

# Índice general

<b>I</b>	<b>Álgebra Lineal: Ideas, Resultados, Métodos y Aplicaciones</b>	<b>I</b>
<b>I.1.</b>	<b>Preliminares</b>	<b>1</b>
I.1.1.	Estructuras algebraicas básicas . . . . .	1
I.1.1.1.	Algo de conjuntos . . . . .	1
I.1.1.2.	El concepto de grupo . . . . .	5
I.1.1.3.	El concepto de cuerpo . . . . .	7
I.1.2.	Análisis matricial básico . . . . .	10
I.1.2.1.	Primeras definiciones y propiedades . . . . .	10
I.1.2.2.	Determinante de una matriz . . . . .	12
I.1.2.3.	Matriz inversa . . . . .	15
I.1.2.4.	Rango de una matriz . . . . .	17
I.1.2.5.	Sistemas de ecuaciones lineales . . . . .	17
I.1.2.6.	Factorización $PA = LU$ . . . . .	19
<b>I.2.</b>	<b>Espacios Vectoriales</b>	<b>21</b>
I.2.1.	Concepto de espacio vectorial . . . . .	22
I.2.2.	Subespacios vectoriales . . . . .	27
I.2.3.	La clausura lineal . . . . .	35
I.2.4.	Espacios vectoriales de tipo finito . . . . .	38
I.2.5.	Base y dimensión de un espacio vectorial . . . . .	40
I.2.6.	Métodos de resolución . . . . .	48
I.2.6.1.	Cálculo de coordenadas . . . . .	48
I.2.6.2.	Obtención del vector a partir de las coordenadas . . . . .	50
I.2.6.3.	Estudio de la independencia lineal en espacios de tipo finito . . . . .	50
I.2.6.4.	Estudio de la independencia lineal en el espacio vectorial proto- tipo 5 . . . . .	51
I.2.6.5.	Determinación de bases a partir de sistemas generadores . . . . .	53
I.2.6.6.	Manipulación de subespacios vectoriales . . . . .	56
I.2.6.7.	Manipulación del subespacio vectorial suma . . . . .	58
I.2.6.8.	Manipulación del subespacio vectorial intersección . . . . .	59
I.2.6.9.	Prolongación de bases . . . . .	60

I.2.6.10. Cambio de base . . . . .	61
<b>I.3. Homomorfismos entre Espacios Vectoriales</b>	<b>65</b>
I.3.1. Conceptos y resultados básicos . . . . .	65
I.3.2. Representación matricial de un homomorfismo . . . . .	73
I.3.3. Determinación del núcleo y de la imagen . . . . .	77
I.3.4. Cambio de base en un homomorfismo . . . . .	79
I.3.5. Cambio de base en un endomorfismo . . . . .	79
I.3.6. Diccionario endomorfismos-matrices . . . . .	81
<b>I.4. Diagonalización de Endomorfismos</b>	<b>85</b>
I.4.1. Semejanza de matrices . . . . .	87
I.4.2. Planteamiento del problema de la diagonalización . . . . .	88
I.4.3. Autovalores, autovectores y autoespacios . . . . .	90
I.4.4. Determinación de autovalores . . . . .	96
I.4.5. Segundo teorema de diagonalización . . . . .	99
I.4.6. Algoritmo de diagonalización . . . . .	101
I.4.7. Caso real-complejo . . . . .	105
<b>I.5. Formas Canónicas</b>	<b>107</b>
I.5.1. Forma canónica de Jordan $2 \times 2$ . . . . .	109
I.5.1.1. Caso de raíces en $\mathbb{K}$ . . . . .	109
I.5.1.2. Caso real-complejo . . . . .	111
I.5.2. La Forma canónica de Jordan $n \times n$ . . . . .	112
I.5.2.1. El polinomio mínimo . . . . .	112
I.5.2.2. La matriz $J$ . . . . .	115
I.5.2.3. La matriz de paso $P$ . . . . .	119
I.5.2.4. Cálculo de la matriz de paso $P$ . . . . .	122
I.5.2.5. Un ejemplo general . . . . .	126
I.5.2.6. Algoritmo para el análisis de la forma canónica de Jordan . . . . .	128
I.5.2.7. Caso real-complejo . . . . .	129
I.5.3. Forma canónica real de Jordan . . . . .	131
<b>I.6. Formas Bilineales y Cuadráticas</b>	<b>137</b>
I.6.1. Formas bilineales . . . . .	138
I.6.1.1. Concepto de forma bilineal . . . . .	138
I.6.1.2. Representación matricial y polinomial . . . . .	140
I.6.1.3. Formas bilineales simétricas y antisimétricas . . . . .	145
I.6.2. Formas cuadráticas . . . . .	149
I.6.2.1. Concepto de forma cuadrática . . . . .	149
I.6.2.2. Representación matricial y polinomial . . . . .	153
I.6.2.3. El método de compleción de cuadrados . . . . .	154
I.6.3. Formas cuadráticas reales . . . . .	160

