Capítulo I

Variedades diferenciables

En este capítulo se definen los objetos geométricos que son nuestro tema de estudio: las *variedades diferenciables* con y sin *borde*. Para ello se extiende a subconjuntos arbitrarios del espacio afín la noción de aplicación diferenciable en un abierto, y consecuentemente la de *difeomorfismo*. Las variedades son conjuntos localmente difeomorfos a un espacio afín, o a un semiespacio afín si tienen borde. Esta descripción local permite utilizar *sistemas locales de coordenadas*, y definir la *dimensión* y el *borde* de modo consistente. Asimismo se introducen las *particiones diferenciables de la unidad*, que serán imprescindibles en muchas construcciones posteriores. Todas estas nociones se introducen primero en un ambiente afín, pero después se describen con independencia de ese ambiente.

1. Definición de variedad

Sea $U \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto abierto. Una aplicación $f : U \to \mathbb{R}^q$ se llama *diferenciable* si todas sus derivadas parciales $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}}$ existen y son continuas. Nótese por tanto que usamos aquí el término diferenciable para referirnos a aplicaciones de clase infinito. Más generalmente, una aplicación $f : X \to Y$ entre dos subconjuntos arbitrarios $X \subset \mathbb{R}^p$ e $Y \subset \mathbb{R}^q$ se llama *diferenciable* si cada punto $x \in X$ tiene un entorno abierto U en $\mathbb{R}^p$ al que f se extiende diferenciablemente, es decir, existe una aplicación diferenciable $F : U \to \mathbb{R}^q$ que coincide con f en $U \cap X$. Por ser diferenciable, F es continua, luego f lo es también. Remarquemos que la extensión F depende del punto x y en general no es única. El conjunto de las aplicaciones diferenciables de X en Y se denota $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$. Para $Y = \mathbb{R}$, tenemos el conjunto $\mathcal{C}^\infty(X) = \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ de las funciones diferenciables de X.

Claramente, la composición de aplicaciones diferenciables es de nuevo diferenciable.

Definición 1.1 Una aplicación $f : X \to Y$ se llama *difeomorfismo* si es biyectiva y tanto ella como su inversa son diferenciables. Se dice que f es un *difeomorfismo local en un punto* $a \in X$ si f es un difeomorfismo de un entorno abierto de a en X sobre otro de $f(a)$ en Y.

Observaciones 1.2 (1) Un difeomorfismo es algo más que un homeomorfismo diferenciable: $f(t) = t^3$ no es un difeomorfismo, pues la raíz cúbica no es diferenciable en $t = 0$.

(2) Un difeomorfismo local (en todos los puntos de su dominio) $f : X \to Y$ es una aplicación abierta. Sin embargo, no es necesariamente inyectiva, luego no es necesariamente un difeomorfismo. Si es inyectiva, entonces es un difeomorfismo sobre su imagen $f(X)$ que es un conjunto abierto de Y (pero no necesariamente todo Y, pues f no tiene por que ser una aplicación suprayectiva). ■

La noción de difeomorfismo nos permite centrar la atención en ciertos subconjuntos del espacio afín que no son completamente arbitrarios, y forman una categoría importante desde el punto de vista geométrico:

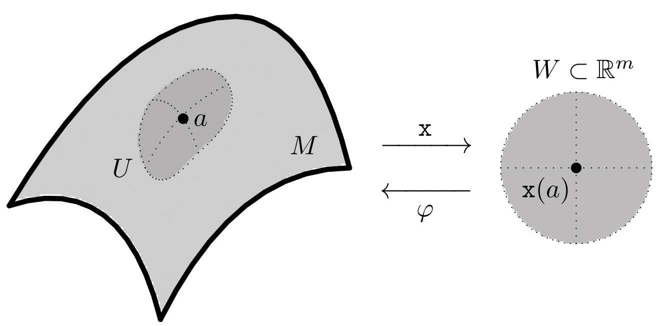
Definición 1.3 Un conjunto $M \subset \mathbb{R}^p$ se llama *variedad diferenciable* o simplemente *variedad* si cada punto $x \in M$ tiene un entorno abierto U en M que es difeomorfo a un abierto W de un espacio afín. Un difeomorfismo particular

