Capítulo 10

La integral de caminos de Feynman en Finanzas

Como es bien conocido el formalismo de Feynman de la Mecánica cuántica consiste en un procedimiento matemático, la integral de caminos, para construir el propagador $K(t,x;s,y)$, $s<t$, o solución fundamental de la ecuación de Schrödinger con potencial $V(x,t)$, (véase el **Apéndice A** de [79]),

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}+V(x,t)\Psi(x,t), \tag{10.1}$$

dada por,

$$\Psi(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(t,x;s,y)\Psi(s,y)dy, \tag{10.2}$$

utilizando la función Lagrangiana de la Mecánica clásica. Por tanto, la dificultad para aplicar estas ideas matemáticas a las Finanzas radica en definir la función Lagrangiana de una ecuación diferencial estocástica que en general no es única. En este capítulo se exponen los resultados que permiten definir una función Lagrangiana de una ecuación diferencial estocástica a partir de la cual se define una integral de caminos de Feynman útil en el campo de las finanzas.

10.1. La integral de caminos de Feynman

Para dar con precisión la definición de la integral de caminos Feynman que se utilizará en todo el libro, se recuerdan en primer lugar, sin dar las demostraciones, resultados bien conocidos de las ecuaciones diferenciales estocásticas.

Definición 10.1.1 ([77]). *Una* base estocástica, $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}, P)$, *consiste en:*

(1). *Un espacio de probabilidad completo* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

(2). *Una filtración,* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$*, en el espacio medible* $(\Omega, \mathscr{F})$*, cumpliendo las siguientes propiedades:*

(2a). $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ *es completa respecto a* P*, es decir,* $\mathscr{N} = \{N \in \mathscr{F} : P(N) = 0\} \subset \mathscr{F}_0$.

(2b). $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ *es continua por la derecha, es decir,*

$$\mathscr{F}_t = \bigcap_{s\in(t,T]} \mathscr{F}_s,\ t \in J_T,\ (\textit{en particular},\ \mathscr{F}_T = \mathscr{F}).$$

Definición 10.1.2 ([76]). *Sean* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$*, un espacio de probabilidad,* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ *una filtración en el espacio medible* $(\Omega, \mathscr{F})$*, y* $\widetilde{W} = \{W_t\}_{t\in J_T}$ *un proceso estocástico real en* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$*. Se dice que* $\widetilde{W}$ *es un proceso estocástico de Wiener respecto a* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ *y a* P *si:*

(a). $\widetilde{W}$ *es un proceso estocástico medible y adaptado a* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$.

(b). *Las trayectorias,* $J_T \ni t \longmapsto W_t(\omega) \in \mathbb{R}$*,* $\omega \in \Omega$*, son continuas (*P*-a.s.), es decir,* $\widetilde{W}$ *es un proceso estocástico continuo.*

(c). $\widetilde{W}$ *es una martingala, (página 58 de [76]), respecto a* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ *y a* P*, (*$E[|W_t|] < +\infty$*,* $t \in J_T$*,* $E[W_t|\mathscr{F}_s] = W_s$ *(*P*-a.s.),* $s \leqslant t$*).*

(d). $W_0 = 0$ *(*P*-a.s.).*

(e). $E[W_t^2] < +\infty$.

(f). $E[(W_t - W_s)^2|\mathscr{F}_s] = t - s$ *(*P*-a.s.),* $s \leqslant t$*,* $s, t \in J_T$.

Por el **Teorema 4.6.4.** (Lévy), (pág. 83 de [76]), $\widetilde{W}$ es un *proceso estocástico Browniano estándar*, y por tanto, cumple las siguientes propiedades:

Proposición 10.1.3. *Sean* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *un espacio de probabilidad,* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ *una filtración en* $(\Omega, \mathscr{F})$ *y* $\widetilde{W} = \{W_t\}_{t\in J_T}$ *un proceso estocástico de Wiener en* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *respecto a* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ *y a* P*. Entonces,*

(1). $\widetilde{W}$ *es un proceso estocástico con incrementos independientes y estacionarios, (véase la página 57 de [76]).*

(2). *Los incrementos* $W_t - W_s$ *son variables aleatorias Gaussianas, (véase la página 300 de [84]), con* $E[W_t - W_s] = 0$ *y* $V[W_t - W_s] = |t - s|$*.*

