Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introducción

Las ecuaciones en derivadas parciales constituyen una materia que aparece en varias áreas de conocimiento de diferentes disciplinas, entre las que se encuentran las Ciencias Matemáticas, las Ciencias Físicas, las Ciencias Biológicas, la Ingeniería o la Economía.

El concepto de derivada parcial de una función aparece por primera vez en los documentos escritos por Isaac Newton en 1671 y publicados en 1736 bajo el título *“Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum”*. Sin embargo, en dicho documento no aparece de manera explícita ningún tipo de ecuación en derivadas parciales. La primera publicación científica donde aparecen este tipo de ecuaciones es en el artículo escrito por Johann Bernoulli publicado en *Acta Eruditorum* en 1719. De manera intuitiva, dada una función definida sobre un conjunto abierto de un espacio de dimensión 2 o superior, su derivada parcial nos indica la tasa de variación de la función respecto de una de las variables en los puntos del conjunto donde se define. Existen numerosos ejemplos físicos donde una ecuación o sistema de ecuaciones en derivadas parciales describe el comportamiento de una o varias magnitudes físicas que a priori no conocemos. Conocer dichas magnitudes de forma explícita u obtener la mayor información posible de ellas a partir de la ecuación que satisfacen sus derivadas parciales es el objetivo del análisis de la ecuación.

Desde su aparición hasta nuestros días, las ecuaciones en derivadas parciales han suscitado el interés en distintas disciplinas. Este interés, causado en parte por su utilidad, también es debido a su uso como herramienta fundamental en la modelización[1] de una gran cantidad de procesos,

[1]La modelización matemática es el proceso de construción de una expresión matemática que describe el comportamiento de un determinado proceso. Modelos matemáticos aparecen en la mayoría de disciplinas científicas

entre los que se encuentran la transmisión del calor, la propagación de ondas, el comportamiento de fluidos o la evolución de ciertas poblaciones biológicas.

1.2 Conceptos básicos

Antes de introducir el concepto de *"ecuación en derivadas parciales"*, se recuerda a continuación la definición de derivada parcial de una función de varias variables.

Derivada parcial

Definición 1.1. *Sea $N \geq 2$ y $\Omega \subset I\!R^N$ un conjunto abierto, sean $\tilde{x} \in \Omega$ y $f : \Omega \subset I\!R^N \to I\!R$. Si existe el límite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(\tilde{x}_1, \dots \tilde{x}_i + h, \dots \tilde{x}_N) - f(\tilde{x}_1, \dots \tilde{x}_i, \dots \tilde{x}_N))$$

y es finito, decimos que dicho límite es la derivada parcial de f respecto de x_i en el punto $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots \tilde{x}_N)$.

Observación 1.2. *Si la función f es derivable respecto de x_i en un entorno de $\tilde{x}$, la definición anterior es equivalente a derivar f respecto de la variable x_i dejando el resto de las variables como si fueran constantes. La notación utilizada es*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(\tilde{x}_1, \dots \tilde{x}_i + h, \dots \tilde{x}_N) - f(\tilde{x}_1, \dots \tilde{x}_i, \dots \tilde{x}_N)) := \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x=\tilde{x}}.$$

Ejemplo 1.3. *Se considera la función $f(x, y) = x^2 + y^2$. La derivada parcial de f respecto de la variable x, consiste en derivar la función f respecto de "x" considerando la variable "y" constante, obteniendo*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x.$$

En numerosas ocasiones deseamos conocer una función cuyas derivadas parciales satisfacen ciertas condiciones. En el siguiente ejemplo vemos como dichas condiciones se expresan mediante una igualdad que contienen las derivadas parciales de la función que denominamos ecuación en derivadas parciales y cuya definición veremos con precisión más adelante.