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p) : W \to U \subset M$$

se denomina *parametrización de M en x*, el difeomorfismo inverso

$$\mathtt{x} = (\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_m) : U \to W \subset \mathbb{R}^m$$

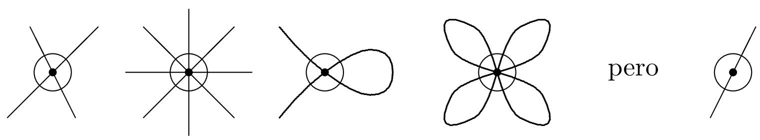
se llama *sistema de coordenadas de M en x*, y el abierto U se llama *dominio de coordenadas.* A veces se escribe simplemente $\varphi : W \to M$, $\mathtt{x} : U \to \mathbb{R}^m$, pero esto sólo elude especificar las imágenes de $\varphi, \mathtt{x}$ y no supone que sean suprayectivas. Una colección de dominios de coordenadas que recubran M se denomina *atlas* (diferenciable).



Dadas dos parametrizaciones φ y ψ con dominios de coordenadas U y V, se llama *cambio de coordenadas* a la composición $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(U \cap V) \to \psi^{-1}(U \cap V)$, que es un difeomorfismo entre abiertos afines.

Ejemplos 1.4 (1) Los ejemplos primeros de variedades son los subespacios afines de $\mathbb{R}^p$, porque son difeomorfos a un $\mathbb{R}^m$. Sea $M \subset \mathbb{R}^p$ un tal subespacio, $x \in M$ y $M = x + L[u_1, \dots, u_m]$ (los u_i independientes). Entonces la aplicación afín $\varphi(t) = x + \sum_i t_i u_i$ es una parametrización en el sentido anterior, y $\varphi(\mathbb{R}^m) = M$.

(2) Un par de rectas que se cortan no es variedad, por un razonamiento topológico elemental. En efecto, el punto de corte de las rectas desconecta cualquier entorno suyo en al menos cuatro componentes, y si uno de esos entornos fuera homeomorfo a un intervalo de $\mathbb{R}$, lo desconectaría en dos (y si fuera homeomorfo a una bola de $\mathbb{R}^m, m \geq 2$, no lo desconectaría). Esto es:



Igualmente por conexión, un cono $X : x^2 + y^2 = z^2$ no es una variedad. Pero la conexión es insuficiente para mostrar que el semicono $X \cap \{z \geq 0\}$ no es variedad, ni que un par de planos $Y : xy = 0$ tampoco lo es. Puede hacerse sólo con la definición, pero la manera eficiente de tratar conjuntos así son las tangencias que estudiamos en el capítulo siguiente (véase II.1.9).

(3) La esfera unidad $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ de ecuación $x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1$ es una variedad diferenciable. Se pueden usar como sistemas de coordenadas las proyecciones sobre los hiperplanos coordenados, que dan parametrizaciones del tipo:

$$W \to \mathbb{S}^m : (t_1, \dots, t_m) \mapsto \Big(t_1, \dots, t_m, \pm\sqrt{1 - (t_1^2 + \cdots + t_m^2)}\Big),$$

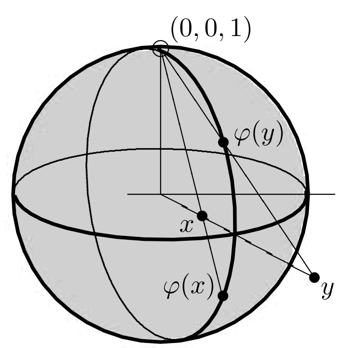
siendo W la bola abierta $\|t\| < 1$. Así parametrizamos semiesferas abiertas, y hacen falta $2(m+1)$ para recubrir toda la esfera. Este número de parametrizaciones puede reducirse a solamente dos, utilizando como coordenadas las proyecciones estereográficas desde dos puntos antipodales,

$$(x_1, \dots, x_{m+1}) \mapsto \Big(\frac{x_1}{1 \mp x_{m+1}}, \dots, \frac{x_m}{1 \mp x_{m+1}}\Big),$$

