Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introducción

Se presentan en este capítulo una serie de resultados que no son específicos del análisis funcional pero sí necesarios para comprender el resto del texto. La siguiente sección está dedicada al lema de Zorn, también conocido por lema de Kuratowski-Zorn, que garantiza la existencia de elementos maximales en determinados conjuntos y es una pieza fundamental en las demostraciones de algunos resultados que se estudian con posterioridad. No se ha incluido la demostración del lema, pero sí la referencia donde encontrar sus detalles. El capítulo también contiene resultados de álgebra lineal (secciones 1.3 y 1.4) y de análisis de varias variables (secciones 1.5 y 1.6) que se utilizan con frecuencia en el texto y son estudiados en cursos previos de álgebra y análisis. El estudiante que domine estos conceptos puede omitir las secciones mencionadas.

1.2 Lema de Zorn

Algunos problemas de análisis se reducen a encontrar elementos maximales de conjuntos sobre los que se ha definido una relación de orden. El lema de Zorn garantiza la existencia de estos elementos maximales bajo determinadas hipótesis. Antes de enunciar el lema se presentan algunos conceptos básicos sobre conjuntos y relaciones.

Definición 1.1. Relación. *Sean X e Y dos conjuntos no vacíos, decimos que $\mathcal{R}$ es una relación entre X e Y si es un subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$. Para $x \in X$ e $y \in Y$, utilizamos la expresión "x se relaciona con y" si $(x, y) \in \mathcal{R}$ y escribimos "$x \, \mathcal{R} \, y$".*

Definición 1.2. Relación de orden. *Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{R}$ una relación en X. Decimos que $\mathcal{R}$ es una relación de orden si satisface las propiedades:*

1. *Reflexiva. Todo elemento $x \in X$ se relaciona consigo mismo: $x\mathcal{R}x$, para todo $x \in X$.*
2. *Antisimétrica. Para cualesquiera dos elementos $x, y \in X$ tales que $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x$, entonces $x = y$.*
3. *Transitiva. Para cualesquiera tres elementos $x, y, z \in X$ tales que $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, entonces $x\mathcal{R}z$.*

Si para cualesquiera dos elementos $x, y \in X$, o bien $x\mathcal{R}y$ o bien $y\mathcal{R}x$, decimos que $\mathcal{R}$ es una relación de orden total.

Ejercicio 1.3. *Sea X un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación de orden definida en X. Comprobar que $\mathcal{R}'$, definida por*

$$x\mathcal{R}'y \quad si \quad y\mathcal{R}x,$$

es una relación de orden.
Solución: *Comprobamos que $\mathcal{R}'$ satisface las propiedades: reflexiva, antisimétrica y transitiva. Para ello tomamos $x, y, z \in X$.*

1. *Reflexiva. Por ser $\mathcal{R}$ reflexiva se satisface que $x\mathcal{R}x$ para todo $x \in X$. De este modo $x\mathcal{R}'x$.*
2. *Antisimétrica. Sean $x, y \in X$ tales que $x\mathcal{R}'y$ e $y\mathcal{R}'x$, aplicamos la definición de $\mathcal{R}'$ y resulta $y\mathcal{R}x$ y $x\mathcal{R}y$. Por ser $\mathcal{R}$ una relación de orden, $\mathcal{R}$ satisface la propiedad antisimétrica y resulta que $x = y$ y prueba que $\mathcal{R}'$ es antisimétrica.*
3. *Transitiva. Si $x\mathcal{R}'y$ e $y\mathcal{R}'z$ aplicando la definición de $\mathcal{R}'$ resulta: $z\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x$, por ser $\mathcal{R}$ una relación de orden, $\mathcal{R}$ satisface la propiedad transitiva y por tanto: $z\mathcal{R}x$. Aplicamos de nuevo la definición de $\mathcal{R}'$ para obtener que $x\mathcal{R}'z$, que prueba la transitividad de $\mathcal{R}'$.*

Por cumplir las propiedades anteriores, $\mathcal{R}'$ es una relación de orden. $\square$

