

Índice

Notación	v
Prólogo	ix
1 Preliminares	1
1.1 Introducción	1
1.2 Conceptos básicos	2
1.3 Clasificación de ecuaciones en derivadas parciales	12
1.4 Cambios de variable	15
1.5 Dominio de una ecuación	19
1.6 Fórmulas de integración por partes	23
1.7 Ejercicios	25
2 Ecuaciones de primer orden	31
2.1 Introducción	31
2.2 Ecuaciones lineales	32
2.3 Ecuaciones semilineales y cuasilineales	44
2.4 Ecuaciones completamente no lineales	56
2.5 Teorema de Cauchy-Kowalevsky	67
2.6 Otras soluciones a partir de la envolvente	68
2.7 Ejercicios	71
3 Problema de Sturm-Liouville	75
3.1 Introducción	75
3.2 Definición y propiedades	79
3.3 Formulación débil del problema de Sturm-Liouville	93
3.4 Forma normal del problema de Sturm-Liouville	99

3.5	Autovalores del problema de Sturm-Liouville	102
3.6	Ecuación de Legendre. Polinomios de Legendre	114
3.7	Ecuación de Bessel. Funciones de Bessel	115
3.8	Función de Green para el problema de Sturm-Liouville	115
3.9	Teorema de la alternativa de Fredholm aplicado a la ecuación de Sturm-Liouville	122
3.10	Ejercicios	123
4	Series de Fourier	131
4.1	Introducción	131
4.2	Definición y propiedades	132
4.3	Desigualdad de Bessel	135
4.4	Identidad de Parseval	137
4.5	Lema de Riemann-Lebesgue	141
4.6	Completitud del sistema de autofunciones del problema de Sturm-Liouville	142
4.7	Series trigonométricas	151
4.8	Fenómeno de Gibbs	165
4.9	Ejercicios	170
5	Clasificación de ecuaciones de segundo orden	179
5.1	Clasificación de ecuaciones de segundo orden	179
5.2	Ejercicios	181
6	Ecuaciones de tipo elíptico	183
6.1	Introducción	183
6.2	Formulación débil de problemas elípticos lineales	186
6.3	Unicidad de soluciones	195
6.4	Principio de superposición	201
6.5	Principio débil del máximo	203
6.6	Existencia de soluciones. Teorema de Lax-Milgram	206
6.7	Autovalores y autofunciones de problemas elípticos	217
6.8	Método de separación de variables	224
6.9	Funciones de Green	241
6.10	Principio fuerte del máximo	246
6.11	Existencia de soluciones. Método de Perron	249
6.12	Ejercicios	255
7	Ecuaciones parabólicas	263
7.1	Introducción	263
7.2	Modelización de la ecuación del calor	266

7.3	Método de separación de variables	268
7.4	Unicidad de soluciones	272
7.5	Principio de superposición para la ecuación del calor	274
7.6	Principio del máximo para ecuaciones parabólicas	276
7.7	Existencia de soluciones. Método de Galerkin	279
7.8	Ejercicios	286
8	Ecuaciones hiperbólicas	289
8.1	Modelización de la ecuación de ondas en dimensión 1	289
8.2	Fórmula de D'Alembert	292
8.3	Principio de superposición	295
8.4	Método de separación de variables	295
8.5	Existencia y unicidad de soluciones	303
8.6	Ejercicios	305
9	Transformada de Fourier	311
9.1	Introducción	311
9.2	Definición y propiedades	312
9.3	Transformada de Fourier aplicada a la ecuación del calor	320
9.4	Transformada de Fourier aplicada a la ecuación de ondas	321
9.5	La transformada de Fourier N -dimensional	322
9.6	Ejercicios	328
10	Conceptos de análisis funcional	333
10.1	Prerrequisitos	333
10.2	Espacios topológicos, métricos, de Banach y de Hilbert	335
10.3	Integral de Lebesgue y espacios L^p	346
10.3.1	Teorema de la convergencia monótona y de la convergencia dominada . . .	346
10.3.2	Lema de Fatou	348
10.3.3	Teorema de Egorov	348
10.3.4	Definición de espacios $L^p(\Omega)$ y sus propiedades	349
10.4	Bases de un espacio de Hilbert	355
10.5	Aplicaciones lineales	358
10.6	Espacios de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, $W_0^{m,p}(\Omega)$	365
10.6.1	Definición	365
10.6.2	Desigualdad de Poincaré	367
10.6.3	Desigualdad de Poincaré-Wirtinger	367
10.6.4	Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg	367

10.6.5	Desigualdad de Jensen	368
10.6.6	Lema de Gronwall	368
10.6.7	Inclusiones de Sobolev. Teorema de Rellich-Kondrachov	369
10.6.8	Traza de una función de $W^{1,p}(\Omega)$	370
10.7	Espacio Dual. Teorema de representación de Riesz. Convergencia débil	371
10.8	Convergencia en $L^1(\Omega)$ y convergencia puntual	374
10.9	Lema de Aubin-Lions	375
10.10	Semicontinuidad	376
10.11	Distribuciones	379
Apéndice I. Conceptos de análisis de varias variables		383
Apéndice II. Resultados de ecuaciones diferenciales ordinarias		389
Apéndice III. Regularidad de las soluciones de problemas elípticos		395
Bibliografía		399
Glosario		403