Capítulo 1

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Para afrontar el estudio de las funciones de varias variables es necesario conocer el espacio sobre el que están definidas. Es fundamental saber qué estructura tiene y qué herramientas puede proporcionar que permitan generalizar los conceptos del cálculo diferencial de funciones reales de una variable a funciones de varias variables. Por eso, este primer capítulo se dedica a precisar ese marco, que en este caso es el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

1.1. El espacio vectorial y afín $\mathbb{R}^n$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define $\mathbb{R}^n$ como el conjunto de todas las n-tuplas de números reales, es decir, el conjunto de todos los elementos del producto cartesiano

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \overset{n)}{\cdots} \times \mathbb{R} = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,:\, x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

En los casos particulares de los conjuntos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, que serán los más utilizados, se simplifica la notación evitando subíndices. Así,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

1.1.1. El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

En $\mathbb{R}^n$ se consideran dos operaciones que se definen de forma natural a partir de la suma y multiplicación de números reales. Una de ellas es una operación interna, esto es, asigna a pares de elementos de $\mathbb{R}^n$ otro elemento de $\mathbb{R}^n$. La otra es una operación externa porque partiendo de un elemento que no pertenece a $\mathbb{R}^n$ y otro que sí pertenece se obtiene un nuevo elemento de $\mathbb{R}^n$.

- Operación interna

  Dados $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, la suma de $\bar{x}$ e $\bar{y}$, que se denota $\bar{x}+\bar{y}$, es el elemento de $\mathbb{R}^n$ definido como

  $$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

- Operación externa

  Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, el producto de λ por $\bar{x}$, que se denota $\lambda \cdot \bar{x}$, es el elemento de $\mathbb{R}^n$ definido como

  $$\lambda \cdot \bar{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

El conjunto $\mathbb{R}^n$ con las operaciones $+$ y $\cdot$ verifica las siguientes propiedades para cualesquiera $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

1. $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$.
2. $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$.
3. El elemento $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ verifica $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$.
4. Dado $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ el elemento $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$, denotado $-\bar{x}$, verifica $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$.
5. $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$.
6. $(\lambda + \mu) \cdot \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x} + \mu \cdot \bar{x}$.
7. $\lambda \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \lambda \cdot \bar{x} + \lambda \cdot \bar{y}$.
8. $\lambda \cdot (\mu \cdot \bar{x}) = (\lambda\mu) \cdot \bar{x}$.

El par $(\mathbb{R}^n, +)$ es un grupo conmutativo o abeliano[1] por cumplir las propiedades 1 a 4, siendo $\bar{0}$ el elemento neutro y, para cada $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, su elemento simétrico $-\bar{x}$ se denomina elemento opuesto de $\bar{x}$.

La terna $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ tiene estructura de **espacio vectorial** sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ por verificar las propiedades 1 a 8. Los elementos de $\mathbb{R}^n$ se llaman vectores y el elemento neutro $\bar{0}$ también se denomina vector nulo. En particular, $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y los números reales también son vectores, pero cuando se quiera enfatizar que son elementos del cuerpo se denominarán escalares.

Nota. En adelante, si no hay confusión, se omitirá el punto de la definición del producto de un escalar por un vector. Además, dados $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, el elemento $\bar{x} + (-\bar{y})$ se escribirá $\bar{x} - \bar{y}$.

Sea $S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$. Si para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que $\bar{x} = \lambda_1\bar{v}_1 + \lambda_2\bar{v}_2 + \cdots + \lambda_k\bar{v}_k$ se dice que $\bar{x}$ es combinación lineal de los elementos de S y que S es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^n$. Si la única combinación lineal de vectores de S que admite el elemento $\bar{0}$ es la nula (todos los escalares son 0) entonces se dice que S es un sistema linealmente independiente. Una base de $\mathbb{R}^n$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^n$ linealmente independiente. El conjunto de vectores $\mathcal{B}_c = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$, donde para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ se tiene que $\bar{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$ con 1 en la posición i-ésima, es una base de $\mathbb{R}^n$ denominada base canónica. Si $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, su expresión respecto de $\mathcal{B}_c$ es $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \cdots + x_n\bar{e}_n$, y las componentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $\bar{x}$ son las coordenadas de $\bar{x}$ en esta base. Toda base de $\mathbb{R}^n$ tiene n elementos por lo que se dice que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial de dimensión n.

