Capítulo I

Variedades con borde

Las variedades son el medio en el que se desenvuelve hoy el Cálculo Diferencial y la Geometría. Esto es así, en gran medida, por la influencia de la Física y en particular de la Mecánica. En efecto, estas disciplinas proponen los problemas clásicos del Análisis y de la Geometría (resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales, cálculo de longitudes y volúmenes, rigidez e isometrías) para espacios de parámetros sujetos a ligaduras. Es claro que esta presentación conduce de modo natural a las variedades, y hace necesario, primero, definirlas rigurosamente y, segundo, extender a ellas el cálculo diferencial clásico. Empezamos este capítulo definiendo en la sección 1 las *aplicaciones diferenciables en subconjuntos arbitrarios del espacio afín* $\mathbb{R}^m$, así como la noción de *difeomorfismo*. Sin embargo, para el estudio de estas aplicaciones es preciso restringirse a una clase especial de subconjuntos: *las variedades*. Éstas se definen en la sección 2, en donde se describe con cuidado la noción de *interior* y *borde* de una variedad y su invarianza por difeomorfismos; también se definen la *dimensión* y la *codimensión* y se ven algunos ejemplos bien conocidos de variedades. La sección 3 está dedicada a uno de los útiles básicos de la materia: las *particiones diferenciables de la unidad*. Para construirlas empezamos mostrando que cualquier conjunto cerrado es el conjunto de *ceros de una función diferenciable* y obteniendo las denominadas *funciones separantes de Urysohn*. El *fibrado tangente* de una variedad se define en la sección 4, para desarrollar en variedades el cálculo diferencial conocido en abiertos del espacio afín. El resultado final de esta sección es el *teorema de inversión local para variedades con borde*. En la sección 5 se demuestra que cualquier punto de una variedad sin borde puede desplazarse a voluntad (mediante difeomorfismos) hasta coincidir con otro dado: es el *teorema de existencia de difeotopías*. La sección 6 está dedicada a la *orientación de variedades*, mediante familias consistentes de orientaciones locales. Además se describe la *orientación inducida en el borde* de la variedad dada. Las dos últimas secciones analizan las nociones duales de *inmersión* y *sumersión*. La primera se estudia en la sección 7, que incluye su definición y su *forma local canónica de inclusión lineal*. La de inmersión es pues una noción local, cuya contrapartida global es la de *inmersión difeomórfica*, que aparece al final de la sección. Finalmente, las sumersiones se definen en la sección 8, en la que se obtiene su *forma local canónica de proyección lineal*.

1. Cálculo diferencial en subconjuntos del espacio afín

Se supone conocido el cálculo diferencial en abiertos de espacios afines, del que brevemente recordamos terminología y notaciones. En este texto distinguimos entre aplicación y *función:* una función es una aplicación que toma valores en $\mathbb{R}$.

(1.1) Aplicaciones diferenciables en abiertos afines. Dado un abierto U de $\mathbb{R}^m$, una aplicación $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ es *diferenciable* si todas sus derivadas parciales

$$\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}} : U \to \mathbb{R}$$

están definidas y son continuas. Si f es diferenciable, su *derivada en un punto* $x \in U$ es la aplicación lineal

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n.$$

Se verifica además que

$$Df(x)(u) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}$$

(límite que se llama *derivada direccional*) para cada $u \in \mathbb{R}^m$. ▮

El concepto de aplicación diferenciable se extiende a subconjuntos arbitrarios del espacio afín del modo que se expone a continuación.

Definición 1.2. Sean $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ dos conjuntos arbitrarios. Se dice que una aplicación $f : X \to Y$ es *diferenciable* si para cada $x \in X$ existe una aplicación diferenciable $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^n$ definida en un entorno abierto U de x en $\mathbb{R}^m$, de manera que $\bar{f}|X \cap U = f|X \cap U$. Diremos que $\bar{f}$ es una *extensión local de* f. El conjunto de las aplicaciones diferenciables de X en Y se denota $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$.