Ejemplo 1.4. *Deseamos conocer la función*

$$u : I\!R^2 \to I\!R$$

o áreas de conocimiento humano, como la Física, la Química, la Biología, la Ingeniería, la Economía, la Medicina o la Sociologıa entre otros.

cuyas curvas de nivel

$$\{(x,y) \in I\!R^2, \quad \textit{tales que } u(x,y) = \textit{constante}\},$$

son perpendiculares al campo vectorial $(2,-1)$. *Denotamos por* $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ *la curva de nivel de la función* u, *cuyo vector tangente* (γ_1', γ_2') *es perpendicular a* $(2,-1)$*:*

$$2\gamma_1' - \gamma_2' = 0. \tag{1.1}$$

Derivamos la función $u(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ *respecto de* t*, aplicando la regla de la cadena resulta*

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\gamma_1' + \frac{\partial u}{\partial y}\gamma_2' = 0.$$

Dividimos la igualdad anterior por γ_1' *(o por* γ_2'*) y obtenemos, gracias a (1.1) que*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{1.2}$$

La fórmula anterior es una ecuación en derivadas parciales, ya que expresa una relación entre las derivadas parciales de una función u *respecto de* x *e* y.

Ecuación en derivadas parciales (E.D.P.)

Definición 1.5. *Sea* $N \geq 2$ *y* $\Omega \subset I\!R^N$ *un conjunto abierto. Una ecuación en derivadas parciales (E.D.P.) es una igualdad en la que intervienen derivadas respecto de dos o más variables de una función desconocida "u". Es decir, una E.D.P. es una igualdad de la forma*

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial u}{\partial x_N}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots \frac{\partial^j u}{\partial x_{i_1}^{j_1} \dots \partial x_{i_j}^{j_N}}, \dots \frac{\partial^k u}{\partial x_N^k}\right) = 0, \quad x \in \Omega \tag{1.3}$$

donde $F : \Omega \times I\!R \times I\!R^N \dots I\!R^{N^k} \to I\!R$ *es una función conocida.*
El conjunto Ω *se conoce como dominio de la ecuación. Si aparecen varias igualdades con varias funciones desconocidas y sus derivadas respecto de varias variables, se denomina "Sistema de ecuaciones en derivadas parciales".*

Ejemplo 1.6. *Ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales.*

Ecuación del calor en dimensión 1: $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$

Ecuación de ondas en dimensión 1: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$

Ecuación de Monge-Ampere: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left|\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|^2 + F\left(x, y, u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$

Ecuación de Laplace: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

En el Ejemplo 1.4 aparecen derivadas primeras de la solución; en la ecuación de Laplace presentada en el Ejemplo 1.6, aparecen derivadas segundas. Los métodos de resolución de las ecuaciones dependen del número de veces que se deriva la solución al sustituir en la ecuación. Para un mejor estudio de estos métodos se introduce el concepto de orden de la ecuación, que denota el orden máximo de las derivadas que aparecen en la ecuación y en función al cual clasificamos las ecuaciones.

Orden de una ecuación

Definición 1.7. *El orden de una ecuación diferencial es el orden de derivación más alto que aparece en la ecuación.*

Ejemplo 1.8. *El orden de la ecuación*

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^3 = u + x^4$$

es 2, ya que aparecen las derivadas segundas de la función incógnita "u" respecto de la variable x y no aparecen derivadas de orden superior.

En el Ejemplo 1.4 se entiende la ecuación como una igualdad puntual, es decir, la solución es una función cuyas derivadas existen en todos los puntos del dominio y la ecuación se satisface en todos ellos. Para que las derivadas primeras del Ejemplo 1.4 existan en todos los puntos es necesario que sean continuas.

Ejemplo 1.9. *Se considera la ecuación*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = sign(x)$$

donde $sign(x)$ es la función signo de x, que toma los valores $\{1, -1, 0\}$ si $x > 0$, $x < 0$ o $x = 0$ respectivamente. La función valor absoluto de x, que denotamos por $|x|$, satisface la ecuación en aquellos puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donde $x \neq 0$, sin embargo, no es posible derivar la función en $x = 0$, por lo que en la recta $x = 0$ la función no satisface la ecuación.