1.1.2. El espacio afín $\mathbb{R}^n$

La aplicación $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida para todo $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ por $\phi(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y} - \bar{x}$ verifica las siguientes propiedades:

1. Para cualquier elemento $\bar{x}$ del conjunto $\mathbb{R}^n$ y para cualquier vector $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ existe un único elemento $\bar{y} = \bar{x} + \bar{v}$ del conjunto $\mathbb{R}^n$ tal que $\phi(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{v}$.
2. Para cualesquiera $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $\phi(\bar{x}, \bar{y}) + \phi(\bar{y}, \bar{z}) = \phi(\bar{x}, \bar{z})$.

[1] Un conjunto $G \neq \emptyset$ con una operación interna $+$ es un grupo conmutativo o abeliano si verifica las propiedades: (i) Asociativa: $\forall x, y, z \in G$ se cumple $(x + y) + z = x + (y + z)$. (ii) Conmutativa: $\forall x, y \in G$ se cumple $x + y = y + x$. (iii) Existencia de elemento neutro: $\exists\, 0 \in G$ tal que $x + 0 = x$ $\forall x \in G$. (iv) Existencia de elemento simétrico: $\forall x \in G$ $\exists -x \in G$ tal que $x + (-x) = 0$.

Por lo tanto, $\mathbb{R}^n$ es un **espacio afín**[2] asociado al propio $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial. Por ello, los elementos de $\mathbb{R}^n$ también se denominan puntos. En el espacio afín $\mathbb{R}^n$ se considera como referencia cartesiana $\mathcal{R}$ aquella cuyo origen es el punto $O = \bar{0} = (0, \overset{n)}{\ldots}, 0)$ y cuya base es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, esto es, $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$. Las componentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $\bar{x}$ son las coordenadas del punto $\bar{x}$ en la referencia $\mathcal{R}$. La estructura afín de $\mathbb{R}^n$ es la idónea para las interpretaciones geométricas.

1.2. Producto escalar y norma

1.2.1. Producto escalar

Producto escalar usual

El producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$ es la aplicación $\langle\, , \,\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que a cada par de vectores $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ le hace corresponder el número real

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

De las definiciones de suma de vectores, producto de número real por vector y producto escalar usual de vectores se obtienen fácilmente las siguientes propiedades.

Proposición (Propiedades fundamentales del producto escalar usual)

Dados $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, se cumple:

1. $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \geq 0$. Además, $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0$ si y solo si $\bar{x} = \bar{0}$ (positividad).
2. $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle$ (simetría).
3. $\langle \lambda\bar{x} + \mu\bar{y}, \bar{z} \rangle = \lambda\langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + \mu\langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$ y $\langle \bar{x}, \lambda\bar{y} + \mu\bar{z} \rangle = \lambda\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \mu\langle \bar{x}, \bar{z} \rangle$ (bilinealidad).

Observación

Dado un espacio vectorial real V, toda aplicación $\langle\, , \,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que cumpla las tres propiedades anteriores se denomina **producto escalar** y se dice que V dotado del producto escalar $\langle\, , \,\rangle$, o el par $\big(V, \langle\, , \,\rangle\big)$, tiene estructura de **espacio vectorial euclídeo**. Por tanto, $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual es un espacio vectorial euclídeo. $\lhd$

Dos vectores $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ son **ortogonales** si $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$. Los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ son ortogonales dos a dos por lo que se dice que es una base ortogonal.

1.2.2. Norma

A partir del producto escalar usual se puede definir la norma euclídea de un vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, que proporciona una medida del vector $\bar{x}$.

Norma euclídea

La norma euclídea en $\mathbb{R}^n$ es la aplicación $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que a $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ le asigna el número real

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\,.$$

[2]Un espacio afín es una terna (E, V, ϕ) donde E es un conjunto no vacío, cuyos elementos se denominan puntos, V es un espacio vectorial y $\phi : E \times E \to V$ es una aplicación que verifica: (i) $\forall P \in E$ y $\forall \bar{v} \in V$ existe un único $Q \in E$ tal que $\phi(P, Q) = \bar{v}$. (ii) $\forall P, Q, R \in E$ se cumple $\phi(P, Q) + \phi(Q, R) = \phi(P, R)$.

Observaciones

1. Para $n = 1$, la norma euclídea es el valor absoluto: $\sqrt{x^2} = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Dado $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se cumple $|x_i| = \sqrt{x_i^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_i^2 + \cdots + x_n^2} = \|\bar{x}\|$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. $\triangleleft$

Un vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es **unitario** si $\|\bar{x}\| = 1$. Las bases ortogonales cuyos vectores son unitarios se denominan ortonormales. La base canónica de $\mathbb{R}^n$ es una base ortonormal.

Proposición 1. (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Para todo $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, se verifica

$$|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq \|\bar{x}\| \, \|\bar{y}\|.$$

Demostración. Si $\bar{y} = \bar{0}$ se verifica la igualdad.

