1 DESARROLLOS EN SERIES DE LAURENT

1.1 INTRODUCTION

Es conocido de un primer curso de variable compleja el desarrollo en serie de potencias de una función holomorfa, ver [5] . Si $f(z)$ es una función holomorfa en un dominio A del plano complejo y $a \in A$ entonces existe un círculo $B(a,r)$ contenido en A de tal forma que $f(z)$ puede ser desarrollada en una serie de potencias de la forma

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + ...,$$

este es el desarrollo en serie de Taylor de $f(z)$ en a.

Supongamos ahora que a es una singularidad aislada de $f(z)$ en A , entonces nosotros podemos extender el Teorema del desarrollo en serie de Taylor en esta situación, en efecto, encontraremos un desarrollo en serie de potencias de $f(z)$ en un círculo perforado $B^*(a,r) = B(a,r) \setminus \{a\}$, pero el desarrollo en serie contendrá en este caso también potencias negativas de $z-a$.

Partiremos de una situación más general, sea $f(z)$ una función holomorfa en una corona ó anillo

$$A(a,r,R) = \{z \mid 0 \leq r < |z-a| < R \leq \infty\} \ ,$$

encontraremos un desarrollo en serie de potencias de $f(z)$ en $A(a,r,R)$ de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n (z-a)^n \ ,$$

que se conoce como el desarrollo en serie de Laurent de la función $f(z)$ en la corona.

La serie

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n (z-a)^n \ ,$$

será llamada la parte regular y la serie

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} c_n (z-a)^{-n} \ ,$$

la parte singular del desarrollo de Laurent.

A este fin probaremos una versión más general de la Fórmula integral de Cauchy.

1.2 FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY EN UNA CORONA

La siguiente proposición proporciona una extensión de la Fórmula integral de Cauchy,

Proposición 1.1. Fórmula integral de Cauchy en una corona. *Sea $f(z)$ holomorfa en $A(a,r,R)$ y sean r_1, r_2 tales que $r < r_1 < r_2 < R$ entonces se tiene*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \ ,$$

para todo z tal que $r_1 < |z-a| < r_2$, donde γ_1, γ_2 son las circunferencias $C(a,r_1), C(a,r_2)$ de centro a y radios r_1, r_2 respectivamente.

Demostración. Consideremos la función compleja dependiendo de dos variables complejas

$$g : A \times A \to A \ , \ A = A(a,r,R) \ ,$$

definida por

$$g(z,\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & si \quad \zeta \neq z \\ \\ f'(z) & \quad\quad \zeta = z \end{cases}$$

y comprobamos que $g(z,\zeta)$ es una función continua en $A \times A$.

En efecto, si $(z,\zeta) \in A \times A$ es tal que $z \neq \zeta$, la continuidad es evidente pues $g(z,\zeta)$ en este punto es un cociente de funciones continuas y el denominador no se anula en este punto.

Consideremos un punto $(\alpha,\alpha) \in A \times A$. De la continuidad de $f'(z)$ en A tenemos que dado un $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que el círculo $B(\alpha,\delta) \subset A$, y para $z \in B(\alpha,\delta)$ se tiene

$$|f'(z) - f'(\alpha)| < \epsilon \ .$$

Dados dos puntos z, ζ en $B(\alpha,\delta)$, si $z = \zeta$, se tiene

$$|g(z,\zeta) - g(\alpha,\alpha)| = |f'(z) - f'(\alpha)| < \epsilon \ ,$$

y si $z \neq \zeta$, el segmento que une estos dos puntos

$$s(t) = (1-t)z + t\zeta \ , \ 0 \leq t \leq 1 \ ,$$

está contenido en el círculo $B(\alpha,\delta)$ se tiene

$$g(z,\zeta) - g(\alpha,\alpha) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - f'(\alpha)$$

$$= \int_0^1 \left[f'(s(t) - f'(\alpha)) \right] dt \ ,$$

y puesto que
$$|f'(s(t)) - f'(\alpha)| < \epsilon \ ,$$
para todo t , $0 \leq t \leq 1$, concluimos también
$$|g(z,\zeta) - g(\alpha,\alpha)| < \epsilon \ .$$

A partir de esta función g definimos una nueva función compleja de variable compleja $h : A \to \mathbb{C}$ mediante
$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} g(z,\zeta)\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} g(z,\zeta)\, d\zeta \ ,$$
y probamos que $h(z)$ es una función analítica en A.