Observación 1.3. Si el interior de X en $\mathbb{R}^m$ es denso en X, entonces la derivada en un punto $x \in X$ de una aplicación diferenciable f es una aplicación lineal $Df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ bien definida. En efecto, si $\bar{f}_1$ y $\bar{f}_2$ son dos extensiones de f a un entorno abierto U de x, se tiene $D\bar{f}_1(y) = D\bar{f}_2(y)$ para todo y en el interior de X, luego por continuidad y la hipótesis de densidad, $D\bar{f}_1(x) = D\bar{f}_2(x)$ y esta aplicación lineal es $Df(x)$. ▮

Esta observación interesa especialmente para los abiertos de los *semiespacios (afines)*

$$\mathbb{H}^p = \{x \in \mathbb{R}^p : \lambda(x) \geqslant 0\},$$

donde $\lambda : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ es una forma lineal no nula: éstos son los modelos locales de las variedades. De hecho, al razonar con semiespacios lo habitual es reducirse al caso en que λ es la proyección coordenada $(x_1, \dots, x_p) \mapsto x_1$, con lo que $\mathbb{H}^p$ está definido por la desigualdad $x_1 \geqslant 0$.

(1.4) Por la misma definición, la restricción de una aplicación diferenciable es diferenciable a su vez. Y como ésta, las propiedades elementales bien conocidas en el caso habitual en que X es un abierto de $\mathbb{R}^m$ valen para X arbitrario. Por ejemplo:

(1) La suma y el producto de funciones diferenciables es diferenciable. El cociente, siempre que no se anule el denominador. Es decir, $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ es un anillo.

(2) La composición de aplicaciones diferenciables es diferenciable y la derivada se calcula por la *regla de la cadena*:

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x),$$

cuando ambas derivadas están definidas.

(3) Una aplicación diferenciable se puede definir por recubrimientos abiertos: si $f_i : X_i \to \mathbb{R}^n$ son aplicaciones diferenciables definidas en abiertos X_i de X que lo recubren, de manera que cualesquiera dos f_i coinciden en la intersección de sus dominios, entonces la aplicación $f : X \to \mathbb{R}^n$ dada por $f_i = f|X_i$ es diferenciable.

(4) Si $f : X \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable, su *derivada direccional en $x \in X$ según $u \in \mathbb{R}^m$* se calcula por la fórmula

$$Df(x)(u) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t},$$

cuando el límite del segundo miembro tenga sentido. ∎

Definición 1.5. Sean $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ dos conjuntos arbitrarios.

(1) Una aplicación biyectiva $f : X \to Y$ es un *difeomorfismo* si tanto $f : X \to Y$ como $f^{-1} : Y \to X$ son diferenciables.

(2) Una aplicación $f : X \to Y$ es un *difeomorfismo local en $x \in X$* si existen entornos abiertos U de x en X y V de $f(x)$ en Y de modo que $V = f(U)$ y la restricción $f|U : U \to V$ es un difeomorfismo.

Un difeomorfismo local entre abiertos de $\mathbb{R}^m$ se caracteriza infinitesimalmente mediante la derivada:

Teorema 1.6 (de inversión local). *Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ un abierto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable y $x \in U$. Entonces f es un difeomorfismo local en x si y sólo si la derivada $Df(x)$ es un isomorfismo lineal.*

Obsérvese que en este enunciado la condición necesaria es una consecuencia inmediata de la regla de la cadena y vale para difeomorfismos locales de abiertos de semiespacios. La condición suficiente es el denominado *teorema de la función inversa,* y para abiertos de semiespacios hay que refinar el enunciado (I.2.4, p. 5, I.4.8, p. 20).