Sea $\bar{y} \neq \bar{0}$. Por la positividad del producto escalar, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\langle \bar{x} - \lambda \bar{y}, \bar{x} - \lambda \bar{y} \rangle \geq 0,$$

y aplicando las propiedades simétrica y bilineal del producto escalar se obtiene

$$\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - 2\lambda \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \lambda^2 \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle \geq 0.$$

En particular, tomando $\lambda = \dfrac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle}$ resulta $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - \dfrac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2}{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} \geq 0$. Luego $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2 \leq \|\bar{x}\|^2 \|\bar{y}\|^2$, siendo los dos miembros de esta desigualdad no negativos, y al extraer raíz cuadrada se obtiene

$$|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| = \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2} \leq \|\bar{x}\| \, \|\bar{y}\|.$$ $\square$

Proposición 2. (Propiedades fundamentales de la norma euclídea)
Para cualesquiera $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, se verifica:

1. $\|\bar{x}\| \geq 0$. Además, $\|\bar{x}\| = 0$ si y solo si $\bar{x} = \bar{0}$ (positividad).
2. $\|\lambda \bar{x}\| = |\lambda| \, \|\bar{x}\|$.
3. $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ (desigualdad triangular).

Demostración. Sean $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. De la definición de la norma euclídea resulta obvio que $\|\bar{x}\| \geq 0$. Además, por la positividad del producto escalar,

$$\|\bar{x}\| = 0 \iff \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0 \iff \bar{x} = \bar{0}.$$

2. De la definición de la norma y la bilinealidad del producto escalar se tiene

$$\|\lambda \bar{x}\| = \sqrt{\langle \lambda \bar{x}, \lambda \bar{x} \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} = |\lambda| \, \|\bar{x}\|.$$

3. De la definición de la norma, la bilinealidad y la simetría del producto escalar resulta

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = \langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle + 2\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = \|\bar{x}\|^2 + 2\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \|\bar{y}\|^2,$$

y, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 \leq \|\bar{x}\|^2 + 2\|\bar{x}\| \, \|\bar{y}\| + \|\bar{y}\|^2 = \big(\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|\big)^2,$$

siendo los dos miembros de esta desigualdad no negativos. Luego, al extraer la raíz cuadrada, se obtiene finalmente la desigualdad triangular. $\square$

Observación

Dado un espacio vectorial V, cualquier aplicación $|||\cdot||| : V \to \mathbb{R}$ que verifique las tres propiedades anteriores puede ser considerada un instrumento para medir vectores de V. En este caso, se dice que $|||\cdot|||$ es una **norma** en V y que el par $(V, |||\cdot|||)$ es un **espacio vectorial normado**. En particular, la norma euclídea es una norma en $V = \mathbb{R}^n$ y $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ es un espacio normado. $\lhd$

Ejemplo (Otras normas en $\mathbb{R}^n$)

Además de la norma euclídea, otras normas de interés en $\mathbb{R}^n$ son las denotadas por $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$. Para cada $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se define

$$\|\bar{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$
$$\|\bar{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}.$$

En $\mathbb{R}$, estas normas coinciden con el valor absoluto pues, dado $x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\|x\| = \sqrt{x^2} = |x| = \|x\|_1 = \|x\|_\infty.$$

$\lhd$

Las normas $\|\cdot\|_1$ y euclídea son casos particulares de la familia de normas definidas para cada número real $p \geq 1$ por $\|\bar{x}\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$. Por ello es frecuente denotar la norma euclídea por $\|\cdot\|_2$, aunque generalmente se utilizará la notación $\|\cdot\|$.

1.2.3. Geometría de $\mathbb{R}^n$

En los casos particulares $n = 2$ y $n = 3$, los elementos de $\mathbb{R}^n$ admiten una doble representación gráfica según sean considerados vectores o puntos de $\mathbb{R}^n$.

Dado que el sistema de referencia afín $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ está formado por el punto origen O y la base canónica, que es ortonormal, los vectores $\bar{e}_i$, con $i = 1, \ldots, n$, se representan por segmentos orientados con origen en O y perpendiculares entre sí, todos con la misma longitud, que es la unidad de medida. Los ejes de la referencia $\mathcal{R}$ son las rectas que pasan por O y tienen dirección y sentido dados por cada uno de los vectores $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$. El conjunto formado por estos ejes se denomina **sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas**.

