

Índice general

Prólogo	v
Lista de símbolos	vii
1. El espacio euclídeo \mathbb{R}^n	1
1.1. El espacio vectorial y afín \mathbb{R}^n	1
1.1.1. El espacio vectorial \mathbb{R}^n	1
1.1.2. El espacio afín \mathbb{R}^n	2
1.2. Producto escalar y norma	3
1.2.1. Producto escalar	3
1.2.2. Norma	3
1.2.3. Geometría de \mathbb{R}^n	5
1.3. Métrica euclídea	7
1.4. Topología asociada a la métrica euclídea	10
1.4.1. Bolas en la métrica euclídea	10
1.4.2. Clasificación de un punto respecto a un conjunto	12
1.4.3. Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados	18
1.4.4. Conjuntos acotados y conjuntos compactos	25
1.5. Principio de los intervalos encajados	27
1.5.1. Intervalos de \mathbb{R}^n	27
1.5.2. Principio de los intervalos encajados	29
1.6. Teorema de Bolzano-Weierstrass	30
1.7. Sucesiones en \mathbb{R}^n	31
1.7.1. Sucesiones, subsucesiones y sucesiones acotadas	31
1.7.2. Sucesiones convergentes	32
1.7.3. Sucesiones y puntos de acumulación	33
1.7.4. Sucesiones y compacidad	34
1.8. Sucesiones de Cauchy. Completitud de \mathbb{R}^n	35
1.9. Ejercicios propuestos	37
2. Funciones de varias variables	41
2.1. Funciones reales de varias variables	41
2.1.1. Función real de varias variables, dominio e imagen	41
2.1.2. Operaciones con funciones	42
2.1.3. Funciones elementales de varias variables	43
2.1.4. Función acotada	46

2.1.5.	Gráfica y conjuntos de nivel de una función	47
2.1.6.	Gráfica y secciones de una función de dos variables	48
2.1.7.	Gráfica y conjuntos de nivel de una función de dos variables	54
2.1.8.	Conjuntos de nivel de una función de tres variables	57
2.2.	Funciones vectoriales	58
2.2.1.	Función vectorial. Operaciones con funciones vectoriales	58
2.2.2.	Obtención del dominio de una función vectorial	59
2.2.3.	Representación de la imagen de una función vectorial	60
2.3.	Ejercicios propuestos	64
3.	Límites y continuidad	69
3.1.	Límites de funciones reales de varias variables	69
3.1.1.	El concepto de límite	69
3.1.2.	Límites infinitos y en el infinito	72
3.1.3.	Límites relativos a subconjuntos	74
3.1.4.	Propiedades locales de los límites	76
3.1.5.	Propiedades aritméticas de los límites	77
3.1.6.	Límite de la composición de funciones	80
3.1.7.	Equivalencias y límites	82
3.1.8.	Regla del sandwich y algunas consecuencias	85
3.1.9.	Límites iterados	87
3.2.	Técnicas para el cálculo de límites en dos variables	89
3.2.1.	Aplicación de límites iterados	90
3.2.2.	Aplicación de límites relativos a subconjuntos	90
3.2.3.	Aplicación de coordenadas polares	94
3.3.	Límites de funciones vectoriales	100
3.3.1.	Definición de límite y propiedades	100
3.3.2.	Caracterización del límite mediante las funciones coordenadas	101
3.4.	Continuidad de funciones reales de varias variables	103
3.4.1.	Definición y caracterizaciones	103
3.4.2.	Aritmética y composición de funciones continuas	104
3.4.3.	Algunos ejemplos	105
3.4.4.	Propiedades locales de las funciones continuas	106
3.5.	Continuidad de funciones vectoriales	108
3.5.1.	Definición y propiedades	108
3.5.2.	Aplicaciones lineales y afines	109
3.5.3.	Funciones vectoriales de variable real. Curvas	109
3.6.	Teoremas de continuidad	111
3.6.1.	Teorema de acotación	112
3.6.2.	Teorema de Weierstrass	113
3.6.3.	Teorema de Bolzano	114
3.7.	Ejercicios propuestos	117
4.	Diferenciabilidad	123
4.1.	Derivadas según vectores	123
4.1.1.	Derivada según un vector	124
4.1.2.	Derivada direccional	126
4.1.3.	Interpretación geométrica de la derivada direccional	126
4.1.4.	Derivada parcial	130
4.1.5.	Interpretación geométrica de la derivada parcial	132