Ejercicio 1.4. *Sea X un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación de orden definida en X. Entonces $\mathcal{R}$ es una relación de orden en cualquier subconjunto no vacío de X.*
La demostración es una comprobación directa de las propiedades de relación de orden. Se dejan al lector los detalles. $\square$

Definición 1.5. Conjunto totalmente ordenado. *Sea X un conjunto dotado de una relación de orden que denotamos con el símbolo "$\leq$". Decimos que un subconjunto $Y \subset X$ está "totalmente ordenado", si para cualesquiera elementos y_1, $y_2 \in Y$, o bien $y_1 \leq y_2$ o bien $y_2 \leq y_1$.*

Definición 1.6. Cota superior. *Sea "$\leq$" una relación de orden en X e Y un subconjunto de X. Decimos que $x \in X$ es una "cota superior" de Y, si para todo $y \in Y$ se verifica: $y \leq x$.*

Definición 1.7. Elemento maximal. *Sea "$\leq$" una relación de orden en X, decimos que $m \in X$ es un "elemento maximal" de X, si para todo $x \in X$, tal que $m \leq x$, se tiene necesariamente $x = m$.*

Se presenta a continuación el lema de Zorn[1].

Lema de Zorn

Lema 1.8. *Sea X un conjunto no vacío sobre el que se define una relación de orden "$\mathcal{R}$". Si todo subconjunto de X totalmente ordenado admite una cota superior, entonces existe al menos un elemento maximal de X.*

Observación 1.9. *De manera análoga a las definiciones de cota superior y elemento maximal, introducimos los conceptos de cota inferior de un subconjunto y elemento minimal:*
Dada una relación de orden "$\leq$" en un conjunto X, decimos que z es una "cota inferior" de un subconjunto $Y \subset X$ cuando se satisface $z \leq y$, para todo $y \in Y$.
Decimos que w es un "elemento minimal" de un conjunto ordenado X si para todo $x \in X$, tal que $x \leq w$, se tiene necesariamente $x = w$.
Dada una relación de orden "$\leq$" se define la relación opuesta, que denotamos por "$\geq$":

$$x \geq y, \quad \text{si y solo si } y \leq x.$$

El Ejercicio 1.3 muestra que la relación "$\geq$" es una relación de orden. Además, todo elemento minimal de $(X, \leq)$ es un elemento maximal de $(X, \geq)$. De forma análoga, toda cota inferior de $(X, \leq)$ es una cota superior de $(X, \geq)$ y viceversa. De este modo, interpretamos el lema de Zorn en términos de cota inferior y elemento minimal:
Sea X un conjunto no vacío sobre el que se define una relación de orden "$\mathcal{R}$" que satisface la propiedad: "Todo subconjunto totalmente ordenado de X admite una cota inferior"; entonces X admite un elemento minimal.

Ejemplo 1.10. *Se considera el conjunto formado por los subconjuntos no vacíos de números naturales $\mathbb{N}$ y la relación $\subseteq$, definida por*

$$A \subseteq B, \text{ si para todo } n \in A, \text{ se satisface } n \in B$$

para cualesquiera subconjuntos A y B no vacíos de $\mathbb{N}$.
Aplicar el lema de Zorn para comprobar la existencia de un elemento maximal.
Solución: *Denotamos por X el conjunto indicado en el enunciado y comprobamos que se satisfacen las hipótesis del lema de Zorn:*

[1] El lema de Zorn fue demostrado por M. Zorn en 1935. Existen versiones anteriores con enunciados equivalentes, entre ellos, el presentado por K. Kuratowski en 1922. La demostración puede consultarse, entre otras referencias, en Lewin [9].

1. *El conjunto es no vacío:*
   El conjunto de los números naturales "$I\!N$" pertenece a X.

2. *La relación $\subseteq$ es una relación de orden y por tanto el conjunto está parcialmente ordenado.*
   Se dejan al lector los detalles que comprueban que la inclusión $\subseteq$ cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

3. *Todo subconjunto totalmente ordenado de X admite una cota superior.*
   Dada una cadena no vacía de subconjuntos de $I\!N$, el conjunto de todos los números que pertenecen a alguno de los conjuntos de la cadena es un subconjunto de $I\!N$ y una cota superior de la cadena.