(3). *Para todo* $t \in J_T$*,* W_t *es una variable aleatoria Gaussiana con* $E[W_t] = 0$ *y* $V[W_t] = t$*. Por tanto,*

$$P(W_t \leqslant x) = F_{W_t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dy,\ x \in \mathbb{R}.$$

(4). $cov(W_s, W_t) = E[W_s W_t] = \text{mín}\{s, t\},\ t, s \in J_T.$

(5). *Si* $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant T$*,* $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$ *es un vector Gaussiano, (**Definición 3.12.2.**, página 301 de [84]), y por tanto,* $\widetilde{W}$ *es un proceso estocástico Gaussiano, (**Definición 4.3.6.**, página 35 de [76]).*

(6). $\widetilde{W}$ *es un proceso estocástico de Markov, (**Definición 4.4.1.**, página 37 de [76]), y su probabilidad de transición Markoviana, ((**b**) de la página 46 de [76]), está dada explícitamente por la fórmula:*

$$p(s, x; t, A) = P(W_t \in A | W_s = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_A \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}\right) dy,$$

donde $x \in \mathbb{R}$*,* $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$*,* $s < t$*,* $s, t \in J_T$*, la cual tiene función de densidad dada por*

$$p(s, x | t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}\right),\ x, y \in \mathbb{R},\ s, t \in J_T,\ s < t.$$

(Véanse las páginas 78-81 de [76]).

Teorema 10.1.4. *Sea* $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}, P)$ *una base estocástica, (**Definición 10.1.1**, (pág. 2)). Se considera una ecuación diferencial estocástica*

$$d\xi_t = \beta(t,\xi_t)dt + \gamma(t,\xi_t)dW_t,\ \xi_{t_0} = \eta,\ t_0 \leqslant t \leqslant T < +\infty, \tag{10.3}$$

donde $\widetilde{W} = \{W_t\}_{t\in J_T}$ *es un proceso estocástico de Wiener en* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *respecto a* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ *y a* P*, y* η *es una variable aleatoria en* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *independiente de* $\{W_t - W_{t_0}\}_{t\in[t_0,T]}$*. Se supone que:*

(1). $\beta, \gamma : [t_0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *son funciones medibles.*

(2). *(Condición de Lipschitz). Existe L>0 tal que*

$$|\beta(t,x) - \beta(t,y)| + |\gamma(t,x) - \gamma(t,y)| \leqslant L|x-y|,\ t \in [t_0,T],\ x,y \in \mathbb{R}.$$

(3). *(Restricción de crecimiento). Existe* $C > 0$ *tal que*

$$\beta(t,x)^2 + \gamma(t,x)^2 \leqslant C^2(1+x^2),\ t \in [t_0,T],\ x \in \mathbb{R}.$$

Entonces, la ecuación (10.3) tiene una única solución, con probabilidad 1*,* $\{\xi_t\}_{t\in[t_0,T]}$*, que es un proceso estocástico continuo, que verifica la condición inicial* $\xi_{t_0} = \eta$*, es decir, si* $\{\xi_t\}_{t\in[t_0,T]}$ *y* $\{\zeta_t\}_{t\in[t_0,T]}$ *son soluciones de (10.3) con la misma condición inicial* η*, que son procesos estocásticos continuos, entonces* $P\left(\left\{\sup_{t\in[t_0,T]} |\xi_t - \zeta_t| > 0\right\}\right) = 0$.

Para una demostración de este teorema véase el **(6.2.2) Theorem** (página 105 de [2]).

Teorema 10.1.5. *En las hipótesis del teorema anterior, se verifica que la única solución de la ecuación (10.3),* $\{\xi_t\}_{t\in[t_0,T]}$*, es un proceso estocástico de Markov continuo en el intervalo* $[t_0,T]$ *respecto a la filtración* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ *y a* P*, (**Definición 4.4.1**, (página 37 de [76])), cuya distribución de probabilidad inicial en el instante* t_0*, (*$P_{\xi_0}(A) = P(\xi_0 \in A),\ A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$*), es la distribución de probabilidad de* η*, y cuyas probabilidades de transición están dadas por, para todo* $x \in \mathbb{R}$ *y todo* s, t *con* $t_0 \leqslant s < t \leqslant T$*,*