En primer lugar probaremos que $h(z)$ es continua en A y a continuación probaremos que verifica la propiedad triangular en A.

Sea $z \in A$ y $\overline{B}(z,r)$ un círculo cerrado de centro z que está contenido en A. Como $\gamma_1^* \cup \gamma_2^*$ es un compacto, también lo es el producto
$$\overline{B}(z,r) \times (\gamma_1^* \cup \gamma_2^*) \subset A \times A \ ,$$
por tanto la función $g(z,\zeta)$ es uniformemente continua en este conjunto y como consecuencia, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que
$$|g(z,\zeta) - g(z',\zeta)| < \epsilon \quad ,$$
si
$$|z - z'| < \delta \ \text{ y } \ \zeta \in \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \ .$$
De esta relación obtenemos la acotación
$$|h(z) - h(z')| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_1} |g(z,\zeta) - g(z',\zeta)|\, |d\zeta|$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_2} |g(z,\zeta) - g(z',\zeta)|\, |d\zeta| \leq \frac{l(\gamma_1) + l(\gamma_2)}{2\pi} \cdot \epsilon \ ,$$
si $|z - z'| < \delta$. Esto prueba la continuidad de $h(z)$.

Para probar la analiticidad de $h(z)$ en A comprobamos que se verifica la propiedad triangular.

Sea T un dominio triangular cerrado contenido en A , entonces se tiene
$$\int_{\partial T} h(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T}\left(\int_{\gamma_2} g(z,\zeta)\, d\zeta - \int_{\gamma_1} g(z,\zeta)\, d\zeta\right) dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\left(\int_{\partial T} g(z,\zeta)\, d\zeta\right) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\left(\int_{\partial T} g(z,\zeta)\, d\zeta\right) \ ,$$
donde se ha invertido el orden de integración teniendo en cuenta la continuidad de $g(z,\zeta)$ en $\partial T \times (\gamma_1^* \cup \gamma_2^*)$. Ahora, para cada ζ fijo, la función $z \to g(z,\zeta)$

es analítica para $z \neq \zeta$, $z \in A$, y para $z = \zeta$ es continua, por tanto por el Teorema de Cauchy-Goursat so obtiene

$$\int_{\partial T} g(z,\zeta)\, dz = 0 \ ,$$

y por tanto

$$\int_{\partial T} h(z)\, dz = 0 \ ,$$

es decir $h(z)$ cumple la propiedad triangular en A y por tanto es analítica en A.

De la definición de $h(z)$ y $g(z,\zeta)$ se deduce que para $z \in A\backslash\{\gamma_1^* \cup \gamma_2^*\}$ se tiene la relación

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{f(z)}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ &- \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{f(z)}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{d\zeta}{\zeta - z}\right) \ . \end{aligned}$$

Llamamos $h_1(z)$ a la función definida por

$$h_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \ ,$$

que está bien definida para todo $z \in \mathbb{C}\backslash\{\gamma_1^* \cup \gamma_2^*\}$, pues las integrales que aparecen en la definición de $h_1(z)$ tienen sentido para todo $z \notin \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$.