En el ejemplo anterior, $|x|$ no satisface la ecuación en $x = 0$ pero si se satisface en el resto del dominio, por lo que decimos que $|x|$ satisface la ecuación en casi todo punto del dominio (salvo en un conjunto de medida nula).

Para distinguir las soluciones que poseen la regularidad necesaria del resto de soluciones, a aquellas cuyas derivadas que aparecen en la ecuación son continuas las llamamos *"soluciones* *clásicas"*. Volveremos sobre este concepto de soluciones que no son clásicas en capítulos posteriores. Introducimos a continuación la defínción precisa de funciones continuas con derivadas continuas.

Función de clase k

Definición 1.10. *Sea $N \geq 1$ y $\Omega \subset I\!R^N$ un conjunto abierto. Si existen todas las derivadas parciales de f en todo $x \in \Omega$ y estas son continuas, decimos que f es una función $C^1(\Omega)$. Cuando es posible extender la derivada de la función de forma continua a $\partial\Omega$, decimos que es una función $C^1(\overline{\Omega})$.*
Si existen las derivadas parciales de f hasta el orden k ($k \in I\!N \cup \{0\} \cup \{+\infty\}$) y estas son continuas, decimos que f es una función de clase C^k en Ω o que pertenece a $C^k(\Omega)$. De manera análoga, si es posible extender de manera continua sus derivadas hasta el orden k a $\partial\Omega$, decimos que la función es $C^k(\overline{\Omega})$.

Ejemplo 1.11. *La función $e^{-x^2-y^2}$ es una función continua en todo $I\!R^2$, además sus derivadas de cualquier orden son continuas, por tanto dicha función es una función de clase $C^\infty(I\!R^2)$.*

Solución clásica

Definición 1.12. *Decimos que una función "u" es una solución clásica de una E.D.P., si todas las derivadas de "u" que aparecen en la ecuación, con sus órdenes correspondientes, son continuas y al sustituir dicha función y sus derivadas en la ecuación, esta se satisface puntualmente, es decir, se satisface para todo $x \in \Omega$.*

Ejemplo 1.13. *Se considera el dominio*

$$\Omega = \{(x,y) \in I\!R^2, \quad \text{tales que } 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi\}$$

y la ecuación de Poisson definida en dicho dominio

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f,\ (x,y) \in \Omega$$

donde $f(x,y) = 2\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y)$. Se pide comprobar que $u = \mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y)$ es una solución clásica del problema.
Solución: *Para comprobar que u es una solución del problema, calculamos sus derivadas segundas*

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y),$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y).$$

Reemplazamos en la ecuación,

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f,$$

y obtenemos que u satisface la ecuación puntualmente. Para finalizar, se comprueba que $u \in C^2(\Omega)$. Dicha regularidad es una consecuencia de la regularidad de la función seno.

El concepto de solución clásica de una ecuación de orden k, requiere que la solución posea ciertas derivadas de orden k continuas. Para ello es necesario que los datos del problema y la función que define la ecuación presenten cierta regularidad. Cuando esta regularidad no se satisface, como en el Ejemplo 1.9 no existe solución clásica. Estos aspectos de la ecuación, que impiden la existencia de solución clásica, determinan el *"marco funcional"* donde se resuelve el problema, entendiendo la ecuación como una igualdad en un determinado espacio de funciones.

Definición 1.14. Función lipschitziana. *Sea $N \geq 1$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Decimos que una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es lipschitziana si existe una contante c_f tal que para todo $x, y \in \Omega$*

$$|f(x) - f(y)| \leq c_f |x - y|,$$

donde $|x - y|$ representa la distancia euclídea en $\mathbb{R}^N$.

Ejemplo 1.15. *La función valor absoluto de $x \in \mathbb{R}$ es una función lipschitziana por satisfacer*

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Sin embargo la función no es $C^1(\mathbb{R})$ por no ser diferenciable en $x = 0$.