Se verifican por tanto las hipótesis del lema de Zorn que prueba la existencia de un elemento maximal en X. □

Ejemplo 1.11. *Se considera el conjunto X de los subconjuntos no vacíos de números naturales (ver Ejercicio 1.10) y la relación "$\supseteq$" definida por*

$$A \supseteq B, \text{ si para todo } b \in B, \text{ se satisface } b \in A$$

para cualesquiera subconjuntos A y B no vacíos de $I\!N$.
Estudiar si es posible aplicar el lema de Zorn para encontrar un elemento maximal.
Solución: *No es posible aplicar el lema de Zorn ya que la cadena de subconjuntos*

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \cdots$$

donde $A_m = \{n \in I\!N, \ m \leq n\}$ no admite una cota superior en X ya que $\emptyset \notin X$. □

Ejemplo 1.12. *Se considera el conjunto*

$$C = \{(x, y) \in I\!R^2, \quad \text{tales que } |x| + |y| \leq 1\}$$

y la relación

$$(x_1, y_1) \lhd (x_2, y_2), \quad \text{si } x_1 \leq x_2 \text{ e } y_1 \leq y_2.$$

Sabiendo que la relación, "$\lhd$", es una relación de orden, comprobar que se satisfacen las hipótesis del lema de Zorn y encontrar al menos 2 elementos maximales que pertenecen a C. Estudiar si es posible aplicar el lema de Zorn en el conjunto

$$C' = \{(x, y) \in I\!R^2, \quad \text{tales que } |x| + |y| < 1\}.$$

Solución: *Tomamos una cadena de elementos del conjunto*

$$(x_1, y_1) \lhd (x_2, y_2) \lhd \cdots \lhd (x_n, y_n) \cdots$$

y observamos que la sucesión $\{x_n\}$ es creciente y acotada por 1, por lo que converge a un elemento $x \leq 1$. De igual forma obtenemos que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converege a $y \leq 1$. Además, por ser $|x_n|+|y_n| \leq 1$, tomando límites cuando $n \to +\infty$ se obtiene que $|x|+|y| \leq 1$. De este modo, para todo subconjunto totalmente ordenado existe una cota superior $(x, y) \in C$. Se satisfacen las hipótesis del lema y por lo tanto, existe al menos un elemento maximal. Los elementos $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son elementos maximales. Para finalizar, comprobamos que el conjunto de puntos $(0, \frac{n-1}{n}) \subset C'$ no tiene una cota superior en C' y por tanto no es posible aplicar el lema. □

En la siguiente definición recordamos el concepto de recubrimiento; para ello, utilizamos la noción de "conjunto de subíndices", que puede ser el de los números naturales; cualquier subconjunto de estos o incluso conjuntos no numerables, como $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ entre otros.

Definición 1.13. Recubrimiento de un conjunto. *Sea X un conjunto; A un subconjunto de X; $\mathcal{J}$ un conjunto de subíndices y $\Sigma = \{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ una colección de conjuntos de X. Decimos que Σ es un recubrimiento de A, si para cada elemento $x \in A$, existe al menos un conjunto $A_j \in \Sigma$ tal que $x \in A_j$.*

Definición 1.14. Subrecubrimiento de un conjunto. *Sea A un conjunto y $\Sigma = \{A_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ un recubrimiento de A, donde $\mathcal{J}$ es un conjunto de subíndices. Decimos que un subconjunto de Σ es un subrecubrimiento de A, si es un recubrimiento de A.*

Partes de un conjunto

Definición 1.15. *Para todo conjunto X se define el conjunto de las* "partes de X" *como el de los subconjuntos de X, incluidos el conjunto vacío y el conjunto X. Dicho conjunto se denota por $\mathcal{P}(X)$.*

Ejemplo 1.16. *Sea X un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación definida en $\mathcal{P}(X)$:*

$$x\mathcal{R}y, \text{ si y solo } x \subset y.$$

Sabiendo que $\mathcal{R}$ es una relación de orden, comprobar que se cumplen las hipótesis del lema de Zorn y encontrar un elemento maximal y otro minimal de $\mathcal{P}(X)$.