2. Variedades con borde diferenciable

Definición 2.1. Un subconjunto X de $\mathbb{R}^m$ es una *variedad diferenciable* si para cada punto $x \in X$ existe un difeomorfismo $\varphi : A \to U$ de un abierto A de un semiespacio $\mathbb{H}^p$ sobre un entorno abierto U de x en X. Un tal difeomorfismo φ se llama *parametrización (local)* de X, el difeomorfismo inverso $\varphi^{-1} : U \to A$ se llama *sistema (local) de coordenadas de X* y U se llama *dominio de coordenadas.* Dadas dos parametrizaciones $\varphi : A \to U$ y $\psi : B \to V$ de una variedad diferenciable, el difeomorfismo

$$\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(U \cap V) \to U \cap V \to \psi^{-1}(U \cap V)$$

se denomina *cambio de coordenadas.*

En otras palabras, una variedad diferenciable es un conjunto localmente difeomorfo a un semiespacio afín. Por otra parte, una *variedad topológica* es un conjunto localmente homeomorfo de un semiespacio afín.

Observaciones 2.2. (1) Una variedad es localmente homeomorfa a un semiespacio afín. En consecuencia, es localmente compacta y localmente conexa por caminos. Por lo primero, es un conjunto *localmente cerrado* (*esto es, abierto en su adherencia,* o equivalentemente *cerrado en algún abierto que lo contiene*) del espacio afín que la contenga. Por lo segundo, sus componentes conexas son conexas por caminos y son conjuntos abiertos y cerrados de la variedad.

(2) Un subconjunto abierto de una variedad es una variedad a su vez. En particular, las componentes conexas de una variedad son variedades. ∎

Si $\varphi : A \to U$ es una parametrización de la variedad X con $x \in U$ y $\varphi^{-1}(x)$ está en el interior del semiespacio $\mathbb{H}^p$, se puede reducir A para que sea un abierto de $\mathbb{R}^p$. En otro caso, esto no es posible. Para analizar esta cuestión rigurosamente, necesitamos el siguiente resultado elemental:

Lema 2.3. *Sea W un abierto de $\mathbb{R}^p$, $\lambda : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ una forma lineal no nula, y $f : W \to \mathbb{R}^q$ una aplicación diferenciable cuya imagen está totalmente contenida en el semiespacio $\mathbb{H}^q = \{\lambda \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}^q$. Si $x \in W$ es tal que $\lambda(f(x)) = 0$, entonces $\lambda \circ Df(x) \equiv 0$.*

Demostración. Sea $u \in \mathbb{R}^p$. Tenemos

$$\lambda(Df(x)(u)) = \lambda\Big(\lim_{t\to 0} \tfrac{f(x+tu)-f(x)}{t}\Big) = \lim_{t\to 0} \tfrac{\lambda(f(x+tu))-\lambda(f(x))}{t},$$

por la continuidad y la linealidad de λ. Pero como $\lambda(f(x+tu)) \geqslant 0 = \lambda(f(x))$, el numerador del último límite es $\geqslant 0$, luego el límite por la derecha es $\geqslant 0$ y por la izquierda es $\leqslant 0$. Como el límite existe, debe ser 0, es decir $\lambda(Df(x)(u)) = 0$.

∎

Nótese que la frontera de un semiespacio $\mathbb{H}^p = \{\lambda \geqslant 0\}$ es simplemente el espacio lineal $\partial\mathbb{H}^p = \{\lambda = 0\}$, que tiene dimensión $p-1$ y es pues isomorfo a $\mathbb{R}^{p-1}$. Así, el enunciado anterior compara esa frontera con las imágenes de una aplicación diferenciable y de su derivada. De esta comparación se deduce ya que *el borde es invariante por parametrizaciones:*

Proposición 2.4. *Sean $X \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable, $\varphi : A \to U$, $A \subset \mathbb{H}^p$, $\psi : B \to V$, $B \subset \mathbb{H}^q$ parametrizaciones de X, y $a \in U \cap V$. Entonces $p = q$ y $\varphi^{-1}(a)$ está en la frontera de $\mathbb{H}^p$ si y sólo si $\psi^{-1}(a)$ está en la de $\mathbb{H}^q$.*

