

Índice

Notación	i
Prólogo	v
1 Preliminares	1
1.1 Introducción	1
1.2 Lema de Zorn	1
1.3 Espacios vectoriales	6
1.4 Aplicaciones lineales	15
1.5 Topología en \mathbb{R}^N	16
1.6 Desigualdades en \mathbb{R}^N	17
1.6.1 Desigualdad de Young	17
1.6.2 Desigualdad de Hölder en \mathbb{R}^N	18
1.6.3 Desigualdad triangular o de Minkowski en \mathbb{R}^N	19
1.7 Ejercicios	20
2 Espacios topológicos	23
2.1 Introducción	23
2.2 Espacio topológico: definición	24
2.3 Espacio métrico	30
2.4 Funciones continuas	43
2.5 Conjuntos compactos	45
2.6 Teorema de Baire	48
2.7 Ejercicios	49
3 Integral de Lebesgue	55
3.1 Introducción	55

3.2	Espacio medible	56
3.3	Medida. Espacio de medida	61
3.4	Medida de Lebesgue en \mathbb{R}^N	65
3.5	Función medible	72
3.6	T^{ma} de la convergencia monótona. T^{ma} de la convergencia dominada	80
3.7	Ejercicios	83
4	Espacios de Banach	89
4.1	Introducción	89
4.2	Espacios normados	90
4.3	Espacios de Banach	103
4.4	Bases en un espacio de Banach	110
4.5	Teorema de Hahn Banach: forma analítica	114
4.6	Espacio de Banach separable	117
4.7	Funciones continuas entre espacios de Banach	119
4.8	Espacio dual de un espacio de Banach	127
4.9	Ejercicios	131
5	El espacio de las funciones continuas	143
5.1	Introducción	143
5.2	El espacio de las funciones continuas	145
5.3	El espacio de las funciones continuas en un compacto es un espacio de Banach	147
5.4	Equicontinuidad. Conjuntos compactos en $C(\overline{\Omega})$	151
5.5	Teorema de Arzelá-Ascoli	158
5.6	Teorema de Stone-Weierstrass. Bases de Schauder en $C(\overline{\Omega})$ y separabilidad	159
5.7	Ejercicios	166
6	Espacios L^p	169
6.1	Introducción	169
6.2	Definición de espacios $L^p(\Omega)$	169
6.3	Desigualdad de Hölder en $L^p(\Omega)$	171
6.4	$L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach	174
6.5	$L^p(\Omega)$ es un espacio separable para $p \in [1, +\infty)$	178
6.6	Espacio dual de $L^p(\Omega)$	180
6.7	Convergencia en $L^1(\Omega)$ y convergencia puntual	188
6.8	Ejercicios	191
7	Espacios de Hilbert	197
7.1	Introducción	197

7.2	Producto interno	199
7.3	Espacios de Hilbert: Definición	207
7.4	Ortogonalidad	214
7.5	Conjuntos cerrados en espacios de Hilbert	216
7.6	Bases de un espacio de Hilbert	219
7.7	Convergencia débil	229
7.8	Ejercicios	233
8	Optimización	241
8.1	Introducción	241
8.2	Conjuntos convexos. Teorema de la mejor aproximación	241
8.3	Teorema de la proyección	245
8.4	Ejercicios	247
9	Operadores lineales	251
9.1	Introducción	251
9.2	Operadores lineales y continuos	253
9.3	Teorema de representación Riesz	263
9.4	Operador adjunto. Operadores autoadjuntos	266
9.5	Autovalores y autofunciones	273
9.6	Ejercicios	280
10	Operadores compactos	285
10.1	Introducción	285
10.2	Operadores compactos	286
10.3	Autovalores de operadores compactos	287
10.4	Bases de autofunciones de operadores compactos	296
10.5	Ejercicios	297
11	Series trigonométricas	299
11.1	Introducción	299
11.2	Definición y propiedades	300
11.3	Desigualdad de Bessel	302
11.4	Identidad de Parseval	304
11.5	Lema de Riemann-Lebesgue	306
11.6	Series trigonométricas	307
11.7	Ejercicios	312
12	Transformada de Fourier	317

12.1	Introducción	317
12.2	Definición y propiedades	318
12.3	La transformada de Fourier N -dimensional	326
12.4	Ejercicios	331
	Índice alfabético	335
	Glosario	337
	Bibliografía	339