Solución: *El conjunto $X \in \mathcal{P}(X)$ es una cota superior de cualquier cadena de conjuntos contenidos en $\mathcal{P}(X)$ y $\emptyset$ una cota inferior. $\mathcal{R}$ una relación de orden, se cumplen por tanto las hipótesis del lema de Zorn, que prueba la existencia de un elemento maximal y otro minimal. El lema no indica si estos elementos son únicos ni la manera de encontrarlos, sin embargo, por ser X una cota superior y $\emptyset$ una cota inferior de todas las cadenas obtenemos que X es un elemento máximal de $\mathcal{P}(X)$ y el conjunto vacío un elemento minimal.* □

Definición 1.17. Relación de equivalencia. *Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{R}$ una relación definida en X. Decimos que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia si satisface las propiedades:*

1. *Reflexiva. Todo elemento* $x \in X$ *se relaciona consigo mismo:* $x\mathcal{R}x$, *para todo* $x \in X$.

2. *Simétrica. Dados dos elementos* $x, y \in X$ *tales que* $x\mathcal{R}y$, *entonces* $y\mathcal{R}x$.

3. *Transitiva. Dados tres elementos* $x, y, z \in X$ *tales que:* $x\mathcal{R}y$, *e* $y\mathcal{R}z$, *entonces* $x\mathcal{R}z$.

Definición 1.18. Clases de equivalencia. Conjunto cociente. *Sea "*$\mathcal{R}$*" una relación de equivalencia definida en un conjunto* X. *Las clases de equivalencia de* $\mathcal{R}$ *son los subconjuntos de* X *formados por elementos que se relacionan entre sí. Dado un elemento* $x \in X$, *denotamos por* $[x]$ *la clase de equivalencia de* x*:*

$$[x] = \{y \in X \text{ tales que } x\mathcal{R}y\}.$$

El conjunto de las clases de equivalencia de X *respecto de la relación* $\mathcal{R}$ *se denomina conjunto cociente y se denota por* $X/\mathcal{R}$.

1.3 Espacios vectoriales

Para hacer este texto lo más autocontenido posible se incluyen en esta sección las definiciones y resultados básicos sobre espacios vectoriales que se utilizarán en capítulos posteriores. Todo el contenido de esta sección aparece en los cursos introductorios de álgebra lineal y puede omitirse si el lector domina la materia.

Definición 1.19. Operación interna. *Dado un conjunto no vacío* X *y una operación*

$$\cdot : X \times X \to X$$

decimos que " $\cdot$ *" es una operación interna, si para cualesquiera dos valores* $x, y \in X$, *el resultado de la operación pertenece a* X*:*

$$x \cdot y \in X, \qquad \text{para todo } x, y \in X.$$

Ejemplo 1.20. *La operación "* $\cdot$ *"* producto *de dos números definida sobre el conjunto de los números naturales y la operación* suma *"*$+$*" definida sobre el conjunto de los números racionales* $\mathbb{Q}$, *son operaciones internas en* $\mathbb{N}$ *y* $\mathbb{Q}$ *respectivamente.* $\square$

Definición 1.21. Grupo. *Dado un conjunto no vacío* G *y una operación interna "* $\cdot$*" decimos que el par* $(G, \cdot)$ *es un grupo si para todo* $\alpha, \beta, \gamma \in G$ *se satisfacen las propiedades:*

1. *Asociativa:* $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$;

2. *Elemento neutro. Existe un elemento, que denotamos por* 1_G, *tal que* $1_G \cdot \alpha = \alpha \cdot 1_G = \alpha$, *para todo* $\alpha \in G$;

3. *Elemento inverso o simétrico (denotado mediante el exponente* -1*): para todo* $\alpha \in G$ *existe* $\alpha^{-1} \in G$ *ta que* $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1_G$.