Para $n = 2$, el eje generado por $\bar{e}_1$, denotado por X, se denomina eje de abscisas y el generado por $\bar{e}_2$, denotado por Y, eje de ordenadas; el primero se representa gráficamente por una recta horizontal y el segundo por una vertical. Para $n = 3$, los ejes generados por $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ se denotan X, Y y Z, respectivamente. La propiedad segunda de la norma permite representar cualquier vector de la forma $x\bar{e}_i$, con $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, como un segmento orientado con origen en O sobre el eje generado por $\bar{e}_i$, cuya longitud es $|x|$ y sentido igual al de $\bar{e}_i$ si x es positivo (figura 1.1), o contrario si x es negativo.

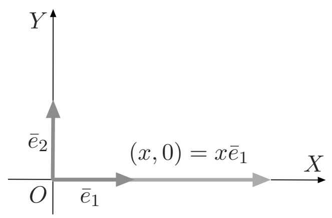

Figura 1.1: Base y vector $(x, 0)$ de $\mathbb{R}^2$

La propiedad segunda de espacio afín permite visualizar gráficamente la suma de dos vectores “encadenando el origen del segundo con el extremo del primero”, en lugar de situarlo en O. Así se obtiene el vector suma como el segmento orientado con origen en O y cuyo extremo es el extremo del segundo vector (regla del paralelogramo). De esta forma se puede representar cualquier vector. Si $n = 2$, dado que $(x, y) = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$, el vector (x, y) se identifica con el segmento de origen O y extremo el correspondiente a "encadenar" $x\bar{e}_1$ con $y\bar{e}_2$ (figura 1.2, izquierda). Si $n = 3$, la representación de un vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se puede conseguir de forma análoga mediante la suma $(x, y, z) = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3$ (figura 1.2, derecha).

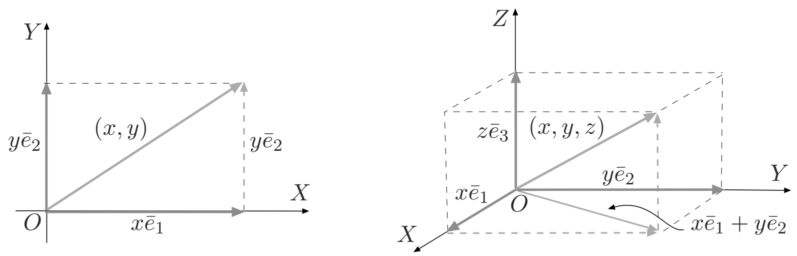

Figura 1.2: Representación de los vectores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

En tanto que puntos del espacio afín $\mathbb{R}^n$, la representación gráfica de un elemento de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ se identifica con el punto del plano o del espacio, respectivamente, que corresponde al extremo del segmento que representa dicho vector (figura 1.3). Esta será la forma que habitualmente se considerará para visualizar los elementos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, aunque en ocasiones se usarán los segmentos orientados si resultan más útiles para determinados propósitos.

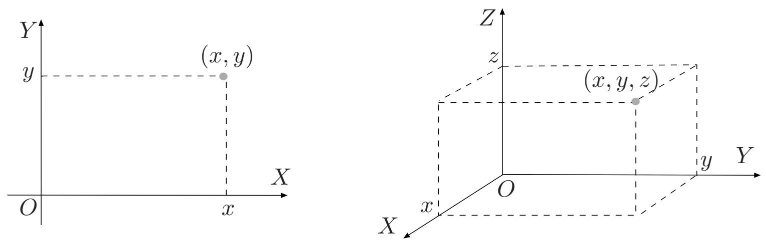

Figura 1.3: Representación de los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

Longitud de un vector

La norma de un vector se puede interpretar como una medida de su tamaño. Así, la propiedad de la desigualdad triangular de la norma euclídea tiene una clara interpretación geométrica: la longitud de cualquier lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos (figura 1.4).

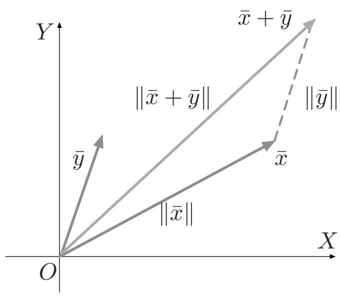

Figura 1.4: Interpretación geométrica de la desigualdad triangular de la norma

Nótese que diferentes normas proporcionan diferentes longitudes del vector. En la figura

1.5 se interpreta gráficamente la longitud de un vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con cada una de las siguientes normas:

$$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|, \qquad \|(x,y)\|_2 = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}\,, \qquad \|(x,y)\|_\infty = \text{máx}\{|x|,|y|\}.$$

En cada caso, la norma está representada por la longitud de la línea, o líneas, de trazo discontinuo.