$$P(s,x;t,A) = P(\xi_t \in A|\xi_s = x) = P(\xi_t^{s,x} \in A),\ A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),$$

donde $\{\xi_t^{s,x}\}_{t\in[s,T]}$ *es la solución (única), la cual existe por el teorema anterior, de la ecuación diferencial estocástica (10.3) con condición inicial* x *en* $s \in J_T$*, es decir,*

$$\xi_t = x + \int_s^t \beta(t', \xi_{t'})dt' + \int_s^t \gamma(t', \xi_{t'})dW_{t'},\ x \in \mathbb{R},\ t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T.$$

Para una demostración de este teorema véase el **(9.2.3) Theorem** (página 146 de [2]).

Definición 10.1.6. *Sea* $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}, P)$ *una base estocástica, (**Definición 10.1.1**, (pág. 2)). Un proceso de Markov en* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *respecto a la filtración* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[t_0,T]}$ *y a* P*,* $\{\xi_t\}_{t\in[t_0,T]}$*, continuo (como proceso estocástico), se llama un* proceso de difusión *si sus probabilidades de transición,* $P(s,x;t,\cdot)$*, (*$P(s,x;t,\cdot)$ *es una probabilidad en* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$*),* $x \in \mathbb{R}$*,* $t_0 \leqslant s < t \leqslant T$*, verifican las tres siguientes condiciones para cada* $s \in [t_0, T)$*,* $x \in \mathbb{R}$ *y* $\varepsilon > 0$*:*

(a). $\text{lím}_{t\downarrow s} \frac{1}{t-s}\int_{|y-x|>\varepsilon} P(s,x;t,dy) = \text{lím}_{t\downarrow s}\frac{1}{t-s}P(s,x;t,\{|y-x|>\varepsilon\}) = 0$, *donde* $p(s,x;t,dy)$ *indica integración respecto de la probabilidad, en* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, $P(s,x;t,\cdot)$.

(b). *Existe una función* $f(s,x)$*, con valores reales, tal que*

$$\text{lím}_{t\downarrow s} \frac{1}{t-s}\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} (y-x)P(s,x;t,dy) = f(s,x).$$

(c). *Existe una función* $B(s,x)$*, con valores reales, tal que*

$$\text{lím}_{t\downarrow s} \frac{1}{t-s}\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} (y-x)^2P(s,x;t,dy) = B(s,x).$$

Si se cumplen estas condiciones a las funciones f *y* B *se les llama* coeficientes *del proceso de difusión (*f *es la* deriva *y* B *la* difusión*).*

(**(2.5.1) Definition** de la página 39 de [2]).

A cada proceso de difusión con coeficientes f y B se le asigna un *operador diferencial de segundo orden*, (página 41 de [2]),

$$\mathscr{D} = f(s,x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}B(s,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}. \tag{10.4}$$

Teorema 10.1.7 (**Ecuación *backward* de Kolmogorov**). *Sea una base estocástica, $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}, P)$. En este escenario, dado $t_0 \in J_T$, se considera un proceso estocástico de difusión, $\{\xi_t\}_{t\in[t_0,T]}$, con coeficientes continuos $f(s,x)$ y $B(s,x)$ y tal que los límites en la* ***Definición 10.1.6.*** *se cumplen uniformemente en $s \in [t_0, T)$. Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada, y $t \in (t_0, T]$. Se define la función*

$$u(s,x) = \int_{\mathbb{R}} g(y) P(s,x;t,dy), \ s \in [t_0, t), \ x \in \mathbb{R}. \tag{10.5}$$

Entonces, si $u(s,x)$ tiene derivadas parciales primera y segunda respecto de x continuas y acotadas, se verifica que $u(s,x)$ tiene derivada parcial respecto de s en $(t_0, t) \times \mathbb{R}$ y verifica la ecuación diferencial en derivadas parciales con condición final

$$\begin{array}{l} \frac{\partial u(s,x)}{\partial s} + \mathscr{D} u(s,x) = 0 \\ \lim_{s\uparrow t} u(s,x) = g(x). \end{array} \tag{10.6}$$

Para una demostración de este teorema véase el **Theorem 1** de la página 373 de [39], (véase también el **(2.6.3) Theorem** de la página 42 de [2]).