Demostración. Como el cambio de coordenadas

$$f = \psi^{-1} \circ \varphi : A' = \varphi^{-1}(U \cap V) \to U \cap V \to \psi^{-1}(U \cap V) = B'$$

es un difeomorfismo, su derivada $Df(\varphi^{-1}(a)) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ es un isomorfismo, con lo que $p = q$. Es claro además que mediante un cambio lineal de coordenadas podemos suponer que las dos aplicaciones lineales que definen los semiespacios son la misma proyección coordenada $\lambda : (x_1, \dots, x_p) \mapsto x_1$. Ahora, supongamos que $\varphi^{-1}(a) \notin \{0\} \times \mathbb{R}^{p-1}$, pero $f(\varphi^{-1}(a)) = \psi^{-1}(a) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{q-1}$. Sea $W = \{x_1 > 0\} \cap A'$, que es abierto en $\mathbb{R}^p$ y contiene a $\varphi^{-1}(a)$. Resulta

$$f(W) \subset f(A') \subset B' \subset \mathbb{H}^q = \{x_1 \geqslant 0\}, \quad \lambda(f(\varphi^{-1}(a)) = \lambda(\psi^{-1}(a)) = 0,$$

y por el lema anterior $Df(\varphi^{-1}(a))$ tiene su imagen contenida en el núcleo de λ, que es el hiperplano $x_1 = 0$. Esto significa que esa derivada no es un isomorfismo, contra lo que antes se señaló.

Por simetría se concluye la equivalencia. ∎

En virtud de este resultado, la siguiente definición no depende de parametrizaciones y es consistente:

Definición 2.5. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable. Se dice que un punto $x \in X$ está en el *interior* (resp. *borde*) de X si para alguna parametrización $\varphi : A \to U$, $A \subset \mathbb{H}^p$ con $x \in U$, $\varphi^{-1}(x)$ no está (resp. $\varphi^{-1}(x)$ está) en la frontera de $\mathbb{H}^p$; el conjunto de esos puntos se denota $\operatorname{Int}(X)$ (resp. ∂X). Diremos que X es una variedad *sin borde* si $\partial X = \varnothing$ y *con borde* si $\partial X \neq \varnothing$.

Corolario 2.6. *Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable.*

(1) $\operatorname{Int}(X)$ *es abierto en X y $\partial X = X \setminus \operatorname{Int}(X)$ es cerrado en X.*
(2) $\operatorname{Int}(X)$ *y ∂X son variedades diferenciables, ambas sin borde.*

Demostración. Sea $\varphi : A \to U$, $A \subset \mathbb{H}^p$ una parametrización. El conjunto $\operatorname{Int}(A) = A \setminus \partial\mathbb{H}^p = \varphi^{-1}(U \cap \operatorname{Int}(X))$ es abierto en $\mathbb{R}^p$ y la restricción $\varphi| \operatorname{Int}(A) : \operatorname{Int}(A) \to U \cap \operatorname{Int}(X)$ es un difeomorfismo. Asímismo el borde $\partial A = A \cap \partial\mathbb{H}^p = \varphi^{-1}(U \cap \partial X)$ es abierto en $\partial\mathbb{H}^p \equiv \mathbb{R}^{p-1}$ y $\varphi|\partial A : \partial A \to U \cap \partial X$ es un difeomorfismo. Todo esto implica las afirmaciones del enunciado. ∎

Es por lo anterior que a veces se emplea el término variedad con *borde diferenciable.* En fin, de la proposición I.2.4, p. 5, deducimos:

Teorema 2.7 (de invarianza del borde). *Sean $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ variedades diferenciables y $f : X \to Y$ un difeomorfismo. Entonces $f(\partial X) = \partial Y$, y en consecuencia $f(\operatorname{Int}(X)) = \operatorname{Int}(Y)$.*