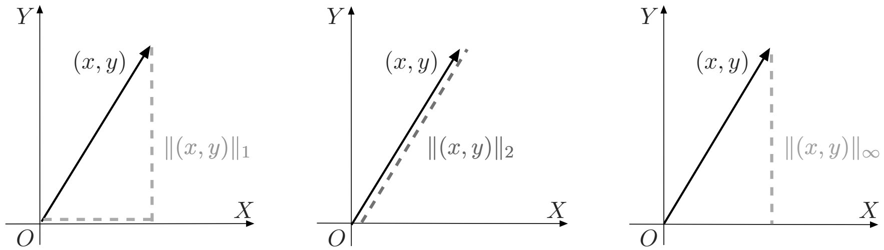

Figura 1.5: Representación gráfica de $\|(x,y)\|_1$, $\|(x,y)\|_2$ y $\|(x,y)\|_\infty$

$\triangleleft$

Rectas y segmentos

Dados $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$, siendo $\bar{a} \neq \bar{b}$, la recta determinada por los puntos $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es el conjunto de puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ dados por la expresión

$$\bar{x} = \bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a}), \quad t \in \mathbb{R},$$

que se denomina **ecuación paramétrica de la recta**. A través de esta ecuación el orden de los números reales induce un orden u orientación en la recta según el cual $\bar{a}$ antecede a $\bar{b}$. Si se intercambian $\bar{a}$ y $\bar{b}$ en la ecuación entonces se invierte la orientación de la recta.

El **segmento** de extremos $\bar{a}$ y $\bar{b}$, denotado por $[\bar{a}, \bar{b}]$ es el conjunto de puntos

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \{\bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a}) : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Igual que ocurre con la ecuación de la recta, la definición anterior permite que el orden de los números reales en $[0, 1]$ induzca un orden u orientación en el segmento $[\bar{a}, \bar{b}]$ de modo que $\bar{a}$ es el extremo inicial y $\bar{b}$ es el extremo final del segmento. El segmento $[\bar{b}, \bar{a}]$ de extremos $\bar{b}$ y $\bar{a}$ es el mismo conjunto de puntos que $[\bar{a}, \bar{b}]$ pero con orientación contraria a la de $[\bar{a}, \bar{b}]$.

1.3. Métrica euclídea

A partir de la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$ se puede definir la distancia entre dos puntos del espacio afín $\mathbb{R}^n$, lo que permite cuantificar la proximidad o lejanía entre dichos puntos.

Métrica o distancia euclídea

La distancia euclídea en $\mathbb{R}^n$ es la aplicación $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada par de puntos $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ le asigna el número real

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{y} - \bar{x}\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}\,.$$

Para $n = 1, 2, 3$, la distancia entre dos puntos de $\mathbb{R}^n$ se interpreta como la longitud del segmento que tiene dichos puntos por extremos. Para $n = 1$ es obvio pues la distancia euclídea entre dos puntos x e y de $\mathbb{R}$ es

$$d(x, y) = \sqrt{(y - x)^2} = |y - x|.$$

En el caso $n = 2$, dados los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, aplicando el teorema de Pitágoras[3] al triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el segmento de extremos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) (figura 1.6), se obtiene que la longitud de dicho segmento es la distancia euclídea entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2),

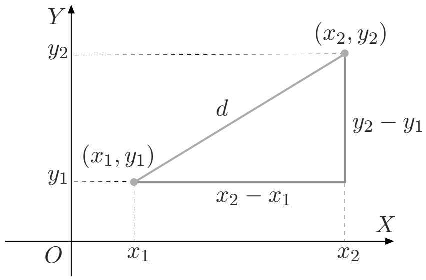

Figura 1.6: Distancia d entre dos puntos

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

De la misma manera, aplicando dos veces el teorema, se llega a que la distancia entre dos puntos de $\mathbb{R}^3$ también es la longitud del segmento que los une.

Las propiedades de la norma euclídea permiten obtener de forma inmediata las siguientes propiedades de la distancia euclídea.

Proposición (Propiedades fundamentales de la distancia euclídea)

Para cualesquiera $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n$ se verifica:

1. $d(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$. Además, $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$ (positividad).
2. $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})$ (simetría).
3. $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{z}, \bar{y})$ (desigualdad triangular).

Observaciones

1. Se ha introducido en primer lugar la norma euclídea y después la distancia en función de ella, pero se podría haber hecho al revés, puesto que para cualquier $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ se verifica $d\,(\bar{x}, \bar{0}) = \|\bar{x}\|$.