Teorema 10.1.8 (**Ecuación *backward* de Kolmogorov**). *Con las hipótesis del teorema anterior, si las probabilidades de transición, $P(s,x;t,A)$, $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, tienen función de densidad $p(s,x|t,y)$ que es continua con respecto a s y las derivadas parciales $\frac{\partial p}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ existen y son continuas con respecto a s, se verifica que p es la solución (fundamental) de la ecuación*

$$\frac{\partial p}{\partial s} + \mathscr{D} p = 0, \text{ con condición final } \lim_{s\uparrow t} p(s,x|t,y) = \delta(x-y), \tag{10.7}$$

donde δ es la función de Dirac, (véase la página 90 de [76]).

(Véanse el **(2.6.6) Theorem**, (página 43 de [2]) y las páginas 48-50 de [76]). Este teorema es consecuencia del **Teorema 10.1.7.** teniendo en cuenta las reglas de cálculo de derivación de integrales paramétricas.

Teorema 10.1.9 (**Ecuación *forward* de Kolmogorov o de Fokker-Planck**). *Sean una base estocástica, $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}, P)$, y $\{\xi_t\}_{t\in[t_0,T]}$ un proceso estocástico de difusión en $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[t_0,T]}$ y a P con coeficientes* *continuos $f(s,x)$ y $B(s,x)$ y tal que los límites en la* ***Definición 10.1.6.*** *se verifican uniformemente para $s \in [t_0, T)$. Si las probabilidades de transición $P(s,x;t,B)$ tienen función de densidad $p(s,x|t,y)$ tales que las derivadas parciales $\frac{\partial p}{\partial t}$, $\frac{\partial (f(t,y)p)}{\partial y}$ y $\frac{\partial^2 (B(t,y)p)}{\partial y^2}$ existen y son continuas, entonces para cada par $(s,x) \in [t_0, T) \times \mathbb{R}$ dado, se verifica que p es la solución de la ecuación*

$$\frac{\partial p(s,x|t,y)}{\partial t} + \frac{\partial (f(t,y)p(s,x|t,y))}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 (B(t,y)p(s,x|t,y))}{\partial y^2} = 0,$$
$$\text{con condición final } \lim_{s \uparrow t} p(s,x|t,y) = \delta(x-y),\ t \in (s,T),\ y \in \mathbb{R}, \quad (10.8)$$

donde δ es la función de Dirac, (véase la página 90 de [76]).

Para una demostración de este teorema véase el **Theorem 2** de la página 374 de [39]. Véanse, también, las páginas 43 y 44 de [2] y las páginas 48-50 de [76].

Teorema 10.1.10. *Se supone que la ecuación diferencial estocástica*

$$d\xi_t = \beta(t,\xi_t)dt + \gamma(t,\xi_t)dW_t,\ \xi_{t_0} = \eta,\ t_0 \leqslant t \leqslant T < +\infty, \quad (10.9)$$

cumple las condiciones de existencia y unicidad de solución del ***Teorema 10.1.4.****. Entonces, si $\beta(t,x)$ y $\gamma(t,x)$ son funciones continuas en la variable t, se verifica que el proceso estocástico continuo de Markov, $\{\xi_t\}_{t \in [t_0,T]}$, solución de la ecuación (10.9), es un proceso de difusión con deriva $\beta(t,x)$ y difusión $\gamma(t,x)^2$, y los límites de la* ***Definición 10.1.6.*** *son uniformes con respecto a $s \in [t_0, T)$. Además, si la ecuación diferencial estocástica (10.9) es autónoma y $t \in [0,+\infty)$, es decir, $\beta(t,x) \equiv \beta(x)$ y $\gamma(t,x) \equiv \gamma(x)$, el proceso estocástico de Markov, $\{\xi_t\}_{t \in [t_0,+\infty)}$ es homogéneo, ([76], pág. 50).*

Para una demostración de este teorema véase (9.3.1) **Theorem** de la página 152 de [2].