Si llamamos M a la cota de $f(\zeta)$ en $\gamma_1^* \cup \gamma_2^*$, es decir

$$M = \max_{\zeta \in \gamma_1^* \cup \gamma_2^*} |f(\zeta)| \ ,$$

entonces $h_1(z)$ se acota mediante

$$\begin{aligned} |h_1(z)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_2}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|}|d\zeta| + \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma 1}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|}|d\zeta| \\ &\leq \frac{M}{2\pi\rho}\left(l(\gamma_1) + l(\gamma_2)\right) \ , \end{aligned}$$

donde $l(\gamma_1)$, $l(\gamma_2)$ denotan la longitud de las circunferencias γ_1 , γ_2 , es decir

$$l(\gamma_1) + l(\gamma_2) = 2\pi(r_1 + r_2) \ ,$$

y ρ es la distancia de z a $\gamma_1^* \cup \gamma_2^*$

$$\rho = dist(z, \gamma_1^* \cup \gamma_2^*) \ .$$

Si hacemos tender z a infinito entonces $\rho \to \infty$ y por tanto

$$\lim_{z \to \infty} h_1(z) = 0 \ . \tag{1.1}$$

Consideremos ahora los conjuntos $B(a, r_1)$ y $\mathbb{C} \backslash \overline{B}(a, r_2)$.

Es claro que para $z \in B(a, r_1)$ se tiene

$$Ind_{\gamma_1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 1 \ ,$$

y

$$Ind_{\gamma_2}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 1 \ ,$$

y que para $z \in \mathbb{C} \backslash \overline{B}(a, r_2)$

$$Ind_{\gamma_1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0 \ ,$$

y

$$Ind_{\gamma_2}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0 \ ,$$

de tal forma que en ambos casos

$$Ind_{\gamma_1}(z) - Ind_{\gamma_2}(z) = 0 \ ,$$

y podemos concluir

$$h(z) = h_1(z) \ , \tag{1.2}$$

para

$$z \in A \cap \left(B(a, r_1) \cup \left(\mathbb{C} \backslash \overline{B}(a, r_2) \right) \right) \ .$$

Llamando A_0 al conjunto

$$A_0 = B(a, r_1) \cup \left(\mathbb{C} \backslash \overline{B}(a, r_2) \right) \ ,$$

es claro que

$$A \cup A_0 = \mathbb{C} \ ,$$

y podemos definir una función φ entera, es decir analítica en todo el plano mediante

$$\varphi(z) = \begin{cases} h(z) & , \quad z \in A \\ h_1(z) & , \quad z \in A_0 \end{cases} ,$$

es claro que $\varphi(z)$ está bien definida pues por (1.2) , se tiene

$$h(z) = h_1(z) \quad \text{para} \quad z \in A \cap A_0 \ ,$$

y por otro lado por (1.1)

$$\lim_{z \to \infty} \varphi(z) = \lim_{z \to \infty} h_1(z) = 0 \ . \tag{1.3}$$

De (1.3) concluimos por el Teorema de Liouville que $\varphi(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y como consecuencia $h(z)$ es la función nula en A.

Pero esto significa que dado $z \in A$, se tiene

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{f(z)}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ & - \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{f(z)}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right) \ , \end{aligned} \tag{1.4}$$

y teniendo en cuenta que para todo z tal que $r_1 < |z-a| < r_2$ se tiene

$$\frac{f(z)}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0 \quad ,$$

y

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 1 \quad ,$$

concluimos de (1.4) el enunciado de la Proposición 1.1 , es decir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \ .$$

q.e.d.

1.3 SERIE DE LAURENT

La fórmula integral de Cauchy en una corona $A(a, r, R)$ permite obtener el valor de la función $f(z)$ para todo z en la corona mediante un desarrollo en serie de potencias de $(z-a)$ y $(z-a)^{-1}$, este desarrollo en serie es llamado la serie de Laurent de la función en la corona.

Teorema 1.1. Teorema del desarrollo en serie de Laurent. *Sea $f(z)$ una función analítica en la corona*

$$A = A(a, r, R) = \{z \mid r < |z-a| < R\}$$

donde $0 \le r < R \le \infty$. Entonces existen dos desarrollos de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n} \quad ,$$

que son absolutamente convergentes para todo $z \in A$, de tal forma que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad , \tag{1.5}$$

para todo $z \in A(a, r, R)$.

Además esta serie converge uniformemente en toda corona cerrada contenida en A .