Observación 1.16. *Sea $N \in \mathbb{N}$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y acotado. Entonces, toda función $u \in C^1(\overline{\Omega})$ es una función lipschitziana. Sin embargo, no todas ls funciones $C^1(\Omega)$ son lipschitzianas, como muestra la función*

$$f(x) = \frac{1}{x}, \; x \in I,$$

ya que $f \in C^1(I)$ en $I = (0, 1)$.

Ejemplo 1.17. *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \sqrt{|x|}$$

no es una función lipschitziana. Para comprobarlo, aplicamos el teorema del valor medio y resulta

$$|f(x) - f(y) = |\sqrt{|x|} - \sqrt{y}| = \frac{1}{2\sqrt{|\xi|}}|x - y|$$

donde $0 < x < \xi < y$. Procedemos por reducción al absurdo y suponemos que existe una constante $c_f < \infty$ tal que

$$|f(x) - f(y) \leq c_f |x - y|.$$

Dicha constante debe satisfacer

$$c_f \geq \frac{1}{2\sqrt{|\xi|}}$$

para cierto $\xi \in (x, y)$. *Por tanto*

$$c_f \geq \frac{1}{2\sqrt{|y|}}.$$

Tomamos límites cuando $y \to 0$ *para obtener que* c_f *no está acotada que contradice la hipótesis sobre* c_f.

Observación 1.18. *Para ser una función lipschitziana no es suficiente con ser una función continua, sin embargo toda función lipschitziana es continua.*

Definición 1.19. Función par. *Sea* $I = (-a, a) \subset I\!R$ *y* $f : I \to I\!R$ *una función. Decimos que* f *es una función par si:*

$$f(x) = f(-x), \text{ para todo } x \in I.$$

Ejemplo 1.20. *Existen numerosos ejemplos de funciones pares, como son* $\{\cos(nx)\}_{n\in I\!N}$, e^{-x^2}, x^2, x^4, x^6 *entre otras.*

Definición 1.21. Función impar. *Sea* $I = (-a, a) \subset I\!R$ *y* $f : I \to I\!R$ *una función. Decimos que* f *es una función impar si:*

$$f(x) = -f(-x), \text{ para todo } x \in I.$$

Ejemplo 1.22. *Existen numerosos ejemplos de funciones impares que se utilizan con frecuencia, entre otras, las funciones de la forma* $\{sen(nx)\}_{n\in I\!N}$, x, x^3, x^5.

Definición 1.23. Soporte de una función. *Sea* $f : \Omega \subset I\!R^N \to I\!R$, *una función conocida. El soporte de* f *es el conjunto de puntos del dominio donde* $f(x) \neq 0$:

$$soporte(f) = \{x \in \Omega, \quad \text{tales que } f(x) \neq 0\}.$$

Ejemplo 1.24. *El soporte de la función* $f : I\!R \to I\!R$ *definida por la expresión*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in (0,1) \\ 0, & \text{si } x \notin (0,1), \end{cases}$$

es el intervalo $(0, 1)$.

Definición 1.25. función parte positiva. *Sea* $f : \Omega \to I\!R$; $(f)_+$ *denota la parte positiva de la función* f *y se define mediante la expresión*

$$(f)_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

Definición 1.26. Matriz definida positiva. *Decimos que una matriz $A \in \mathcal{M}_{N\times N}$ es definida positiva, si existe $\theta > 0$ tal que para todo $\xi = (\xi_1, \dots \xi_N) \in I\!R^N$ se satisface*

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2.$$

Si A está definida sobre un conjunto $\Omega \subset I\!R^N$, decimos que A es definida positiva en dicho conjunto si es definida positiva para todo $x \in \Omega$ y la constante θ es independiente de x.

Operador diferencial lineal

Definición 1.27. *Sea $N \geq 2$, $\Omega \subset I\!R^N$ un conjunto abierto, $k, m \in I\!N$ y*

$$F : \Omega \times I\!R \times I\!R^N \dots I\!R^{N^k} \to I\!R^m$$

una función conocida. Decimos que $L : C^k(\Omega) \to [C^0(\Omega)]^m$ es un operador diferencial lineal si

$$L(u) = F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial u}{\partial x_N}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots \frac{\partial^j u}{\partial x_{i_1}^{j_1} \dots \partial x_{i_j}^{j_N}}, \dots \frac{\partial^k u}{\partial x_N^k}\right)$$

es lineal en u:

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v)$$

para cualesquiera $u, v \in C^k(\Omega)$ y $\alpha, \beta \in R$.