Como consecuencia de los resultados anteriores se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 10.1.11. *Sea una base estocástica, $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t \in J_T}, P)$. En este escenario se supone que la ecuación diferencial estocástica*

$$d\xi_t = \beta(t,\xi_t)dt + \gamma(t,\xi_t)dW_t,\ \xi_{t_0} = \eta,\ t_0 \leqslant t \leqslant T < +\infty, \quad (10.10)$$

cumple las condiciones de existencia y unicidad de solución del ***Teorema 10.1.4.*** *y que las funciones $\beta(t,x)$ y $\gamma(t,x)$ son continuas. Entonces,*

(1). *La solución de la ecuación (10.10), $\{\xi_t\}_{t\in[t_0,T]}$, es un proceso de difusión con deriva $\beta(t,x)$ y difusión $\gamma(t,x)^2$.*

(2). *Si las probabilidades de transición $P(s,x;t,A)$, ($A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$), del proceso de Markov continuo $\{\xi_t\}_{t\in[t_0,T]}$, tienen funciones de densidad $p(s,x|t,y)$ tales que las derivadas parciales $\frac{\partial p}{\partial t}$, $\frac{\partial (f(t,y)p)}{\partial y}$ y $\frac{\partial^2 (B(t,y)p)}{\partial y^2}$ existen y son continuas, entonces para cada par $(s,x) \in [t_0,T) \times \mathbb{R}$ dado, se verifica que p es la solución de la ecuación*

$$\frac{\partial p(s,x|t,y)}{\partial t} + \frac{\partial(\beta(t,y)p(s,x|t,y))}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\gamma^2(t,y)p(s,x|t,y))}{\partial y^2} = 0,$$
$$\text{con condición final } \lim_{s\uparrow t} p(s,x|t,y) = \delta(x-y), \quad (10.11)$$

donde δ es la función de Dirac, (véase la página 90 de [76]).

A continuación se expone cómo se obtiene a partir de la ecuación de Fokker-Planck, (10.11), la función Lagrangiana de la ecuación diferencial estocástica (10.10), y la integral de caminos de Feynman en su versión Euclídea obtenida mediante la rotación de Wick, (transformación en el plano complejo que transforma el eje imaginario en el eje real, (véase la página 220 de [101])), $t \longmapsto -it$.

En la página 73 de [100] se establece que para valores pequeños de $t-s$, la solución, $p(s,x|t,y)$, de la ecuación (10.11) se puede aproximar, con orden de aproximación $(t-s)^2$, por

$$p(s,x|t,y) \simeq \frac{1}{2\sqrt{\pi\left(\frac{1}{2}\gamma^2(s,x)\right)(t-s)}}\exp\left(-\frac{(y-x-\beta(s,x)(t-s))^2}{4\left(\frac{1}{2}\gamma^2(s,x)\right)(t-s)}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2(s,x)(t-s)}}\exp\left(-\frac{(y-x-\beta(s,x)(t-s))^2}{2\gamma^2(s,x)(t-s)}\right), \quad (10.12)$$

Por otro lado, por **(1)** de la página 48 de [76], las funciones de densidad de transición, $p(s,x|t,y)$, verifican la ecuación de Chapman-Kolmogorov:

$$p(s_1,x|s_3,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(s_1,x|s_2,y)p(s_2,y|s_3,z)dy,\ s_1,s_2,s_3 \in J_T,\ s_1 < s_2 < s_3. \quad (10.13)$$

Ahora, se considera en el intervalo $[t,T]$ una división arbitraria

$$\Delta = \{t_0, t_1, ..., t_n, t_{n+1}\} \text{ con } t = t_0 < t_1 < ... < t_n < t_{n+1} = T. \qquad (10.14)$$

Para todo $i \in 1,2,...,n+1$ sea $\tau_i = t_i - t_{i-1}$, y sea $|\Delta| = \text{máx}\{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{n+1}\}$. A $|\Delta|$ se le llama diámetro de la división Δ. Además, se toman dos puntos fijos, x, y, de $\mathbb{R}$, y n puntos arbitrarios, x_1,...,x_n, de $\mathbb{R}$, y se pone $x_0 = x$ y $x_{n+1} = y$. Entonces, por aplicación reiterada de (10.13), se obtiene

$$p(t,x|T,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{n}{\cdots} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t,x|t_1,x_1)...p(t_n,x_n|T,y)dx_1...dx_n. \qquad (10.15)$$

