Capítulo 1

Preliminares

1.1 Motivación

Las ecuaciones diferenciales son una parte fundamental de las matemáticas, utilizadas desde su aparición a finales del siglo XVII para describir fenómenos naturales, nos permiten profundizar en el conocimiento de la naturaleza.

En el libro: "Methodus fluxionum et serierum infinitarum", escrito en 1671 por *Isaac Newton* (1642-1727) y publicado finalmente en 1736; aparecen por primera vez ecuaciones diferenciales para expresar las leyes que rigen el movimientos de los cuerpos. En 1676, *Gottfried von Leibniz* (1646-1716), introdujo el término *"aequatio differentialis"* para designar las ecuaciones diferenciales que aparecieron en aquel momento en ciertos problemas geométricos.

Isaac Newton aplicó los desarrollos en series de potencias para la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias. En su libro "Philosophiae naturalis principia mathematica" (1686), Newton resuelve un conjunto de ecuaciones diferenciales como la ecuación del oscilador armónico:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0,$$

demostrando que en los campos gravitatorios los planetas siguen órbitas elípticas, principio postulado por Kepler 50 años antes.

La integral, conocida en aquel momento por "antiderivada", y el teorema fundamental del cálculo, junto con la manipulación simbólica y las simplificaciones algebraicas, fueron de gran ayuda en situaciones particulares, aunque dejaban sin resolver muchos de los problemas planteados.

La primera ley de Newton, conocida también como ley de la inercia, afirma que *"Si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza, entonces, este permanece en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo a velocidad constante".* Denotamos por x la posición del cuerpo; por t el tiempo, y expresamos la anterior ley mediante la fórmula matemática

$$\frac{dx}{dt} = c,$$

donde $\frac{dx}{dt}$ indica la velocidad del cuerpo y c es una constante. Integrando en ambos lados de la ecuación, obtenemos la posición del objeto

$$x(t) = c(t - t_0) + x_0,$$

una vez conocida su posición x_0 en el instante t_0.

Un segundo ejemplo de ecuación diferencial motivado por las leyes de la naturaleza, es la segunda ley de Newton, donde un cuerpo de masa "m" se mueve atraído por una fuerza F. El movimiento se describe mediante la ecuación:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F.$$

En particular, si la fuerza con la que el cuerpo es atraído es la fuerza de la gravedad, $F = mg$ y la ecuación diferencial anterior se expresa mediante la fórmula

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g.$$

Los ejemplos anteriores muestran como el lenguaje matemático es capaz de expresar, mediante ecuaciones diferenciales, el comportamiento de ciertos fenómenos físicos. Este tipo de proceso: expresar mediante fórmulas matemáticas un fenómeno natural, se conoce por el nombre de "modelización".

Definición 1.1. Modelización matemática. *La modelización es la construcción de una expresión matemática utilizada para describir un determinado proceso.*

La modelización se utiliza para describir procesos en la mayoría de las áreas de conocimiento humano: áreas científicas, como la física, la biológía, la química, la geología o las ciencias sociales; la ingeniería; la arquitectura; la medicina; la economía; la psicología etc.

Los modelos se clasifican en función de la herramienta matemática utilizada: modelos de ecuaciones diferenciales ordinarias, en derivadas parciales, modelos estadísticos etc.
Dependiendo del objetivo del modelo, distinguimos dos casos: aquellos cuyo objetivo es predecir el futuro comportamiento de las variables del fenómeno a partir del conocimiento de ciertos datos y aquellos cuyo objetivo es conocer dichas variables en un determinado instante. En ambos casos, es necesario conocer dichos datos para obtener el valor deseado de las variables.

1.2 Conceptos básicos

Diferencia entre derivada y derivada parcial

Comenzamos esta sección recordando las definiciones de derivada de una función de una variable y de derivada parcial de una función de varias variables.

Derivada de una función de una variable

Definición 1.2. *Sea $I \subset I\!R$ un conjunto abierto; $t \in I$ y $f : I \subset I\!R \to I\!R$ una función continua. Entonces, si existe el límite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(t+h) - f(t))$$

y es finito, decimos que f es derivable en t y que dicho límite, que denotamos por $\frac{df}{dt}$, es la derivada de f.

Derivada parcial

Definición 1.3. *Sea $N \geq 2$ un número natural; $\Omega \subset I\!R^N$ un conjunto abierto; $\tilde{x} \in \Omega$ y $f : \Omega \subset I\!R^N \to I\!R$. Entonces, si existe el límite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(\tilde{x}_1, \ldots \tilde{x}_i + h, \ldots \tilde{x}_N) - f(\tilde{x}_1, \ldots \tilde{x}_i, \ldots \tilde{x}_N))$$

y es finito, decimos que dicho límite es la derivada parcial de f respecto de x_i en el punto $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots \tilde{x}_N)$ y lo denotamos por $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x=\tilde{x}}$.