Demostración. Si $\varphi : A \to U \subset X$ es una parametrización de X, entonces $f \circ \varphi : A \to f(U) \subset Y$ lo es de Y. ∎

(2.8) Localizaciones. Nuestra definición de aplicación diferenciable $f : X \to Y$ depende de las inclusiones $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$. Para variedades esto es sólo aparente: f es diferenciable si y sólo si para cada $x \in X$ existen parametrizaciones $\varphi : A \to U$ de X y $\psi : B \to V$ de Y con $x \in U$, $f(x) \in V$ y $f(U) \subset V$, de manera que la *localización* $\psi^{-1} f \varphi : A \to B$ sea diferenciable. ∎

El comportamiento del borde es muy relevante para la manipulación de aplicaciones entre variedades. Para simplificar la exposición de muchos resultados, introducimos la terminología siguiente:

Definición 2.9. Una aplicación $f : X \to Y$ entre variedades *conserva el borde en* $T \subset X$ si todo punto $x \in T$ tiene un entorno U en X tal que $f(U \cap \partial X) \subset \partial Y$. Convenimos que esto se cumple trivialmente si $T \subset \operatorname{Int}(X)$.

Nótese que para difeomorfismos se conserva el borde *y el interior,* pero una aplicación que no es difeomorfismo puede conservar el borde y no el interior. Véase a este respecto el resultado I.8.4, p. 43.

La invarianza del borde también es cierta para variedades topológicas, como consecuencia del denominado *teorema de invarianza del dominio*. Veremos esto en el último capítulo (IV.3.2, p. 128).

(2.10) Dimensión. (1) Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable, $x \in X$ y

$$\varphi : A \to U,\ A \subset \mathbb{H}^p;\quad \psi : B \to V,\ B \subset \mathbb{H}^d,$$

parametrizaciones con $x \in U \cap V$. Ya sabemos que debe ser $p = d$: este número, que es $\leqslant m$, se llama *dimensión* de X en x, y se denota $\dim_x X$. Nótese que si x está en el interior de la variedad, es $\dim_x \operatorname{Int}(X) = \dim_x X$, y si x está en el borde, $\dim_x \partial X = \dim_x X - 1$.

Se llama *dimensión de* X y se denota $\dim X$, al máximo de las dimensiones $\dim_x X$, $x \in X$.

Destaquemos que, de nuevo por el teorema de invarianza del dominio (*loc. cit.*), esta definición de dimensión sirve también para variedades topológicas.

(2) Por la propia consistencia de la definición, la dimensión es localmente constante, y por el argumento típico de conexión, constante en cada componente conexa de X. En general, si la dimensión es constante en todo X, decimos que X es de dimensión *pura*. Es habitual reducirse a este caso, considerando separadamente cada componente conexa de la variedad dada (y recordemos que las componentes conexas de una variedad son conjuntos abiertos y cerrados).

Una variedad de dimensión pura 1 se llama *curva*, y una de dimensión pura 2 se llama *superficie*. Sólo las curvas y las superficies están completamente clasificadas. Veremos en IV.1 que las curvas conexas son sólo cuatro: $\mathbb{R}$, $[0,1)$, $[0,1]$ y $\mathbb{S}^1$.

(3) Si $X \subset Y$ son dos variedades de dimensiones p y q en un punto $x \in X$, denominamos *codimensión de* X *en* Y *en el punto* x *al número* $\operatorname{codim}_x(Y, X) =$

$q-p$. Si esta codimensión es constante se dice que la codimensión es *pura*, y se denota $\operatorname{codim}(Y,X)$. Una variedad $X\subset Y$ de codimensión pura 1 en Y se denomina *hipersuperficie* de Y. ∎

Ejemplos 2.11. (1) El espacio afín $\mathbb{R}^p$ es una variedad diferenciable sin borde, de dimensión pura p.