Si además la operación es conmutativa, es decir, para todo $\alpha, \beta \in G$ *se satisface* $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$*; decimos que* $(G, \cdot)$ *es un grupo conmutativo.*

Ejemplo 1.22. *El conjunto de los números complejos* $z = x + iy$ *tales que* $x^2 + y^2 = 1$ *con la operación producto:*

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

es un grupo conmutativo. □

Definición 1.23. Cuerpo. *Dado un conjunto* $\mathbb{K}$ *y dos operaciones internas* $(+, \cdot)$*, decimos que* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *es un cuerpo si:*

- $(\mathbb{K}, +)$ **es un grupo conmutativo,** *es decir: para todo* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ *se satisfacen las propiedades*

  1. *Asociativa:* $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
  2. *Elemento neutro (denotado por* 0*): Satisface* $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$;
  3. *Elemento simétrico (precedido por el signo* $-$*): para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$ *existe un elemento* $-\alpha \in \mathbb{K}$ *tal que* $\alpha + (-\alpha) = -\alpha + \alpha = 0$;
  4. *Conmutativa:* $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

- $(\mathbb{K} - \{0\}, \cdot)$ **es un grupo conmutativo,** *es decir: para todo* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ *se satisface:*

  1. *Asociativa:* $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$;
  2. *Elemento neutro (denotado por* 1*): Satisface* $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$;
  3. *Elemento simétrico (denotado por el exponente* -1*): para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$ *existe* $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$, $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$;
  4. *Conmutativa:* $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

  La operación " $\cdot$ *" es distributiva respecto de la operación* $+$ *en* $\mathbb{K}$*, es decir, para todo* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ *se satisface:*

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

Ejemplo 1.24. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(I\!R, +, \cdot)$ *son cuerpos, sin embargo,* $(I\!N, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *no lo son.* □

Definición 1.25. Espacios vectoriales. *Decimos que un conjunto X es un espacio vectorial definido sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, si existen dos operaciones: una interna entre dos elementos de X, que llamamos "suma" y denotamos con el símbolo "$+$"*

$$+ : X \times X \to X,$$

y otra externa, entre un elemento de $\mathbb{K}$ y otro de X que llamamos "producto" y denotamos con el símbolo "$\cdot$"

$$\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$$

que verifican:

1. *La operación suma "$+$" de elementos de X cumple las propiedades:*
   - *Elemento neutro. Existe un elemento de X, que denotamos por 0_X, tal que para todo $x \in X$ se verifica $x + 0_X = x$.*
   - *Elemento opuesto. Para todo $x \in X$, existe un elemento de X, que denotamos por $-x$, tal que, $x + (-x) = 0$.*
   - *Conmutativa. Para cualesquiera elementos $x, y \in X$, se satisface $x + y = y + x$.*
   - *Asociativa. Sean $x, y, z \in X$, entonces $x + (y + z) = (x + y) + z$.*
2. *La operación producto de un elemento de $\mathbb{K}$ por un elemento de X satisface las propiedades:*
   - *Elemento neutro. Existe un elemento de $\mathbb{K}$, que denotamos por $1_{\mathbb{K}}$, que verifica $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$, para todo $x \in X$.*
   - *Propiedad asociativa. Para cualesquiera α y β elementos de $\mathbb{K}$ y para cualquier $x \in X$, se satisface $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$.*
   - *Propiedad distributiva respecto de la suma de elementos de X. Para cualquier $\alpha \in \mathbb{K}$ y para cualesquiera $x, y \in X$, se cumple $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.*
   - *Propiedad distributiva respecto de la suma de elementos de $\mathbb{K}$. Para cualesquiera α, β elementos de $\mathbb{K}$ y para cualquier $x \in X$, se verifica $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.*

Observación 1.26. *Por simplicidad, y si no se especifica lo contrario, a lo largo del libro se considera que el cuerpo $\mathbb{K}$ es el de los números reales o complejos.*

Observación 1.27. *A los elementos de $\mathbb{K}$ los llamamos escalares y a los de X vectores.*

Observación 1.28. *Por simplicidad en la notación y cuando no haya lugar a confusión se eliminará el símbolo "$\cdot$" en la operación producto por un escalar.*

Ejercicio 1.29. *Sea X un espacio vectorial definido sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Demostrar que cualquier combinación lineal finita de elementos de X pertenece a X.*