Operador gradiente

Definición 1.28. *Sea $N \in I\!N$ tal que $N \geq 2$ y $\Omega \subset I\!R^N$ un conjunto abierto. Se denota el operador gradiente de una función $u \in C^1(\Omega)$ por el símbolo ∇ y se define por la expresión:*

$$\nabla u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^T.$$

Ejemplo 1.29. *Sea $f : I\!R^2 \to I\!R$ definida por $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ entonces*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2}).$$

Operador divergencia

Definición 1.30. *Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq 2$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Definimos el operador divergencia de una función $u = (u_1, \cdots u_N) \in [C^1(\Omega)]^N$ por la expresión:*

$$div(u) := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Ejemplo 1.31. *Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por*

$$f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)) = (x^2 - y^2, y^2 + z^2, z^2 - x^2)$$

entonces

$$div(f) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 2x + 2y + 2z.$$

Operador de Laplace o laplaciano

Definición 1.32. *Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq 2$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Se denota el operador de Laplace o laplaciano de una función $u \in C^2(\Omega)$ mediante el símbolo Δ, y se define por la expresión:*

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Ejemplo 1.33. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ entonces*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4(x^2 + y^2 + 1)e^{x^2+y^2}.$$

Ejemplo 1.34. *Comprobamos a continuación que el operador de Laplace es un operador lineal. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, $u, v \in C^2(\Omega)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces*

$$\Delta(\alpha u + \beta v) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial^2(\alpha u + \beta v)}{\partial x_n^2}.$$

Por la linealidad de la derivada, para todo $n = 1 \cdots N$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\alpha u + \beta v)}{\partial x_n^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial(\alpha u + \beta v)}{\partial x_i}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_n}\left[\alpha \frac{\partial u}{\partial x_n} + \beta \frac{\partial v}{\partial x_n}\right] \\ &= \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2} \end{aligned}$$

sustituyendo en la definición resulta

$$\Delta(\alpha u + \beta v) = \alpha\Delta u + \beta\Delta v$$

que prueba que Δ es un operador lineal. Al aparecer derivadas en la definición del Δ, claramente es un operador diferencial.

Ejemplo 1.35. *Sea ϕ la función definida por la expresión*

$$\phi = e^{-x^2-y^2}.$$

Se pide demostrar que ϕ es una solución del problema

$$-\Delta u - 2(x,y)^T \cdot \nabla u - 4u = 0, \qquad \textit{en } (x,y) \in I\!R^2,$$

donde $(x,y)^T$ indica el vector (x,y) expresado como vector fila:

$$(x,y)^T = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y

$$(x,y)^T \cdot \nabla u = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Solución: *Calculamos las derivadas de ϕ y deducimos*

$$-\Delta\phi = 4(1 - x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$-2(x,y)^T \cdot \nabla u = 4(x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2},$$

$$-4\phi = -4e^{-x^2-y^2}.$$

Sumando las cuatro igualdades anteriores obtenemos que ϕ satisface la ecuación en cada punto (x,y) de $I\!R^2$.

Como veremos en el Capítulo 2, una solución clásica de la ecuación (1.2) es cualquier función u de la forma $u(x,y) = h(2x - y)$, donde $h \in C^1(I\!R)$. Las funciones $(2x - y)^2$, e^{2x-y} o $\cos(2x - y)$ son ejemplos de soluciones clásicas de (1.2). Si conocemos además el valor de la solución a lo largo de la recta $x = y$ dado por

$$u(t,t) = \mathrm{sen} t, \tag{1.4}$$

obtenemos que de todas soluciones admisibles $u(x,y) = h(2x - y)$, la que satisface la condición extra (1.4) es $h(t) = \mathrm{sen} t$ y deducimos que

$$u(x,y) = \mathrm{sen}(2x - y).$$

A dicha solución se denomina solución particular de la ecuación o simplemente solución cuando no haya lugar a dudas.