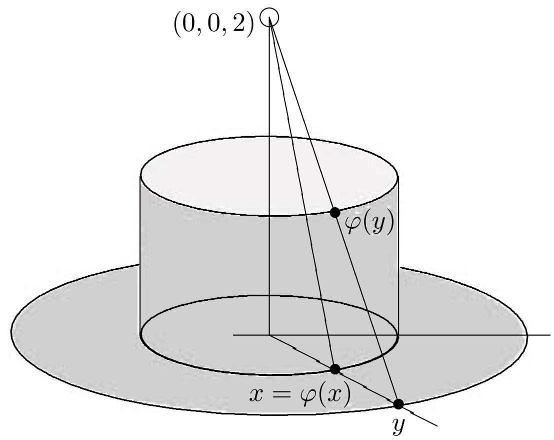
que corresponden a las parametrizaciones de la figura adjunta, $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{S}^m$ dadas por

$$\varphi(t_1, \dots, t_m) = \Big(\frac{2t_1}{\|t\|^2+1}, \dots, \frac{2t_m}{\|t\|^2+1}, \pm\frac{\|t\|^2-1}{\|t\|^2+1}\Big).$$

El cambio de coordenadas (en cualquier orden) es $\mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^m \setminus \{0\} : t \mapsto t/\|t\|^2$.



(4) Aunque las proyecciones estereográficas se suelen asociar siempre a las esferas, son también útiles para parametrizar otras variedades. Por ejemplo, en la figura siguiente se ve cómo proyectando el cilindro $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $0 < x_3 < 1$ desde el punto $(0, 0, 2)$ se obtiene un difeomorfismo sobre la corona circular plana $1 < x_1^2 + x_2^2 < 4$.



(5) Hemos visto cómo recubrir un cilindro con una parametrización, y una esfera con dos. Para la esfera hacen falta dos, pues si una bastara, su dominio, un abierto de $\mathbb{R}^m$, sería homeomorfo a una esfera, que es compacta. De hecho, dos parametrizaciones son suficientes para cualquier superficie compacta de $\mathbb{R}^3$ (en I.2 Prob.4 se propone esto para un toro de revolución).

Observaciones 1.5 (1) A veces es útil el hecho sencillo de que siempre se pueden utilizar parametrizaciones definidas en todo el espacio $\mathbb{R}^m$. Sea M una variedad y fijemos $a \in M$. Si $\mathtt{x} : U \to \mathbb{R}^m$ es un sistema de coordenadas con $a \in U$, mediante una traslación podemos suponer que $\mathtt{x}(a)$ es el origen, y reduciendo U, que $\mathtt{x}(U)$ es una bola $\|x\| < \varepsilon$. Entonces basta componer con el difeomorfismo $x \mapsto x/\sqrt{\varepsilon^2 - \|x\|^2}$ de esa bola sobre $\mathbb{R}^m$.

(2) Las propiedades topológicas locales de las variedades son las del espacio afín: son localmente compactas y localmente conexas (por arcos). Por lo último, sus componentes conexas son abiertas. Por supuesto, por ser subconjuntos del espacio afín son metrizables y tienen una base de abiertos numerable.

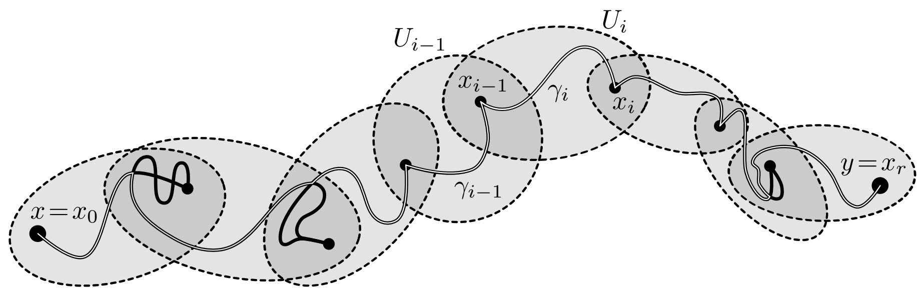
(3) En toda variedad M se puede construir una sucesión de compactos $L_k \subset M$ que recubran M y cumplan $L_k \subset \mathrm{Int}(L_{k+1})$.