(2) Un semiespacio $\mathbb{H}^p$ es una variedad diferenciable de dimensión pura p, con borde el hiperplano $\partial\mathbb{H}^p$, difeomorfo a $\mathbb{R}^{p-1}$, y con interior difeomorfo a $\mathbb{R}^p$.

(3) La esfera unidad $\mathbb{S}^p=\{\|x\|=1\}\subset\mathbb{R}^{p+1}$ es una variedad diferenciable sin borde, de dimensión pura p. Esto se puede ver utilizando dos proyecciones estereográficas, y, por ser la esfera compacta, es imposible hacerlo con menos de dos parametrizaciones.

(4) El disco unidad cerrado (o bola unidad cerrada) $\mathbb{D}^{p+1}=\{\|x\|\leqslant 1\}\subset\mathbb{R}^{p+1}$ es una variedad diferenciable de dimensión pura $p+1$, con borde la esfera $\mathbb{S}^p$ e interior la *bola unidad abierta* que es difeomorfa a $\mathbb{R}^{p+1}$.

(5) El espacio proyectivo real $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, considerado como subconjunto de $\mathbb{R}^N$ via $(x_0:\ldots:x_n)\mapsto(x_ix_j/\sum x_k^2)$ es una variedad diferenciable con parametrizaciones $\varphi_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{P}^n(\mathbb{R}):(t_j)_{j\neq i}\mapsto(t_0:\ldots:1:\ldots:t_n)$. ∎

(2.12) Espacio tangente. Sean $X\subset\mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable, $\varphi:A\to U$ una parametrización, y $x\in U$; será $A\subset\mathbb{H}^p$, $p=\dim_x X$. Como $\phi=\varphi^{-1}$ es diferenciable, tal vez reduciendo U, existe un abierto W de $\mathbb{R}^m$ tal que $W\cap X=U$ y una aplicación diferenciable $\bar\phi:W\to\mathbb{R}^p$ tal que $\bar\phi|U=\phi$. En consecuencia la composición $\bar\phi\circ\varphi:A\to\mathbb{R}^p$ es la inclusión canónica, y derivando resulta $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p}=D\bar\phi(x)\circ D\varphi(\varphi^{-1}(x))$. Esto significa que $D\varphi(\varphi^{-1}(x)):\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal inyectiva. Consideremos ahora una segunda parametrización $\psi:B\to V$ con $x\in V$ y la composición

$$f=\varphi^{-1}\circ\psi:\psi^{-1}(U\cap V)\to U\cap V\to\varphi^{-1}(U\cap V),$$

que es un difeomorfismo y cuya derivada $Df(\psi^{-1}(x))$ es por tanto un isomorfismo lineal. Como $\varphi\circ f=\psi$, por la regla de la cadena tenemos

$$D\varphi(\varphi^{-1}(x))\circ Df(\psi^{-1}(x))=D\psi(\psi^{-1}(x)),$$

y en consecuencia, la imagen de $D\psi(\psi^{-1}(x))$ está contenida en la de $D\varphi(\varphi^{-1}(x))$. Intercambiando los papeles de φ y ψ resulta el otro contenido y por tanto las dos derivadas tienen la misma imagen. Esa imagen es un subespacio lineal de dimensión p de $\mathbb{R}^m$ por ser las derivadas de las parametrizaciones inyectivas. ∎

La última observación justifica la siguiente definición:

Definición 2.13. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable y $x \in X$. Para cualquier parametrización $\varphi : A \to U$ de X, $A \subset \mathbb{H}^p$, con $x \in U$, la imagen de la aplicación lineal $D\varphi(\varphi^{-1}(x)) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ se denomina *espacio tangente a X en x* y se denota T_xX.

Por lo anterior sabemos además que $\dim_x X = \dim T_xX$, y que $D\varphi(\varphi^{-1}(x))$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}^p$ sobre T_xX. Nótese que si $x \in \partial X$, entonces ∂X tiene su espacio tangente $T_x\partial X$, que es un hiperplano de T_xX.