2. La tercera propiedad de la distancia tiene la misma interpretación geométrica que la desigualdad triangular de las normas: en todo triángulo, la longitud de cualquiera de sus lados es menor que la suma de las longitudes de los otros dos (figura 1.7). $\triangleleft$

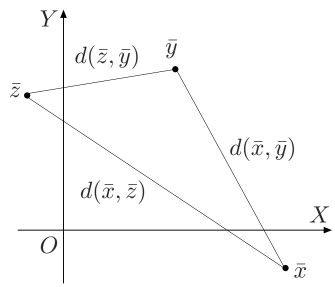

Figura 1.7: Desigualdad triangular

Las tres propiedades fundamentales que satisface la métrica euclídea son las condiciones deseables para que pueda ser considerada una herramienta que mide la proximidad de

[3] El teorema de Pitágoras es una consecuencia de las propiedades de la norma euclídea pues si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son vectores ortogonales se tiene $\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 + 2\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2$; en este caso $\bar{u} = (x_2 - x_1, 0)$ y $\bar{v} = (0, y_2 - y_1)$.

los puntos de $\mathbb{R}^n$. En general, teniendo en cuenta dichas propiedades, se pueden obtener instrumentos para medir la proximidad entre elementos en conjuntos cualesquiera.

Definición. Dado un conjunto $X \neq \emptyset$, una **métrica** o **distancia** en X es una aplicación $\mathbf{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que para cualesquiera $x, y, z \in X$ satisface:

1. $\mathbf{d}(x, y) \geq 0$. Además, $\mathbf{d}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $\mathbf{d}(x, y) = \mathbf{d}(y, x)$.
3. $\mathbf{d}(x, y) \leq \mathbf{d}(x, z) + \mathbf{d}(z, y)$.

El par $(X, \mathbf{d})$ se llama **espacio métrico**.

Ejemplo (Otras distancias en $\mathbb{R}^n$)

Las aplicaciones $d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $d_\infty : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definidas para cada par de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ por

$$\begin{aligned} d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \\ d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \text{máx}\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}, \end{aligned}$$

verifican las tres propiedades de la distancia, por lo que son métricas en $\mathbb{R}^2$. En la figura 1.8 se visualizan las distancias entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) para d_1, d_∞ y la distancia euclídea, que también se suele denotar d_2.

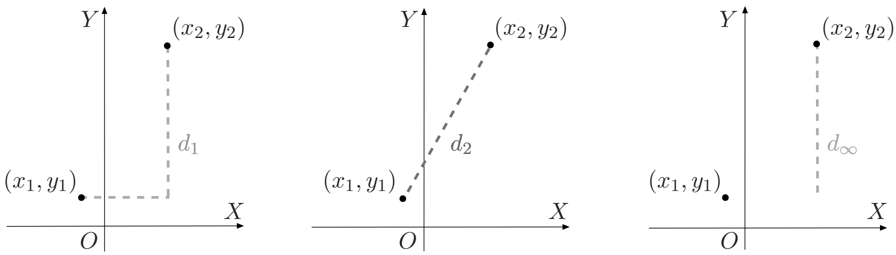

Figura 1.8: Distancia $d_p = d_p((x_1, y_1), (x_2, y_2))$, para $p = 1, 2, \infty$

Las distancias d_1 y d_∞ introducidas en $\mathbb{R}^2$ se generalizan a $\mathbb{R}^n$ trivialmente: las aplicaciones $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definidas para cada par de puntos $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ como

$$\begin{aligned} d_1(\bar{x}, \bar{y}) &= |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| + \cdots + |y_n - x_n| \\ d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) &= \text{máx}\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|, \ldots, |y_n - x_n|\}, \end{aligned}$$

son métricas en $\mathbb{R}^n$ que generalizan la métrica euclídea de $\mathbb{R}$, pero que miden la distancia entre puntos de $\mathbb{R}^n$ de forma distinta. La métrica d_1 se denomina distancia reticular, de Manhattan o métrica urbana, y d_∞ distancia del máximo. En general, diferentes métricas sobre un conjunto dan lugar a espacios métricos distintos. $\triangleleft$

Nota. En adelante, si no se especifica otra distancia, en $\mathbb{R}^n$ se considerará la métrica euclídea y esta vendrá descrita en función de la norma; es decir, la distancia euclídea entre dos puntos $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ se denotará $\|\bar{y} - \bar{x}\|$ en lugar de $d(\bar{x}, \bar{y})$ o $d_2(\bar{x}, \bar{y})$, salvo que algún propósito concreto lo requiera.