Ésta es una cuestión puramente topológica. Se recubre M con dominios de coordenadas U cuyas adherencias B sean compactas (por ejemplo, difeomorfas a bolas cerradas) y se extrae un recubrimiento numerable $\{U_\ell\}$ (pues la topología tiene una base numerable). La monotonía se consigue para $L_{k+1} = B_1 \cup \cdots \cup B_\ell$, con ℓ tal que el compacto anterior L_k esté contenido en $U_1 \cup \cdots \cup U_\ell$.

(4) Sean x, y dos puntos de una variedad conexa M. Todo recubrimiento abierto $\{U\}$ de M contiene una *cadena finita* $\{U_i\}_{1\le i\le r}$, que conecta x con y, es decir, tal que $x \in U_1$, $y \in U_r$, y cada U_{i-1} $(i > 1)$ interseca al siguiente U_i.

La demostración, típica de conexión, consiste en ver que los puntos y que se pueden conectar con x forman un conjunto abierto y cerrado (no vacío). La elección *arbitraria previa* del recubrimiento es lo que hace útiles estas cadenas.

(5) Una variedad conexa M es conexa por caminos y por arcos *diferenciables a pedazos*.



En efecto, tomando los U anteriores difeomorfos a bolas euclídeas, tenemos una cadena $\{U_i\}$ y puntos

$$x = x_0 \in U_1,\ x_1 \in U_1 \cap U_2, \ldots, x_{r-1} \in U_{r-1} \cap U_r,\ y = x_r \in U_r.$$

Cada par $x_{i-1}, x_i \in U_i$ se pueden conectar por un *arco diferenciable* γ_i (un segmento en la bola correspondiente). Concatenando esos arcos se tiene un *camino diferenciable a pedazos* de x a y, que *contiene* un arco (I.1 Prob.5). La figura anterior ilustra la construcción. ■

Sea $U \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto abierto. Como es bien sabido, la *derivada en un punto* $a \in U$ de una aplicación diferenciable $f = (f_1, \ldots, f_q) : U \to \mathbb{R}^q$ es la aplicación lineal $d_a f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ cuya matriz es la *matriz jacobiana en el punto* a:

$$d_a f(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$$

para cada $u = (u_1, \ldots, u_p) \in \mathbb{R}^p$; vemos que esta expresión matricial es diferenciable respecto de (a, u). También se tiene la descripción como *derivada direccional*

$$d_a f(u) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}.$$

Dos propiedades fundamentales que recordamos ahora son las siguientes:

(1) Toda aplicación lineal es diferenciable, y su derivada en cualquier punto es ella misma.

(2) La derivada de una composición de aplicaciones diferenciables es la composición de las derivadas. Esta es la conocida *regla de la cadena*, que se expresa con la fórmula:
$$d_a(g \circ f) = d_{f(a)} g \circ d_a f.$$

El resultado básico sobre la derivada es el

Teorema de inversión local. Una aplicación diferenciable $f : U \to \mathbb{R}^q$ es un difeomorfismo local en un punto $a \in U$ si y sólo si la derivada $d_a f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ es un isomorfismo lineal (en particular, $p = q$).

Demostración. La necesidad es fácil, pues si g es el difeomorfismo inverso de un entorno de $b = f(a)$ sobre otro de a, aplicando la regla de la cadena a las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$ resulta que $d_b g$ es inverso por ambos lados de $d_a f$. La suficiencia, se ve lo difícil, se ve en todos los textos de Análisis. ■

Aplicando la parte fácil del teorema anterior a los cambios de coordenadas, resulta que dos parametrizaciones en un mismo punto $a \in M$ están definidas en espacios afines de la misma dimensión. Por ello se puede tomar esa dimensión como *dimensión* de la variedad en a; se denota $\dim_a M$. Por lo que acabamos de decir la dimensión es localmente constante, luego constante en cada componente conexa de M, y si es la misma en todas ellas la denotamos $\dim(M)$. Las variedades M de dimensión 0 son los conjuntos discretos: cada punto es aislado en M. Las variedades de dimensión 1 se llaman *curvas* y las de dimensión 2 se llaman *superficies*. Si $M \subset N$ son dos variedades de dimensiones m y n respectivamente, la diferencia $n - m$ se llama *codimensión* de M en N y se denota $\operatorname{codim}(M)$; si es 1 decimos que M es una *hipersuperficie* de N.