De manera general, esta condición extra suele ser un valor de la solución, de su derivada o combinación de ambas, en la frontera del dominio o en un subconjunto de él. Dependiendo de la naturaleza de la ecuación esta condición se denomina condición de contorno, dato inicial, etc.

Solución particular

Definición 1.36. *Dada una condición extra que debe satisfacer la solución (dato inicial y/o datos de contorno), una solución particular es aquella que satisface tanto la ecuación como la condición inicial y/o los datos de contorno. Es decir, es un caso particular de la solución general. El tipo de condiciones iniciales/datos de contorno está determinado por el tipo de ecuación.*

Ejemplo 1.37. *Encontrar la solución particular $u(t,x)$ de la ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0,\ x \in I\!R$$

que satisface la condición inicial

$$u(0,x) = 2\,\mathrm{sen} x, \ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

sabiendo que la solución general del problema es de la forma

$$u(t,x) = f(t-x) + g(t+x),$$

para cualesquiera funciones $f, g \in C^2(I\!R)$.
Solución: *Del conjunto de soluciones de la forma $f(t-x) + g(t+x)$, las funciones f y g deben satisfacer*

$$2\,\mathrm{sen}(x) = f(-x) + g(x), \quad f'(-x) + g'(x) = 0.$$

Integrando en la segunda igualdad resulta:

$$g(x) = f(-x) + c, \quad \textit{para cierta constante } c.$$

Sustituimos en la primera igualdad:

$$2\,\mathrm{sen}(x) = 2f(-x) + c,$$

y se deduce que

$$f(-x) = \mathrm{sen}(x) - \frac{c}{2}.$$

Despejando se obtiene

$$f(x) = -\operatorname{sen} x - \frac{c}{2},\ g(x) = \operatorname{sen} x + \frac{c}{2},$$

y la solución particular es

$$u(t,x) = \operatorname{sen}(t+x) - \operatorname{sen}(t-x).$$

Definición 1.38. Solución trivial. *Dada una ecuación diferencial*

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial u}{\partial x_N}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots \frac{\partial^j u}{\partial x_{i_1}^{j_1} \dots \partial x_{i_j}^{j_N}}, \dots \frac{\partial^k u}{\partial x_N^k}\right) = 0,$$

decimos que una solución "u" es la solución trivial, si dicha función es idénticamente 0*, es decir, si* $u(x) = 0$*, para todo* $x \in \Omega$*, es una solución del problema.*

Ejemplo 1.39. *Se pide comprobar que las siguientes ecuaciones ecuaciones tienen solución trivial:*

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,\ (x,y) \in I\!R^2.$
2. $-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = y,\ (x,y,z) \in I\!R^3.$
3. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + \left|\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|^2 = 1 - e^{-u},\ (x,y) \in I\!R^2.$

Solución: *Para comprobarlo es suficiente con sustituir el valor de u y de sus derivadas por* 0 *en las ecuaciones anteriores y comprobar si se satisface la ecuación. Las ecuaciones* (1) *y* (3) *tienen solución trivial, sin embargo* $u = 0$ *no es solución del ejemplo* (2)*.*

Problema bien planteado

Definición 1.40. *Decimos que el problema está "bien planteado" si existe una única solución que depende de manera continua de los datos del problema.*

El concepto de problema *"bien planteado"* fue introducido por J. Salomon Hadamard en 1932 para el problema de Cauchy. De manera intuitiva, el concepto de dependencia continua respecto de los datos se refiere a que *"pequeñas"* variaciones de dichos datos crean *"pequeñas"* variaciones en la solución.

Recordamos a continuación las fórmulas de integración por partes, que permiten cambiar las derivadas de una función a otra en la integral de su producto. Comenzamos con el caso en dimensión 1.