $p \in [1, +\infty)$	214
6.6	Espacio dual de $L^p(\Omega)$	217
6.7	Convergencia en $L^1(\Omega)$ y convergencia puntual	226

6.8	Ejercicios	233
7	Espacios de Hilbert	239
7.1	Introducción	239
7.2	Producto interno	241
7.3	Espacios de Hilbert: Definición	249
7.4	Ortogonalidad	259
7.5	Conjuntos cerrados en espacios de Hilbert	261
7.6	Bases de un espacio de Hilbert	264
7.7	Formulación débil. Convergencia débil	273
7.8	Ejercicios	278
8	Optimización convexa	287
8.1	Introducción	287
8.2	Conjuntos convexos. Teorema de la mejor aproximación	287
8.3	Teorema de la proyección	291
8.4	Ejercicios	293
9	Operadores lineales	297
9.1	Introducción	297
9.2	Operadores lineales y continuos	299
9.3	Teorema de la gráfica cerrada	305
9.4	Teorema de representación Riesz	307
9.5	Operador adjunto. Operadores autoadjuntos	311
9.6	Autovalores y autofunciones	318
9.7	Ejercicios	327
10	Operadores compactos	333
10.1	Introducción	333
10.2	Operadores compactos. Definición	333
10.3	Espectro de operadores compactos	337
10.4	Bases de autofunciones de operadores compactos	352
10.5	Ejercicios	352
	Índice alfabético	355
	Glosario	357
	Bibliografía	359