I.6.3.1. Representación canónica de una forma cuadrática . . . . .	161
I.6.3.2. Clasificación. . . . .	164
I.6.4. Formas sesquilineales y cuadráticas hermíticas . . . . .	170
I.6.4.1. Representación matricial y polinomial . . . . .	171
I.6.4.2. Formas sesquilineales hermíticas . . . . .	174
I.6.4.3. Formas cuadráticas hermíticas . . . . .	175
I.6.4.4. Clasificación . . . . .	178
<b>I.7. Espacios Euclídeos y Unitarios</b>	<b>179</b>
I.7.1. Conceptos y resultados básicos . . . . .	180
I.7.2. Ortogonalidad . . . . .	185
I.7.2.1. El complemento ortogonal . . . . .	186
I.7.2.2. Bases ortonormales y bases ortogonales . . . . .	188
I.7.2.3. Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt . . . . .	191
I.7.2.4. Aplicación: la factorización $A=QR$ . . . . .	195
I.7.3. Diagonalización ortogonal . . . . .	198
I.7.3.1. Teorema espectral real . . . . .	198
I.7.3.2. Proceso de diagonalización ortogonal . . . . .	201
I.7.3.3. Aplicación a la diagonalización de formas cuadráticas . . . . .	204
I.7.4. Proyecciones ortogonales . . . . .	207
I.7.4.1. Cálculo de la proyección de un vector . . . . .	207
I.7.4.2. Matriz de proyección . . . . .	211
I.7.4.3. Aplicación al problema de los mínimos cuadrados . . . . .	212
I.7.5. Espacios unitarios . . . . .	214
<b>I.8. Cónicas y Cuádricas</b>	<b>219</b>
I.8.1. El concepto de espacio afín . . . . .	220
I.8.2. Cónicas . . . . .	221
I.8.2.1. Cónicas. Estudio particular. . . . .	221
I.8.2.2. Obtención de la ecuación reducida de una cónica. . . . .	224
I.8.2.3. Invariantes métricos de las cónicas. . . . .	228
I.8.2.4. Clasificación de las cónicas en función del número de centros. Coeficientes de la ecuación reducida. . . . .	229
I.8.2.5. Clasificación de las cónicas en función de los invariantes. . . . .	231
I.8.2.6. Clasificación de las cónicas mediante compleción de cuadrados. . . . .	235
I.8.3. Cuádricas . . . . .	238
I.8.3.1. Cuádricas. Estudio particular. . . . .	238
I.8.3.2. Obtención de la ecuación reducida de una cuádrlica. . . . .	243
I.8.3.3. Invariantes métricos de las cuádrlicas. . . . .	245
I.8.3.4. Clasificación de las cuádrlicas en función del número de centros. Coeficientes de la ecuación reducida. . . . .	246
I.8.3.5. Clasificación de las cuádrlicas en función de los invariantes. . . . .	249
I.8.3.6. Clasificación de las cuádrlicas mediante compleción de cuadrados . . . . .	254

<b>I.9. Aplicación a las Ecuaciones Diferenciales</b>	<b>257</b>
I.9.1. Teoría fundamental . . . . .	257
I.9.1.1. Sistemas homogéneos . . . . .	259
I.9.1.2. Sistemas completos . . . . .	262
I.9.1.3. Fórmula de variación de constantes . . . . .	262
I.9.1.4. La ecuación diferencial lineal de orden $n$ . . . . .	264
I.9.2. Sistemas lineales con coeficientes constantes . . . . .	266
I.9.2.1. Exponencial de una matriz: teoría básica . . . . .	266
I.9.2.2. Cálculo de la exponencial de una matriz: caso diagonalizable . . . . .	268
I.9.2.3. Cálculo de la exponencial de una matriz: caso general real . . . . .	268
I.9.2.4. Cálculo de la exponencial de una matriz: caso general complejo . . . . .	270
I.9.2.5. Sistemas planos . . . . .	271
I.9.2.6. Interpretación geométrica de los sistemas planos . . . . .	272
<b>Índice alfabético</b>	<b>277</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>281</b>
<b>II Álgebra Lineal: Problemas y Ejercicios</b>	<b>I</b>
<b>II.1. Preliminares</b>	<b>1</b>
<b>II.2. Espacios Vectoriales</b>	<b>17</b>
<b>II.3. Homomorfismos entre Espacios Vectoriales</b>	<b>49</b>
<b>II.4. Diagonalización de Endomorfismos</b>	<b>71</b>
<b>II.5. Formas Canónicas</b>	<b>125</b>
<b>II.6. Formas Bilineales y Cuadráticas</b>	<b>159</b>
<b>II.7. Espacios Euclídeos y Unitarios</b>	<b>177</b>
<b>II.8. Cónicas y Cuádricas</b>	<b>201</b>
<b>II.9. Aplicación a las Ecuaciones Diferenciales</b>	<b>227</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>239</b>