(2.14) Producto de variedades. Sean $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ dos variedades diferenciables, una sin borde (que podemos suponer es Y, ya que la permutación de coordenadas $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ es un difeomorfismo). Entonces $X \times Y \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable, con borde $\partial(X \times Y) = (\partial X) \times Y$. Además, para cualquier $(x, y) \in X \times Y$ se tiene

$$\dim_{(x,y)}(X \times Y) = \dim_x X + \dim_y Y \quad \text{y} \quad T_{(x,y)}(X \times Y) = T_xX \times T_yY.$$

En efecto, sean $\varphi : A \to U$, $A \subset \mathbb{H}^p$, una parametrización de X con $x \in U$ y $\psi : B \to V$, $B \subset \mathbb{R}^q$, una de Y con $y \in V$. Resulta que $\varphi \times \psi : A \times B \to U \times V$ es una parametrización de $X \times Y$ con $(x, y) \in U \times V$. Como $A \times B$ es abierto de $\mathbb{H}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{H}^{p+q}$ se deducen las afirmaciones sobre borde y dimensión. Por otra parte, $D(\varphi \times \psi)(x, y) = D\varphi(x) \times D\psi(y) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, y se sigue la afirmación sobre los espacios tangentes. ∎

Si Y tuviera borde, en la construcción precedente B sería un abierto de $\mathbb{H}^q$ y $A \times B$ sería un abierto del *cuadrante* $\mathbb{H}^p \times \mathbb{H}^q$. Este cuadrante es homeomorfo, *pero no difeomorfo* al semiespacio $\mathbb{H}^{p+q}$ (prob. 8 de este capítulo, p. 45). Por eso al hacer el producto se supone una de las variedades sin borde.

Ejemplo 2.15. El producto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^4$ es una superficie diferenciable sin borde, difeomorfa al toro *de revolución* $X \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $16(x^2+y^2) = (x^2+y^2+z^2+3)^2$ obtenido rotando alrededor del eje z la circunferencia unidad del plano (y, z) de centro $(2, 0)$ (véase el prob. 35 de este capítulo, p. 48). El producto $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset$

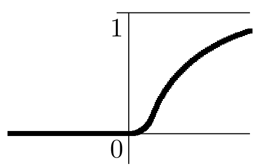
$\mathbb{R}^4$ se denomina *toro plano* por razones que tienen que ver con su geometría: *es localmente isométrico a* $\mathbb{R}^2$. ▮

3. Particiones diferenciables de la unidad

Las particiones continuas de la unidad tienen su versión diferenciable, de uso imprescindible en muchas construcciones.

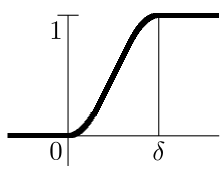
(3.1) Funciones meseta. Utilizaremos a menudo funciones diferenciables de una variable $\mathbb{R} \to [0,1]$ como las siguientes, cuyas gráficas representamos junto a su definición.

(1) La primera es la bien conocida función *absolutamente plana* (en $t = 0$):



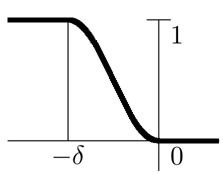
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0, \\ \exp(-1/t) & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

(2) A continuación deformamos f:



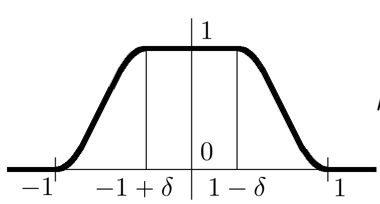
$$g_\delta(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(\delta - t)} \quad \text{para} \quad \delta > 0.$$

(3) Simetricemos la función g_δ anterior:



$$h_\delta(t) = g_\delta(-t) \quad \text{para} \quad \delta > 0.$$

(4) La *función meseta* de la recta real es:



$$\mu_\delta(t) = g_\delta(1 + t) \cdot g_\delta(1 - t) \text{ para } 0 < \delta < 1.$$