Los coeficientes b_n , c_n *vienen dados por*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \quad , \quad n = 0, 1, ..$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1} \quad , \quad n = 1, 2, ..$$

donde γ *es cualquier circunferencia con centro en* a *y radio* ρ *tal que* $r < \rho < R$, *es decir*

$$\gamma(t) = a + \rho e^{it} \ , \ t \in [0, 2\pi] \ .$$

Demostración.

Sean γ_1, γ_2 circunferencias como en la Proposición 1.1 y sea z interior a la circunferencia γ_2 , entonces se tiene

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} \ ,$$

donde la serie converge para cada z fijo y $\zeta \in \gamma_2$. Además la convergencia es absoluta y uniforme en ζ , pues si

$$|z-a| = d < r_2 \ ,$$

se tiene que $\frac{d}{r_2} < 1$ y la serie está mayorada por una geométrica de razón menor que uno.

Si z es exterior a la circunferencia γ_1 , además se tiene

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n} \ ,$$

siendo esta serie convergente para cada z fijo y $\zeta \in \gamma_1$. Además la convergencia es absoluta y uniforme pues si

$$|z-a| = d > r_1 \ ,$$

entonces se tiene $\frac{r_1}{d} < 1$ y la serie está mayorada por una geométrica de razón menor que uno.

Integrando término a término se tiene

$$\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right)(z-a)^n \ ,$$

y análogamente

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)}d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_1}f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta\right)\frac{1}{(z-a)^n} \ .$$

Como los caminos γ_1, γ_2 y γ son $A-$homótopos y las funciones

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad \text{y} \quad f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1} \ , \ \ \zeta \in A \ ,$$

son analíticas en A , se tiene que los coeficientes a_n , b_n

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta = \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \ ,$$

y

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)(\zeta-a)^{n+1} d\zeta = \int_{\gamma_1} f(\zeta)(\zeta-a)^{n+1} d\zeta \ ,$$

quedan bien definidos y se satisface por la Fórmula integral de Cauchy en la corona $A(a, r_1, r_2)$

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)} d\zeta \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \ . \end{aligned}$$

Puesto que dado $z \in A$ podemos encontrar r_1, r_2 tales que $r_1 < |z-a| < r_2$ con $0 < r_1 < r_2 < R$ este desarrollo será válido en A. Queda probar la convergencia uniforme de estas series en una corona cerrada contenida en A .

Sea pues $A(a, r', R')$ con $0 \le r < r' < R' < R \le \infty$ y sean $z_1, z_2 \in A(a, r, R)$ tales que

$$r < |z_1 - a| < r' \ , \ \ R' < |z_2 - a| < R \ .$$

Como $z_2 \in A(a, r, R)$ la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_2 - a)^n \ ,$$

converge absolutamente y la serie de módulos es una mayorante de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n \ ,$$

para $z \in A(a, r', R')$. Análogamente como $z_1 \in A(a, r, R)$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z_1 - a)^{-n} \ ,$$

converge absolutamente y la serie de los módulos es una mayorante de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - a)^{-n} \ ,$$

para $z \in A(a, r', R')$. Concluimos de ambos hechos la convergencia uniforme de la serie (1.5) en la corona $A(a, r', R')$ estrictamente contenida en $A(a, r, R)$. *q.e.d.*

1.4 APLICACIÓN DEL DESARROLLO DE LAURENT AL ESTUDIO DE LAS SINGULARIDADES AISLADAS

Recordamos que un punto $a \in \mathbb{C}$ se dice que es una singularidad aislada de una función $f(z)$ analítica en un abierto $A \subset \mathbb{C}$, si $a \notin A$ pero existe un círculo perforado $B^*(a,r) = B(a,r) \setminus \{a\}$ que está contenido en A.

En la corona $B^*(a,r) = A(a,0,r)$ la función analítica $f(z)$ admitirá un desarrollo de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n} \ ,$$

la parte correspondiente a las potencias negativas de $z-a$, es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n} \ = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z-a)^n} \ ,$$

se denomina parte principal ó parte singular correspondiente a la singularidad en a y el primer coeficiente de esta parte, es decir b_1 , se denomina residuo de $f(z)$ en a .