(1.6) Localización de aplicaciones continuas. Sea $f : M \to N$ una aplicación continua entre dos variedades M y N. Para cualesquiera dos parametrizaciones

$\varphi : A \to U \subset M$ y $\psi : B \to V \subset N$ tales que $f(U) \subset V$ tenemos definida la aplicación continua

$$g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi : A \to B,$$

que denominamos *localización de* f. Como f es continua, estos U recubren M, y concluimos que f es diferenciable si y sólo si todas sus localizaciones lo son.

Problemas

Número 1. Probar que un difeomorfismo local $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de hecho un difeomorfismo sobre un intervalo abierto. ¿Se puede generalizar este hecho a dimensión superior?

Número 2. Construir un difeomorfismo de $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ sobre el exterior de la bola unidad $\|x\| > 1$ y otro sobre la corona $1 < \|x\| < 2$.

Número 3. Sea $E \subset \mathbb{R}^2$ la unión de todas las rectas $y = kx$, $k \in \mathbb{Z}$. ¿Es $\mathbb{R}^2 \setminus E$ una variedad?

Número 4. (1) Mostrar que el par de planos $X : xy = 0$ no es una variedad diferenciable. Más delicado es sin la diferenciabilidad, pues requiere un mínimo de Topología Algebraica.

(2) Demostrar que ni el semicono $X : x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$, ni la *cúspide* $Y : x^2 + y^2 = z^3$ son variedades diferenciables, pero nótese que ambos son homeomorfos a $\mathbb{R}^2$.

Número 5. Demostrar que una variedad conexa es conexa por *arcos,* completando el argumento de I.1.5(5): como el camino allí construido encadenando arcos puede no ser inyectivo, hay que suprimir fragmentos innecesarios para conectar x con y.

Número 6. Construir para cada entero $r > 0$ un difeomorfismo local suprayectivo $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ tal que cada $b \in \mathbb{S}^1$ tenga exactamente r preimágenes. (Utilizar $f(z) = z^r, z \in \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$.)

Número 7. (*Espacio recubridor*) Sea $f : M \to N$ un homeomorfismo local suprayectivo entre variedades compactas, la segunda conexa. Demostrar que cada punto $b \in N$ tiene un entorno abierto conexo V tal que: (i) $f^{-1}(V) = U_1 \cup \cdots \cup U_r$ con los U_i abiertos disjuntos, (ii) cada restricción $f|U_i$ es un homeomorfismo sobre V, y (iii) el número r es independiente de b. En consecuencia todas las fibras $f^{-1}(y)$, $y \in N$, tienen r puntos.

Número 8. Identificamos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $z = x + iy \in \mathbb{C}$, y sea $P(z)$ un polinomio mónico con coeficientes complejos. Mostrar que $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto P(z)$ es una aplicación diferenciable, y un difeomorfismo local en todos los puntos salvo una cantidad finita.

Número 9. Sea $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ el conjunto definido por $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = x_{n+1}^2 - 1$, $x_{n+1} > 0$. Probar que la *pseudoinversión*

$$f(x) = \Big(\frac{x_1}{x_{n+1} + 1}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1} + 1}\Big)$$

induce un difeomorfismo de M sobre un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, e identificar ese subconjunto.

Número 10. Identificamos $\mathbb{R}^{2\times 2}$ con el conjunto de las aplicaciones lineales $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, y denotamos M el conjunto de las que dejan invariante la parábola $y = x^2$. Probar que M es una curva difeomorfa a la propia parábola. ¿Qué obtenemos si sustituimos la parábola por la hipérbola $xy = 1$?