4.1.6.	Función derivada parcial	133
4.2.	Diferenciabilidad de funciones de varias variables	135
4.2.1.	Diferenciabilidad de funciones de dos variables. Plano tangente	136
4.2.2.	Diferenciabilidad de funciones de varias variables	141
4.2.3.	Diferencial y matriz jacobiana	142
4.2.4.	Diferencial y aproximación lineal	143
4.3.	Propiedades de las funciones diferenciables	144
4.3.1.	Diferenciabilidad y continuidad	144
4.3.2.	Suma, producto y cociente de funciones diferenciables	146
4.3.3.	Regla de la cadena	148
4.3.4.	Diferenciabilidad, vector gradiente y derivada según un vector	150
4.4.	Diferenciabilidad de funciones vectoriales	156
4.4.1.	Diferenciabilidad de funciones vectoriales de una variable	156
4.4.2.	Interpretación geométrica: vector tangente	158
4.4.3.	Interpretación física: velocidad y aceleración	160
4.4.4.	Diferenciabilidad de funciones vectoriales de varias variables	164
4.5.	Ejercicios propuestos	166
5.	Principales teoremas del cálculo diferencial	171
5.1.	Regla de la cadena	171
5.1.1.	Funciones reales de varias variables y de una variable	172
5.1.2.	Funciones vectoriales de una variable y funciones reales	172
5.1.3.	Funciones vectoriales de varias variables y funciones reales	176
5.1.4.	Caso general: composición de funciones vectoriales	179
5.2.	Teorema del valor medio y algunas consecuencias	181
5.2.1.	Teorema del valor medio	181
5.2.2.	Derivadas parciales nulas y teorema del valor medio	182
5.2.3.	Funciones de clase uno y diferenciabilidad	183
5.3.	Teorema de la función implícita	187
5.3.1.	Motivación y planteamiento. Funciones implícitas	187
5.3.2.	Teorema de la función implícita para funciones de dos variables	190
5.3.3.	Aplicaciones geométricas del teorema en el plano	194
5.3.4.	Teorema de la función implícita para funciones de tres variables	197
5.3.5.	Aplicaciones geométricas del teorema en el espacio	199
5.3.6.	Teorema de la función implícita para funciones vectoriales	204
5.4.	Teorema de la función inversa	211
5.4.1.	Teorema de la función inversa para funciones vectoriales	211
5.4.2.	Funciones inversas locales y función inversa global	215
5.5.	Derivadas de orden superior	217
5.5.1.	Derivadas parciales de segundo orden. Matriz hessiana	217
5.5.2.	Derivadas parciales sucesivas. Funciones de clase \mathcal{C}^k	220
5.5.3.	Derivadas parciales cruzadas. Teorema de Schwarz	221
5.6.	Teoremas de Taylor	224
5.6.1.	Polinomios de Taylor de primer y segundo orden	224
5.6.2.	Teorema de Taylor de primer orden con resto de Lagrange	226
5.6.3.	Teorema de Taylor de segundo orden	227
5.6.4.	Polinomio de Taylor de orden k en dos variables. Teorema de Taylor	229
5.7.	Ejercicios propuestos	230
6.	Aplicaciones del cálculo diferencial	235

6.1.	Extremos relativos	235
6.2.	Condición necesaria de extremo relativo	238
6.2.1.	Condición necesaria de extremo relativo. Interpretación geométrica	239
6.2.2.	Puntos críticos y puntos de silla	242
6.3.	Extremos relativos y matriz hessiana	245
6.3.1.	Extremos relativos y fórmula de Taylor	245
6.3.2.	Matriz hessiana y formas cuadráticas	247
6.3.3.	Condición suficiente de extremo relativo. Interpretación geométrica	248
6.3.4.	Condición suficiente de extremo relativo: caso general	254
6.3.5.	Matriz hessiana y condición necesaria de extremo relativo	255
6.4.	Extremos absolutos	257
6.4.1.	Definición y ejemplos	257
6.4.2.	Relación entre extremos absolutos y extremos relativos	258
6.4.3.	Funciones no acotadas y extremos absolutos	259
6.4.4.	Existencia de extremos absolutos	260
6.5.	Optimización en conjuntos compactos	264
6.5.1.	Optimización de funciones de una variable	265
6.5.2.	Optimización de funciones de dos variables	267
6.6.	Optimización y multiplicadores de Lagrange	275
6.6.1.	Un problema de optimización	275
6.6.2.	Teorema de los multiplicadores de Lagrange	277
6.6.3.	Método de los multiplicadores de Lagrange	283
6.7.	Ejercicios propuestos	289
A.	Contenido adicional	293
A.1.	Capítulo 1	293
A.1.1.	Interior de una bola cerrada y adherencia de una bola abierta	293
A.1.2.	Conjuntos de \mathbb{R}^n abiertos y cerrados simultáneamente	294
A.1.3.	Propiedad de Cantor y completitud de \mathbb{R}^n	295
A.2.	Capítulo 3	297
A.2.1.	Propiedades aritméticas de los límites	297
A.2.2.	Límite de la composición de funciones	299
A.2.3.	Caracterización de la continuidad por sucesiones	300
A.3.	Capítulo 4	300
A.3.1.	Diferenciabilidad del producto de funciones diferenciables	300
A.3.2.	Diferenciabilidad del cociente de funciones diferenciables	301
A.4.	Capítulo 6	303
A.4.1.	Condición suficiente de extremo relativo	303
A.4.2.	Caracterización del signo de las formas cuadráticas	304
A.4.3.	Condición suficiente de extremo relativo: interpretación geométrica	305
A.5.	Cónicas y cuádricas	308
A.5.1.	Cónicas	308
A.5.2.	Cuádricas ordinarias	310
A.5.3.	Cuádricas degeneradas	311
	Bibliografía	313
	Índice alfabético	315