Con esta terminología obtenemos las siguientes conclusiones sobre la naturaleza de la singularidad aislada de $f(z)$ en a.

Si el desarrollo de Laurent en un círculo perforado $B^*(a,r)$ carece de parte principal, es decir se tiene

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \ \text{ para } z \in B^*(a,r) \ ,$$

entonces $f(z)$ estará localmente acotado en a y se podrá extender por continuidad al punto $z=a$, de tal forma que $f(z)$ será analítica también en a y la singularidad será evitable.

Si el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en un círculo perforado de a tiene una parte principal de m términos, es decir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \frac{b_1}{z-a} + ... + \frac{b_m}{(z-a)^m} \quad \text{, para } z \in B^*(a,r) \ ,$$

entonces la función

$$f(z) - \frac{b_1}{z-a} - ... - \frac{b_m}{(z-a)^m} \ ,$$

tiene una singularidad evitable y por tanto $f(z)$ tendrá un polo de orden m en a.

Finalmente si excluimos los casos anteriores obtenemos el caso de una singularidad esencial en a y ocurre cuando la parte principal de $f(z)$ en a tiene infinitos términos.

Resumimos las anteriores conclusiones en el siguiente teorema.

Teorema 1.2. *Sea a una singularidad aislada en el plano complejo* $\mathbb{C}$ *de la función* $f(z)$ *. Entonces la singularidad en a viene caracterizada de la siguiente manera,*

i) la singularidad en a es una singularidad evitable si el desarrollo de Laurent en un entorno perforado $B^*(a,r)$ *no tiene parte principal,*

ii) la singularidad en a será un polo si la parte principal se reduce a un número positivo finito de términos $m > 0$ *.*

iii) finalmente la singularidad será esencial si la parte principal del correspondiente desarrollo de Laurent contiene infinitos términos no nulos.

1.5 SINGULARIDADES AISLADAS EN INFINITO

Consideremos ahora un conjunto abierto A del plano complejo $\mathbb{C}$, supongamos que A contiene el exterior de un círculo $B(0,r)$ que denotaremos por $B^c(r)$, es decir

$$B^c(r) = B^*(\infty,r) = \mathbb{C} \backslash B(0,r) \ ,$$

y diremos que $B^c(r) = B^*(\infty,r)$ es un círculo perforado centrado en ∞ .

Definición 1.1. *Diremos que una función analítica* $f(z)$ *en un conjunto abierto A del plano complejo tiene una singularidad aislada en* ∞ *si A contiene un círculo perforado* $B^*(\infty,r)$ *y* $f(z)$ *es analítica en él.*

Establecemos la siguiente clasificación de las singularidades en infinito.

Definición 1.2. *Si* $f(z)$ *es una función analítica en un conjunto abierto A del plano complejo de tal forma que* $f(z)$ *tiene una singularidad aislada en* ∞*, entonces consideramos el conjunto B de los inversos de A , es decir*

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{1}{z} \in A \right\} \ ,$$

es claro que B es un conjunto abierto de $\mathbb{C}$ *, y consideramos también la función* $\varphi : B \to \mathbb{C}$ *definida por*

$$\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) \ ,$$

de tal forma que $\varphi(z)$ *es analítica en B y tiene una singularidad aislada en* $z = 0$ *. Entonces diremos que la función* $f(z)$ *tiene en* ∞ *una singularidad evitable, un polo de orden m , ó bien una singularidad esencial, si la función* $\varphi(z)$ *tiene en* $z = 0$ *una singularidad evitable, un polo de orden m ó una singularidad esencial respectivamente.*

Dada una función analítica $f(z)$ en A que tiene ∞ como singularidad aislada de tal forma que existe un círculo perforado $B^*(\infty,r)$ donde $f(z)$ es analítica y por tanto podemos considerar el desarrollo de Laurent en $B^* (\infty, r)$ pues este conjunto puede ser considerado como una corona, en efecto

$$B^* (\infty, r) = A (0, r, \infty) = \{z \mid r < |z| < \infty\} \ ,$$

de tal forma que obtendremos un desarrollo en $B^* (\infty, r)$ de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{z^n} \ .$$

La parte del desarrollo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ ,$$

es decir la parte de las potencias positivas de z , sin el término constante, la llamaremos parte principal de $f(z)$ en el punto singular ∞.