2. Construcción de variedades

El método más directo para construir variedades es encontrar parametrizaciones, es decir aplicaciones $\varphi : W \to \mathbb{R}^p$ que definan difeomorfismos de su dominio $W \subset \mathbb{R}^m$ sobre su imagen $M = \varphi(W) \subset \mathbb{R}^p$, que en consecuencia será una variedad diferenciable. Una condición necesaria fácil es que cada derivada $d_a\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ es *inyectiva*. En efecto, como $\mathtt{x} = \varphi^{-1} : \varphi(W) \to W$ es una aplicación diferenciable, existe, tal vez después de reducir W, una aplicación diferenciable $\bar{\mathtt{x}} : A \to \mathbb{R}^m$ que extiende $\mathtt{x}$ a un abierto A de $\mathbb{R}^p$, de modo que $\bar{\mathtt{x}} \circ \varphi$ es la inclusión $W \subset \mathbb{R}^m$. Derivando resulta $d_{\varphi(a)}\bar{\mathtt{x}} \circ d_a\varphi = \mathrm{Id} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, con lo que $d_a\varphi$ es inyectiva.

Lo importante es que, de hecho, esta condición necesaria es también suficiente:

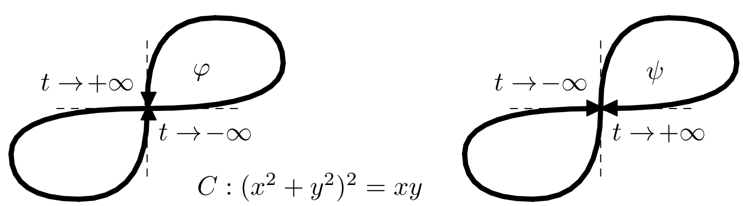
Proposición 2.1 *Sea $g : V \to \mathbb{R}^p$ una aplicación diferenciable definida en un abierto V de $\mathbb{R}^m$. Si la derivada de g en un punto $a \in V$ es inyectiva, entonces existe un entorno abierto $W \subset V$ de a tal que $g|W : W \to g(W)$ es un difeomorfismo. En consecuencia, $M = g(W) \subset \mathbb{R}^p$ es una variedad diferenciable de dimensión m y $\varphi = g|W : W \to M$ una parametrización de M en a.*

Demostración. Como $d_ag : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ es inyectiva, existe un isomorfismo lineal $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ tal que $h|\mathbb{R}^m = d_ag$ (identificamos $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times \{0\}$). Entonces definimos $f : V \times \mathbb{R}^{p-m} \to \mathbb{R}^p : (x, y) \mapsto g(x) + h(0, y)$, cuya derivada es

$$d_{(a,0)}f(u, v) = d_ag(u) + h(0, v) = h(u, v).$$

De este modo, por el teorema de inversión local, f es un difeomorfismo de un entorno $W \times W'$ de $(a, 0)$ sobre un entorno de $f(a, 0) = g(a)$ en $\mathbb{R}^p$. Por tanto, $g|W = f|W \times \{0\}$ es un difeomorfismo sobre $g(W) = f(W \times \{0\})$. ∎

Observación 2.2 Es muy importante comprender la naturaleza local del resultado anterior. Para ilustrarla considérese el siguiente ejemplo. Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ la *lemniscata de Bernoulli* de ecuación $(x^2 + y^2)^2 = xy$, que *no es* una curva diferenciable porque en el origen se cortan dos ramas.



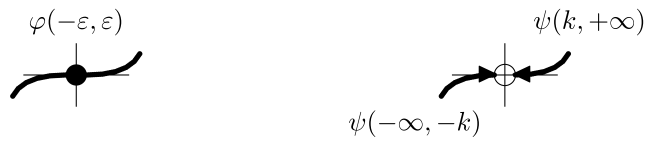
Sin embargo, la aplicación

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \right)$$

es inyectiva, su derivada en cualquier punto también, y su imagen es exactamente C, recorrida como indica la figura de la izquierda anterior. La de la derecha corresponde a la aplicación

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : s \mapsto \left(\frac{s^3}{1+s^4}, \frac{s}{1+s^4} \right),$$

que cumple las mismas propiedades. Sin embargo, si intentamos el cambio de coordenadas resulta $s = \psi^{-1}(\varphi(t)) = 1/t$, que no es ni siquiera continuo en $t = 0$. Para entender esto basta mirar las imágenes por φ y ψ de los entornos de $t = 0$ y $s = \pm\infty$:



Por supuesto, $\varphi(-\varepsilon, \varepsilon)$ sí es una curva diferenciable, como garantiza el resultado anterior. ■

La demostración de la proposición 2.1 muestra también cómo se describen los pares de variedades:

Proposición 2.3 *Sean $M \subset N$ dos variedades, de dimensiones $m \leq n$, y $a \in M$ un punto cualquiera. Entonces existe un sistema de coordenadas $\mathtt{x} : U \to \mathbb{R}^n$ de N en a tal que $\mathtt{x}(U \cap M) = \mathtt{x}(U) \cap \big(\mathbb{R}^m \times \{0\}\big)$.*

Esta situación se resume diciendo que $\mathtt{x}$ es un *sistema de coordenadas de N adaptado a M*.