Definición. Sea $(X, \mathbf{d})$ un espacio métrico. Si S es un subconjunto de X no vacío y a es un punto de X, **la distancia de a a S**, denotada $\mathbf{d}(a, S)$, es el número real

$$\mathbf{d}(a, S) = \text{ínf}\,\{\mathbf{d}(a, x) : x \in S\}\,.$$

Nótese que se trata de una buena definición pues $\{\mathbf{d}(a, x) : x \in S\}$ es un conjunto de números reales acotado inferiormente por 0, luego existe el ínfimo de este conjunto.

Ejemplo (Distancia de un punto a un conjunto)

Dado el semiplano $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\}$ se calcula la distancia del origen de coordenadas a S, es decir,

$$d((0,0), S) = \text{ínf}\left\{\|(x, y)\| : (x, y) \in S\right\} = \text{ínf}\left\{\sqrt{x^2 + y^2} : x > 1\right\}.$$

Si $(x, y) \in S$, por ser $x > 1$, se tiene $\sqrt{x^2 + y^2} > 1$ y se cumple que $d((0,0), S) \geq 1$. Supóngase que $d((0,0), S) > 1$ entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $1 < c < d((0,0), S)$ y se verifica

$$(c, 0) \in S \quad \text{ y } \quad \|(c, 0)\| = c < d((0,0), S),$$

lo cual es absurdo. Por tanto, $d((0,0), S) = 1$. $\triangleleft$

1.4. Topología asociada a la métrica euclídea

Los conceptos que se abordan en esta sección, tratados desde la óptica de los espacios métricos, pertenecen al marco más general de los espacios topológicos[4]. Es necesario comentar que, a pesar de que los conceptos topológicos en el caso de $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea pueden ser muy intuitivos gracias a su visualización para $n = 1, 2, 3$, las pruebas analíticas suelen ser bastante complejas, como sucede generalmente cuando se trabaja en espacios topológicos. Los ejemplos que se muestran en esta sección son bastante simples a nivel intuitivo, sin embargo su desarrollo analítico los complica mucho más de lo deseado; aún así, se ha querido llevar a cabo porque todas las pruebas se basan en las propiedades algebraicas de $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial normado.

1.4.1. Bolas en la métrica euclídea

Los intervalos de la recta real juegan un papel esencial en el cálculo diferencial de funciones de una variable. En concreto, los intervalos abiertos se utilizan en la definición de límite de una función y, en consecuencia, también en las de continuidad y derivabilidad.

En $\mathbb{R}$, cualquier intervalo acotado, abierto o cerrado, se puede expresar considerando un punto $a \in \mathbb{R}$, punto medio del intervalo, y un número $r > 0$, distancia de a al extremo del intervalo, como sigue:

$$(a - r, a + r) = \{x \in \mathbb{R} : a - r < x < a + r\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} \quad \text{(intervalo abierto)}$$
$$[a - r, a + r] = \{x \in \mathbb{R} : a - r \leq x \leq a + r\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq r\} \quad \text{(intervalo cerrado).}$$

Si $r = 0$ solo tiene sentido $[a, a] = \{a\}$, que es un intervalo cerrado (también denominado intervalo degenerado).

Con esta descripción y utilizando la métrica euclídea de $\mathbb{R}^n$, estos intervalos se generalizan de forma natural a conjuntos de $\mathbb{R}^n$ que tienen el mismo papel que dichos intervalos de $\mathbb{R}$ en las definiciones de límite, continuidad y diferenciabilidad de funciones de varias variables.

[4] Para un estudio más profundo se puede consultar [4, 22].

Bolas e hiperesferas en $\mathbb{R}^n$

Dados $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ se definen los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^n$.

1. La **bola abierta** de centro $\bar{a}$ y radio r, denotada $B_r(\bar{a})$, es
$$B_r(\bar{a}) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{a}\| < r\}.$$
2. La **bola cerrada** de centro $\bar{a}$ y radio r, denotada $\bar{B}_r(\bar{a})$, es
$$\bar{B}_r(\bar{a}) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{a}\| \leq r\}.$$
3. La **bola abierta reducida o perforada** de centro $\bar{a}$ y radio r, denotada $B^*_r(\bar{a})$, es
$$B^*_r(\bar{a}) = B_r(\bar{a}) \setminus \{\bar{a}\} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : 0 < \|\bar{x} - \bar{a}\| < r\}.$$
4. La **bola cerrada reducida o perforada** de centro $\bar{a}$ y radio r, denotada $\bar{B}^*_r(\bar{a})$, es
$$\bar{B}^*_r(\bar{a}) = \bar{B}_r(\bar{a}) \setminus \{\bar{a}\} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : 0 < \|\bar{x} - \bar{a}\| \leq r\}.$$
5. La **hiperesfera** de centro $\bar{a}$ y radio r, denotada $E_r(\bar{a})$, es
$$E_r(\bar{a}) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{a}\| = r\}.$$