En el límite cuando $|\Delta|$ tiende a 0 en el segundo miembro de (10.15) se puede utilizar (10.12) y se obtiene

$$\begin{aligned} p(t,x|T,y) &= \lim_{|\Delta|\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{n}{\cdots} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\sum_{i=0}^{n} \frac{(x_{i+1}-x_i-\beta(t_i,x_i)\tau_{i+1})^2}{2\gamma^2(t_i,x_i)\tau_{i+1}}\right)\cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2(t_0,x_0)\tau_1}} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{dx_i}{\sqrt{2\pi\gamma^2(t_i,x_i)\tau_{i+1}}} = \\ &= \lim_{|\Delta|\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{n}{\cdots} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\sum_{i=0}^{n} \frac{\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\tau_{i+1}} - \beta(t_i,x_i)\right)^2}{2\gamma^2(t_i,x_i)}\tau_{i+1}\right)\cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2(t_0,x_0)\tau_1}} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{dx_i}{\sqrt{2\pi\gamma^2(t_i,x_i)\tau_{i+1}}}. \end{aligned} \qquad (10.16)$$

(Para cada división Δ de $[t,T]$, si $m \in \mathbb{N}$ cumple que $\frac{1}{m} \leqslant |\Delta|$ se verifica $\Delta_m = \{t, t_1 = t + \frac{T-t}{m+1}, ..., t_m = t + m\frac{T-t}{m+1}, T\}$ es una división de $[t,T]$ con diámetro $|\Delta_m| = \frac{1}{m+1} < |\Delta|$ y todos los subintervalos tienen la misma longitud, $\frac{1}{m+1}$. Entonces, si en todos los cálculos anteriores se sustituye Δ por Δ_m, cada integral en (10.15) se aproxima con orden $\frac{1}{(m+1)^2}$ al utilizar(10.12) y el producto de todas ellas se aproxima con orden $\frac{m}{(m+1)^2} \simeq \frac{1}{m+1}$, con lo cual en el límite en (10.16) cuando $|\Delta| \to 0$ se obtiene el valor real de $p(t,x|T,y)$, (véase la página 75 de [100])).

Observación 1. El límite en (10.16) cuando $|\Delta| \to 0$ se formaliza matemáticamente de la misma forma a como se define la integral de Riemann con las técnicas de límites. Dados el intervalo $[t,T]$ y los puntos $x,y \in \mathbb{R}$, se considera el conjunto

$$\begin{aligned} D = \{(\Delta; x_1, ..., x_n) :\ \Delta = \{t_0, t_1, ..., t_n, t_{n+1}\} &\text{ división de } [t,T] \text{ con} \\ t = t_0 < t_1 < ... < t_n < t_{n+1} = T,\ x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}. \end{aligned} \tag{10.17}$$

En D se define la relación binaria

$$(\Delta; x_1, ..., x_n) \preccurlyeq (\Delta'; x'_1, ..., x'_m) \Longleftrightarrow |\Delta'| \leqslant |\Delta|. \tag{10.18}$$

Entonces, $(D, \preccurlyeq)$ es un conjunto dirigido, es decir, $\preccurlyeq$ tiene las propiedades reflexiva, transitiva y para todo $(\Delta; x_1, ..., x_n), (\Delta'; x'_1, ..., x'_m) \in D$ existe $(\Delta"; x"_1, ..., x"_p) \in D$ tal que $(\Delta; x_1, ..., x_n) \preccurlyeq (\Delta"; x"_1, ..., x"_p)$ y $(\Delta'; x'_1, ..., x'_m) \preccurlyeq (\Delta"; x"_1, ..., x"_p)$, (generalización de $(\mathbb{N}, \leqslant)$, conjunto de los números naturales con su ordenación usual).

Ahora, se define la red en $\mathbb{R}$, $S : D \to \mathbb{R}$, (generalización de sucesión), por

$$S((\Delta; x_1, ..., x_n)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{n}{\cdots} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\sum_{i=0}^{n} \frac{\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\tau_{i+1}} - \beta(t_i, x_i)\right)^2}{2\gamma^2(t_i, x_i)} \tau_{i+1} \right) \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2(t_0, x_0)\tau_1}} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{dx_i}{\sqrt{2\pi\gamma^2(t_i, x_i)\tau_{i+1}}},\ x_0 = x, x_{n+1} = y\ \tau_{i+1} = t_{i+1} - t_i. \tag{10.19}$$

Así, el límite en (10.16) significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe $(\Delta; x_1, ..., x_n) \in D$ tal que para todo $(\Delta'; x'_1, ..., x'_m) \in D$ con $(\Delta; x_1, ..., x_n) \preccurlyeq (\Delta'; x'_1, ..., x'_m)$ se verifica que $|p(t, x|T, y) - S((\Delta'; x'_1, ..., x'_m)| < \varepsilon$.