Demostración. Mediante un sistema de coordenadas de N en a podemos suponer que $N = \mathbb{R}^n$, y consideramos una parametrización $\varphi : W \to M \subset \mathbb{R}^n$ de M con $a = \varphi(0)$. Entonces $d_0\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva, y, reduciendo W como en la demostración anterior, podemos construir un difeomorfismo $f : W \times W' \to U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi = f|W \times \{0\}$. Como $\varphi(W)$ es abierto en M, reduciendo U se tiene $U \cap M = \varphi(W)$ y $\mathtt{x} = f^{-1}$ es el sistema de coordenadas de $\mathbb{R}^n = N$ buscado. ■

Si $m < n$ resulta que $N \setminus M$ tiene interior denso en N (luego M interior vacío en N). En efecto, si un abierto W de N tiene algún punto $a \in M$, contiene un dominio $U \subset W$ de coordenadas de N adaptadas a M, y $U \setminus M$ es un abierto no vacío de U, luego de N. Por otra parte, si $m = n$, lo que ocurre es que M es abierto en N.

La versión dual de la proposición anterior es ésta:

Proposición 2.4 *Sea $f = (f_1, \ldots, f_q) : V \to \mathbb{R}^q$ una aplicación diferenciable en el abierto V de $\mathbb{R}^p$. Si la derivada de f en un punto $a \in V$ es suprayectiva, entonces existe un entorno abierto $U \subset V$ de a tal que*

$$M = \{x \in U : f_1(x) = f_1(a), \ldots, f_q(x) = f_q(a)\}$$

es una variedad diferenciable de dimensión $p - q$.

Esta situación se resume diciendo que M es una *intersección completa en* U, y que $f_i(x) = f_i(a)$, $1 \le i \le q$, son *ecuaciones globales de* M *en* U.

Demostración. Como la derivada $d_a f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ es suprayectiva, su núcleo $E \subset \mathbb{R}^p$ es un espacio vectorial de dimensión $p - q$, luego existe un isomorfismo lineal $E \to \mathbb{R}^{p-q}$ que tiene una extensión lineal suprayectiva $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{p-q}$. En esta situación definimos $h : V \to \mathbb{R}^p : x \mapsto (f(x), g(x))$. Resulta que $d_a h = (d_a f, g) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ es inyectiva: si $d_a f(u) = 0$, entonces $u \in E$, y como $g|E$ es inyectiva, $g(u) = 0$ si y sólo si $u = 0$. Por tanto, $d_a h$ es un isomorfismo lineal, y por el teorema de la función inversa, h es un difeomorfismo de un entorno U de a sobre un entorno W de $(f(a), g(a))$. En fin, una comprobación inmediata muestra que $h(M) = (\{f(a)\} \times \mathbb{R}^{p-q}) \cap W$, y hemos terminado. ■

En realidad, todas las variedades son *localmente* intersección completa. En efecto, una variedad M de $\mathbb{R}^p$ es en un entorno de cada punto suyo, como $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ en $\mathbb{R}^p$ (I.2.3), y aquí podemos tomar las ecuaciones lineales $x_{m+1} = \cdots = x_p = 0$. Nos referiremos a esto diciendo que cualquier variedad *tiene ecuaciones locales.*

Ejemplos 2.5 (1) Los subespacios afines $M \subset \mathbb{R}^p$ son ejemplos de lo anterior. En efecto, un tal M es el conjunto de soluciones de unas ecuaciones lineales no homogéneas $f_1 = c_1, \ldots, f_q = c_q$, de rango $q = \operatorname{codim}(M)$. Así $f = (f_1, \ldots, f_q)$ es lineal, luego su derivada en cada punto es ella misma y tiene rango máximo, es decir, es suprayectiva.