Observación

Dados $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, si $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B_r(\bar{a})$ se cumple
$$|x_i - a_i| \leq \|\bar{x} - \bar{a}\| < r \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$
Análogamente, si $\bar{x} \in \bar{B}_r(\bar{a})$ entonces $|x_i - a_i| \leq r$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. $\triangleleft$

Ejemplos (Bolas e hiperesferas en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$)

1. Si $n = 1$, sean $a \in \mathbb{R}$ y $r > 0$.

a) La bola abierta de centro a y radio r es $B_r(a) = (a - r, a + r)$.

b) La bola cerrada de centro a y radio r es $\bar{B}_r(a) = [a - r, a + r]$.

c) La hiperesfera de centro a y radio r es $E_r(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| = r\} = \{a - r, a + r\}$.

Por tanto, en $\mathbb{R}$ las bolas abiertas son intervalos abiertos y las bolas cerradas son intervalos cerrados.

2. Si $n = 2$, sean $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$.

a) La bola abierta de centro (a, b) y radio r es
$$B_r(a, b) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (a, b)\| < r\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2\right\}.$$
Luego $B_r(a, b)$ es el conjunto de todos los puntos del círculo de centro (a, b) y radio r, que no pertenecen a la circunferencia de centro (a, b) y radio r.

b) La bola cerrada de centro (a, b) y radio r es
$$\bar{B}_r(a, b) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (a, b)\| \leq r\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2\right\}.$$

c) La hiperesfera de centro (a, b) y radio r es la circunferencia
$$E_r(a, b) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (a, b)\| = r\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\right\}.$$

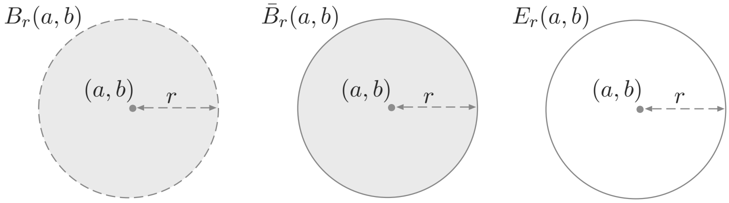

Figura 1.9: En $\mathbb{R}^2$, bola abierta, bola cerrada e hiperesfera de centro (a,b) y radio r

3. Si $n=3$, sean $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ y $r>0$.

a) La bola abierta de centro (a,b,c) y radio r es

$$\begin{aligned} B_r(a,b,c) &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)-(a,b,c)\|<r\right\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2<r^2\right\}. \end{aligned}$$

Es decir, $B_r(a,b,c)$ es el conjunto de todos los puntos de la bola sólida de centro (a,b,c) y radio r, que no pertenecen a la esfera de centro (a,b,c) y radio r.

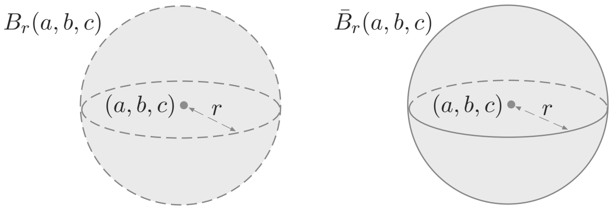

Figura 1.10: En $\mathbb{R}^3$, bola abierta y bola cerrada de centro (a,b,c) y radio r

b) La bola cerrada de centro (a,b,c) y radio r es

$$\begin{aligned} \bar{B}_r(a,b,c) &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)-(a,b,c)\|\le r\right\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\le r^2\right\}. \end{aligned}$$

c) La hiperesfera de centro (a,b,c) y radio r es la esfera

$$\begin{aligned} E_r(a,b,c) &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)-(a,b,c)\|=r\right\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2\right\}. \end{aligned}$$ $\triangleleft$

1.4.2. Clasificación de un punto respecto a un conjunto

Dado un conjunto $S\subset\mathbb{R}^n$, una primera clasificación de un punto de $\mathbb{R}^n$ con respecto a S es el hecho de pertenecer o no al mismo. Entre los puntos que pertenecen a S es interesante, por ejemplo, distinguir los que están “rodeados por doquier” por puntos del propio conjunto de los que no. Entre los que no pertenecen a S tienen un papel relevante aquellos para los que hay puntos del conjunto “tan próximos” a ellos como se quiera. El concepto de bola abierta permite formalizar este tipo de ideas proporcionando la siguiente clasificación.