El segundo miembro de la última igualdad de (10.16) es la definición dada por Feynman de la integral de caminos, (véanse [33] y [35]), que *formalmente* se escribe

$$\int_{\alpha(t)=x}^{\alpha(T)=y} \exp(-\mathscr{A}(\alpha)) D(\alpha),\ \alpha \in \Omega_{x,y}, \tag{10.20}$$

donde $\Omega_{x,y}$ es el conjunto de aplicaciones continuas, α, del intervalo $[t,T]$ en $\mathbb{R}$ tales que $\alpha(t) = x$ y $\alpha(T) = y$, $D(\alpha)$ indica *formalmente* suma en todos los elementos de $\Omega_{x,y}$, ya que no es posible definir una medida en este conjunto con la propiedad de que todos los caminos tengan el mismo peso para darle el significado de integral, y $\mathscr{A}$ es la acción funcional definida por la función Lagrangiana, llamada función Lagrangiana de la ecuación diferencial estocástica (10.10),

$$(\mathscr{L}(\alpha(s), \dot{\alpha}(s), s) =) \frac{(\dot{\alpha}(s) - \beta(s, \alpha(s)))^2}{2\gamma^2(s, \alpha(s))}, \ \alpha \in \Omega_{x,y}, \tag{10.21}$$

es decir,

$$\mathscr{A}(\alpha) = \int_t^T \mathscr{L}(\alpha(s), \dot{\alpha}(s), s) ds, \ \alpha \in \Omega_{x,y}. \tag{10.22}$$

Con la notación introducida, la igualdad (10.16) se escribe de la forma

$$p(t, x|T, y) = \int_{\alpha(t)=x}^{\alpha(T)=y} \exp(-\mathscr{A}(\alpha)) D(\alpha), \ \alpha \in \Omega_{x,y}. \tag{10.23}$$

Esta fórmula es la que permite utilizar la integral de caminos de Feynman en el campo de las Finanzas a través de las diversas versiones del teorema de Feynman-Kac que se establecen a continuación, y además indica que $p(s, x|t, y)$ juega un papel en Finanzas análogo al del propagador $K(t, x; s, y)$, (pág. 1), en la Mecánica cuántica.

Observación 2. Es importante destacar que la función Lagrangiana de la ecuación diferencial estocástica (10.10) no es única. Otra función Lagrangiana de esta ecuación es

$$\begin{aligned} \overline{\mathscr{L}}(\alpha(s), \dot{\alpha}(s), s) &= \frac{(\dot{\alpha}(s) - \beta(s, \alpha(s)))^2}{2\gamma^2(s, \alpha(s))} + \frac{1}{2}\frac{\partial \beta(s, \alpha(s))}{\partial x} = \\ &= \mathscr{L}(\alpha(s), \dot{\alpha}(s), s) + \frac{1}{2}\frac{\partial \beta(s, \alpha(s))}{\partial x}. \end{aligned} \tag{10.24}$$

Como se ha comentado en el **Prefacio** esto plantea una dificultad en la aplicación de la integral de caminos de Feynman a las finanzas, ya que no se tiene un criterio que permita elegir la función Lagrangiana en cada problema concreto. En el caso de los problemas que se tratarán en el presente libro, precio de opciones sobre activos financieros primarios en el modelo BSM, de bonos y de opciones sobre bonos, este problema se resuelve de la siguiente forma: Por resultados establecidos en volúmenes anteriores de esta obra, los precios de los activos citados se determinan por técnicas probabilísticas y por los teoremas de Feynman-Kac que se establecerán en la **Sectión 10.2**, que sigue, se reducen a la resolución de una ecuación diferencial en derivadas parciales, y por analogía con el formalismo de Feynman de la Mecánica cuántica se obtiene la función Lagrangiana que define la integral de caminos que permite conseguir la solución de la anterior ecuación diferencial en derivadas parciales.