Llamaremos residuo de $f(z)$ en ∞ a $-b_1$. Esta definición del residuo en ∞ es la adecuada para la extensión del Teorema de los Residuos en dominios $A \subset \widehat{\mathbb{C}}$.

Teniendo en cuenta estas definiciones tenemos la siguiente caracterización de las singularidades aisladas en ∞ , análogamente al caso de las singularidades aisladas en $\mathbb{C}$, es válida.

Teorema 1.3. *Si ∞ es una singularidad aislada de $f(z)$ entonces*

i) el punto ∞ es una singularidad evitable si la parte principal de $f(z)$ en ∞ tiene todos los coeficientes nulos, es decir $a_n = 0$ para todo $n > 0$,

ii) el punto ∞ es un polo si la parte principal de $f(z)$ en ∞ tiene un número finito de términos. El polo es de orden m si a_m es el último coeficiente nulo,

iii) el punto ∞ es una singularidad esencial si la parte principal de $f(z)$ en ∞ tiene infinitos términos no nulos.

Con los conceptos introducidos de singularidad aislada en ∞ y de residuo en ∞ , podemos probar el siguiente teorema.

Teorema 1.4. *Sea $f(z)$ una función definida en un abierto A del plano complejo ampliado $\widehat{\mathbb{C}}$ que tiene ∞ como singularidad aislada, entonces*

$$\int_{C'_r} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot Res\,(f, \infty) \ ,$$

donde C'_r es la circunferencia $C(0, r)$ recorrida en sentido inverso con $r > R$, de tal forma que $f(z)$ es analítica en $B^* (\infty, R)$.

Demostración. Calculamos la integral realizando el cambio de variable

$$z = \frac{1}{z'} \ ,$$

de tal forma que

$$\int_{C_r'} f(z)\,dz = -\int_{C_{1/r}} f\left(\frac{1}{z'}\right)\cdot\frac{dz'}{(z')^2}\ ,$$

donde $C_{1/r}$ es la circunferencia $C(0,1/r)$ recorrida en sentido directo.

El desarrollo de Laurent del integrando en la segunda integral es

$$f\left(\frac{1}{z'}\right)\cdot\frac{1}{(z')^2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{1}{(z')^{n+2}}+\frac{b_1}{z'}+\sum_{n=2}^{\infty}b_n\,(z')^{n-2}\ ,$$

y aplicando el Teorema de los Residuos en $\mathbb{C}$ al camino $C_{1/r}$ ó bien integrando término a término, obtenemos

$$\int_{C_r'} f(z)\,dz = -2\pi i b_1 = 2\pi i\cdot Res\,(f,\infty)\ .$$

q.e.d.

En el caso general donde además de un polo en ∞ existen otros polos finitos se verifica el siguiente Teorema de los Residuos más general.

Teorema 1.5. *Sea γ un camino cerrado simple en $\mathbb{C}$ y sea Ω_e la región exterior limitada por γ. Si $f(z)$ es analítica en un abierto A tal que $A\supset\overline{\Omega_e}$ salvo en un número finito de singularidades aisladas $\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_m$, entre las que puede estar ∞ , entonces se tiene*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{m}Res\,(f,\alpha_i)\ ,$$

suponiendo $\alpha_i\notin\gamma^*$ y γ recorrido en sentido inverso.

1.6 EJERCICIOS

1. Hallar los desarrollos en serie de Laurent de la función

$$f(z)=\frac{1}{z\,(1-z)}\ ,$$

en las coronas

$$A_1=\{z\ \mid 0<|z|<1\}\ ,$$
$$A_2=\{z\ \mid\ |z|>1\}\ .$$

2. Determinar el desarrollo de Laurent de la función

$$f(z)=\frac{1}{senz-z}\ .$$