Solución: *Procedemos por inducción y consideramos en primer lugar un único vector $x_1 \in X$. Se define*

$$y_1 = \alpha_1 x_1$$

para $\alpha_1 \in \mathbb{K}$. Por ser X un espacio vectorial, el producto de un vector por un escalar pertenece a X y por tanto $y_1 \in X$. Suponemos que la propiedad es cierta para la combinación lineal de $k-1$ vectores y comprobamos que

$$y_n = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1} + \alpha_k x_n$$

pertenece a X. Por hipótesis de inducción, $y_{n-1} = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1} \in X$, y expresamos y_n como suma de dos elementos de X de la forma

$$y_n = y_{n-1} + \alpha_n x_n.$$

Dado que $\alpha_n \in \mathbb{K}$ y $x_n \in X$, resulta que $\alpha_n x_n \in X$. Por tanto y_n es suma de dos elementos de X. Por ser X un espacio vectorial, se obtiene que $y_n \in X$. Aplicamos el principio de inducción para obtener el resultado deseado. $\square$

Ejercicio 1.30. *Sea $N \in \mathbb{N}$ y Ω un conjunto de $\mathbb{R}^N$. Comprobar que el conjunto de las funciones continuas definidas en Ω y con valores reales, $C(\Omega)$, es un espacio vectorial.*

Solución: *Comprobamos que se satisfacen las propiedades de la Definición 1.25. Para ello consideramos dos funciones: $f, g \in C(\Omega)$ y la operación suma de dos funciones "$+$", "$f+g : \Omega \to \mathbb{R}$" definida por la función*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

"$f+g$" está definida de forma única por estarlo las funciones f y g. Además, por ser f y g continuas, para todo $x \in \Omega$, y para todo $\epsilon > 0$ existen δ_1 y δ_2 tales que

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2},\ \textit{si } |x-y| < \delta_1;\ |g(x) - g(y)| < \frac{\epsilon}{2},\ \textit{si } |x-y| < \delta_2,$$

gracias a las propiedades del valor absoluto,

$$|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2},\ \textit{si } |x-y| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

que prueba la continuidad de $f+g$. Es fácil comprobar que se satisfacen las siguientes propiedades:

1. *El elemento neutro de la operación suma es la función que asigna a cada $x \in \overline{\Omega}$ el valor 0, ya que $f(x) + 0 = f(x)$ para toda función $f \in C(\Omega)$ y para todo $x \in \Omega$.*

2. *El elemento opuesto de la función f es la función $-f$.*

3. *Propiedad conmutativa. La propiedad se cumple por cumplir la suma de números reales la propiedad conmutativa:*

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

4. *Propiedad asociativa. Por cumplir la suma de números reales la propiedad asociativa, se satisface*

$$[(f+g)+h](x) = (f+g)(x)+h(x) = f(x)+g(x)+h(x) = f(x)+(g+h)(x) = [f+(g+h)](x)$$

que prueba la propiedad en $C(\Omega)$.

La operación de multiplicación por un número real $\alpha \in I\!R$ de una función $f \in C(\Omega)$, definida por $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, está determinada de forma única por estarlo el producto de dos números reales. Es fácil comprobar que αf es una función continua, basta sustituir en la definición de función continua el valor de δ por $\alpha\delta$. Además, se satisfacen las siguientes propiedades:

1. *Elemento neutro. El elemento neutro de la operación producto por un escalar es "1", ya que*

$$1 \cdot f(x) = f(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega, \text{ y para toda función } \ f \in C(\Omega).$$

2. *Propiedad asociativa. Por cumplir el producto de números reales la propiedad asociativa, se satisface*

$$\alpha(\beta f)(x) = \alpha(\beta f(x)) = \alpha\beta f(x) = [(\alpha\beta)f](x), \quad \text{para todo } \alpha, \beta \in I\!R.$$

3. *Propiedad distributiva respecto de la suma:*

$$\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g,$$

que se satisface al cumplir la suma de números reales la propiedad distributiva:

$$\alpha(f+g)(x) = \alpha(f(x)+g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f + \alpha g)(x).$$

4. *Distributiva respecto de la suma de escalares, es decir*

$$(\alpha+\beta)f = \alpha f + \beta f$$

para todo $\alpha, \beta \in I\!R$ y $f \in C(\Omega)$. La propiedad se satisface por ser α, β y $f(x)$ números reales y cumplirse la propiedad en $I\!R$.

$\square$