Ejemplo 1. Sean una base estocástica $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}, P)$, (véase la **Definición 10.1.1.**), y $\widetilde{W} = \{W_t\}_{t\in J_T}$ un proceso estocástico de Wiener en $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P. En este escenario se considera la ecuación diferencial estocástica

$$d\xi_t = \sigma dW_t,\ \xi_0 = 0,\ t \in J_t, \tag{10.25}$$

donde σ es un número real no nulo, $(\xi_t = \int_0^t \sigma dW_s = \sigma \int_0^t dW_s = \sigma W_t)$.

La función Lagrangiana de la ecuación diferencial estocástica (10.25), (pág. 11), es

$$\mathscr{L}(\alpha(s), \dot{\alpha}(s), s) = \frac{\dot{\alpha}(s)^2}{2\sigma^2},\ \alpha \in \Omega_{x,y}. \tag{10.26}$$

Por el **Teorema 10.1.10.**, (pág. 7), el proceso estocástico $\{\xi_t = \sigma W_t\}_{t\in J_T}$ es un proceso estocástico continuo de Markov que es un proceso de difusión con deriva $\beta(t,x) = 0$ y difusión $\gamma(t,x)^2 = \sigma^2$. Además, por la **Proposición 10.1.3.(6)**, (pág. 3), y propiedades de la esperanza matemática y la varianza de una variable aleatoria, (véase [84]), este proceso estocástico tiene funciones de densidad de transición dadas por

$$p(s,x|t,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)\sigma^2}\right),\ x,y \in \mathbb{R},\ s,t \in J_T,\ s < t. \tag{10.27}$$

Así, por el **Teorema 10.1.11.**, se tiene que

$$p(t,x|T,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2(T-t)\sigma^2}\right),\ x,y \in \mathbb{R},\ t \in J_T,\ t < T, \tag{10.28}$$

es la solución de la ecuación de Fokker-Planck del proceso estocástico de difusión determinado por la ecuación diferencial estocástica (10.25)

$$\frac{\partial p(t,x|T,y)}{\partial T}=\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 p(t,x|T,y))}{\partial y^2},$$
$$\text{con condición final } (p(T,x|T,y)=)\lim_{t\uparrow T} p(t,x|T,y)=\delta(x-y)=\delta(y-x). \tag{10.29}$$

Finalmente, por (10.27) y (10.23), (pág. 11),

$$p(t,x|T,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2(T-t)\sigma^2}\right)=\int_{\alpha(t)=x}^{\alpha(T)=y}\exp(-\mathscr{A}(\alpha))D(\alpha)$$
$$=\int_{\alpha(t)=x}^{\alpha(T)=y}\exp\left(-\int_t^T\frac{\dot{\alpha}(s)^2}{2\sigma^2}ds\right)D(\alpha),\ \alpha\in\Omega_{x,y}. \tag{10.30}$$

10.2. Teoremas de Feynman-Kac

En esta sección se presentan algunas de las distintas versiones del teorema de **Feynman-Kac**. Como se verá estos teoremas establecen un enlace entre las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, los procesos estocásticos y la integral de caminos de Feynman, enlace que juega un papel muy importante en la utilización de la integral de caminos en el campo de las Finanzas. En la página 51 de [79] ya se ha utilizado una versión de estos teoremas (**Fórmula de Feynman-Kac**) para obtener, por otras técnicas, los precios de las opciones europeas *call* y *put* en el modelo BSM de un mercado financiero.

Teorema 10.2.1. *Sea una base estocástica,* $(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T},P)$. *En este escenario se supone que la ecuación diferencial estocástica*

$$d\xi_t=\beta(t,\xi_t)dt+\gamma(t,\xi_t)dW_t,\ \xi_0=\eta,\ 0\leqslant t\leqslant T<+\infty, \tag{10.31}$$

cumple las condiciones de existencia y unicidad de solución del ***Teorema 10.1.4.****. Sea* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *una función medible.*

Se considera un elemento t *de* J_T *y se define la función*

$$g(t,x)=E[f(\xi_T^{t,x})],\ x\in\mathbb{R}, \tag{10.32}$$