

# Índice

<b>Notación</b>	<b>v</b>
<b>Prólogo</b>	<b>ix</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción . . . . .	1
1.2 Conceptos básicos . . . . .	2
1.3 Clasificación de ecuaciones en derivadas parciales . . . . .	13
1.4 Cambios de variable . . . . .	16
1.5 Dominio de una ecuación . . . . .	19
1.6 Ejercicios . . . . .	24
<b>2 Ecuaciones de primer orden</b>	<b>31</b>
2.1 Introducción . . . . .	31
2.2 Ecuaciones lineales . . . . .	32
2.3 Ecuaciones semilineales y cuasilineales . . . . .	43
2.4 Ecuaciones completamente no lineales . . . . .	55
2.5 Teorema de Cauchy-Kowalevsky . . . . .	67
2.6 Otras soluciones a partir de la envolvente . . . . .	68
2.7 Ejercicios . . . . .	71
<b>3 Problema de Sturm-Liouville</b>	<b>75</b>
3.1 Introducción . . . . .	75
3.2 Definición y propiedades . . . . .	77
3.3 Formulación débil del problema de Sturm-Liouville . . . . .	90
3.4 Forma normal del problema de Sturm-Liouville . . . . .	96
3.5 Autovalores del problema de Sturm-Liouville . . . . .	99

3.6	Ecuación de Legendre. Polinomios de Legendre . . . . .	111
3.7	Ecuación de Bessel. Funciones de Bessel . . . . .	112
3.8	Función de Green para el problema de Sturm-Liouville . . . . .	112
3.9	Teorema de la alternativa de Fredholm aplicado a la ecuación de Sturm-Liouville . . . . .	118
3.10	Ejercicios . . . . .	120
<b>4</b>	<b>Series de Fourier</b>	<b>123</b>
4.1	Introducción . . . . .	123
4.2	Definición y propiedades . . . . .	124
4.3	Desigualdad de Bessel . . . . .	127
4.4	Identidad de Parseval . . . . .	129
4.5	Lema de Riemann-Lebesgue . . . . .	132
4.6	Completitud del sistema de autofunciones del problema de Sturm-Liouville . . . . .	134
4.7	Series trigonométricas . . . . .	142
4.8	Fenómeno de Gibbs . . . . .	156
4.9	Ejercicios . . . . .	161
<b>5</b>	<b>Clasificación de ecuaciones de segundo orden</b>	<b>171</b>
5.1	Clasificación de ecuaciones de segundo orden . . . . .	171
5.2	Ejercicios . . . . .	173
<b>6</b>	<b>Ecuaciones de tipo elíptico</b>	<b>175</b>
6.1	Introducción . . . . .	175
6.2	Formulación débil de problemas elípticos lineales . . . . .	178
6.3	Unicidad de soluciones . . . . .	187
6.4	Principio de superposición . . . . .	193
6.5	Principio débil del máximo . . . . .	194
6.6	Existencia de soluciones. Teorema de Lax-Milgram . . . . .	198
6.7	Autovalores y autofunciones de problemas elípticos . . . . .	208
6.8	Método de separación de variables . . . . .	215
6.9	Funciones de Green . . . . .	232
6.10	Principio fuerte del máximo . . . . .	238
6.11	Existencia de soluciones. Método de Perron . . . . .	241
6.12	Ejercicios . . . . .	246
<b>7</b>	<b>Ecuaciones parabólicas</b>	<b>253</b>
7.1	Introducción . . . . .	253
7.2	Modelización de la ecuación del calor . . . . .	253
7.3	Método de separación de variables . . . . .	256

7.4	Unicidad de soluciones . . . . .	261
7.5	Principio de superposición para la ecuación del calor . . . . .	263
7.6	Principio del máximo para ecuaciones parabólicas . . . . .	265
7.7	Existencia de soluciones. Método de Galerkin . . . . .	268
7.8	Ejercicios . . . . .	275
<b>8</b>	<b>Ecuaciones hiperbólicas</b>	<b>277</b>
8.1	Modelización de la ecuación de ondas en dimensión 1 . . . . .	277
8.2	Fórmula de D'Alembert . . . . .	280
8.3	Principio de superposición . . . . .	282
8.4	Método de separación de variables . . . . .	283
8.5	Existencia y unicidad de soluciones . . . . .	288
8.6	Ejercicios . . . . .	290
<b>9</b>	<b>Transformada de Fourier</b>	<b>295</b>
9.1	Introducción . . . . .	295
9.2	Definición y propiedades . . . . .	296
9.3	Transformada de Fourier aplicada a la ecuación del calor . . . . .	305
9.4	Transformada de Fourier aplicada a la ecuación de ondas . . . . .	306
9.5	La transformada de Fourier $N$ -dimensional . . . . .	306
9.6	Ejercicios . . . . .	313
<b>10</b>	<b>Conceptos de análisis funcional</b>	<b>317</b>
10.1	Prerrequisitos . . . . .	317
10.2	Espacios topológicos, métricos, de Banach y de Hilbert . . . . .	319
10.3	Integral de Lebesgue y espacios $L^p$ . . . . .	335
10.3.1	Espacios de medida. Medida exterior . . . . .	335
10.3.2	Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ . . . . .	341
10.3.3	Función medible . . . . .	342
10.3.4	Teorema de la convergencia monótona y de la convergencia dominada . . .	348
10.3.5	Lema de Fatou . . . . .	351
10.3.6	Teorema de Egorov . . . . .	351
10.3.7	Definición de espacios $L^p(\Omega)$ y sus propiedades . . . . .	353
10.4	Bases de un espacio de Hilbert . . . . .	363
10.5	Aplicaciones lineales . . . . .	369
10.6	Operadores compactos . . . . .	370
10.7	Espacios de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ , $W_0^{m,p}(\Omega)$ . . . . .	380
10.7.1	Definición . . . . .	380

10.7.2	Desigualdad de Poincaré . . . . .	382
10.7.3	Desigualdad de Poincaré-Wirtinger . . . . .	382
10.7.4	Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg . . . . .	382
10.7.5	Desigualdad de Jensen . . . . .	383
10.7.6	Lema de Gronwall . . . . .	383
10.7.7	Inclusiones de Sobolev. Teorema de Rellich-Kondrachov . . . . .	384
10.7.8	Traza de una función de $W^{1,p}(\Omega)$ . . . . .	386
10.8	Espacio Dual. Teorema de representación de Riesz. Convergencia débil . . . . .	387
10.9	Convergencia en $L^1(\Omega)$ y convergencia puntual . . . . .	391
10.10	Lema de Aubin-Lions . . . . .	394
10.11	Semicontinuidad . . . . .	395
10.12	Distribuciones . . . . .	399
<b>Apéndice I. Conceptos de análisis de varias variables</b>		<b>403</b>
<b>Apéndice II. Resultados de ecuaciones diferenciales ordinarias</b>		<b>407</b>
<b>Apéndice III. Regularidad de las soluciones de problemas elípticos</b>		<b>413</b>
<b>Bibliografía</b>		<b>417</b>
<b>Glosario</b>		<b>419</b>