Observación 1.4. *Si la función f es derivable respecto de x_i en un entorno de $\tilde{x}$, la definición anterior es equivalente a derivar f respecto de la variable x_i dejando el resto de las variables como si fueran constantes.*

Ejemplo 1.5. *Se considera la función $f(t, x, y) = t^2 + x^2 + y^2$. La derivada parcial de f respecto de la variable t, consiste en derivar la función f respecto de "t" considerando las variables "x" e "y" como constantes, obteniendo*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2t.$$

Sin embargo, si las variables "x" e "y" dependen de "t":

$$f(t, x, y) = t^2 + x^2(t) + y^2(x)$$

la derivada "total" respecto de t se obtiene aplicando la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= 2t + 2x(t)\frac{dx}{dt} + 2y(t)\frac{dy}{dt}.\end{aligned}$$

Ecuación diferencial ordinaria

Definición 1.6. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto; $k \in \mathbb{N}$ y $F : I \times \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ una función conocida. Una* "ecuación diferencial ordinaria" *(E.D.O.) es una igualdad en la que aparecen las derivadas de una función incógnita "x" respecto de una única variable conocida "t":*

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \cdots, \frac{d^k x}{dt^k}\right) = 0, \quad t \in I.$$

Si aparecen varias igualdades con varias funciones desconocidas, se denomina "sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias".

Ejemplo 1.7. *La igualdad*

$$\frac{dx}{dt} + x^2 = e^t$$

es una ecuación diferencial ordinaria, ya que solo aparecen derivadas respecto de la variable t. Sin embargo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \geq 0$$

no es una ecuación diferencial ordinaria, ya que aparecen derivadas respecto de las variables t y x. Además, no se trata de una igualdad, en este caso, se trata de una inecuación.

Tal y como se ha indicado en la Definición 1.6, cuando $F : I \times \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^m$ es una función conocida y $m \geq 2$, nos referimos a la ecuación diferencial

$$F\left(t, x, \cdots, \frac{d^k x}{dt^k}\right) = 0, \quad x \in I \tag{1.1}$$

como sistema de ecuaciones diferenciales.

En la Definición 1.6, entendemos la ecuación diferencial como una igualdad puntual para cada t perteneciente a I. Se presentan a continuación los conceptos necesarios para clasificar los distintos tipos de ecuaciones.

Función lineal

Una relación entre dos conjuntos, A y B, es un subconjunto del producto cartesiano de ambos. Cuando cada elemento de A se relaciona con un único elemento de B, decimos que dicha relación es una aplicación o una función de A en B. En el contexto del álgebra, denotamos dicha relación por "aplicación", sin embargo en análisis matemático es más frecuente el término "función". Ambas expresiones son equivalentes y se utilizan indistintamente a lo largo del libro.

Aplicación o función lineal

Definición 1.8. *Sean V y W dos espacios vectoriales definidos sobre los números reales y L una aplicación entre ambos, es decir:*

$$L : V \longrightarrow W.$$

Si L satisface

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y para todo $x, y \in V$; decimos que L es una aplicación o función lineal.

Observación 1.9. *De manera equivalente se define "aplicación o función lineal", cuando los espacios vectoriales están definidos sobre los números complejos.*

Ejemplo 1.10. *Sea $N \in \mathbb{N}$, $V = W = \mathbb{R}^N$ y $L : V \to W$ una aplicación que satisface*

$$L(x) = \mathcal{A}x$$

donde $x \in \mathbb{R}^N$, $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{N\times N}$ es un matriz cuadrada de orden N de coeficientes reales:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}.$$

Se pide comprobar que L es lineal.

Solución:

Para comprobar que L es una aplicación lineal es suficiente con comprobar que se cumple la propiedad:

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^N$. Aplicamos la definición y resulta

$$L(\alpha x + \beta y) = \mathcal{A}(\alpha x + \beta y),$$

por las propiedades de las matrices sabemos que

$$\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \mathcal{A}(\alpha x) + \mathcal{A}(\beta y)$$

y por ser $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}x, \qquad \mathcal{A}(\beta y) = \beta \mathcal{A}y.$$

Por la definición de L se obtiene

$$\alpha \mathcal{A} x = \alpha L(x), \qquad \beta \mathcal{A} y = \beta L(y)$$

y por tanto $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$, que prueba que L es una aplicación lineal.

Ejemplo 1.11. *Sea $I \subset I\!R$ un intervalo abierto y V el conjunto de las funciones $f : I \to I\!R$ derivables en I y con derivada continua. Denotamos por W el conjunto de las funciones continuas definidas en I y con valores reales. V y W son espacios vectoriales definidos sobre los números reales. Se considera la aplicación "derivada respecto de t" $L : V \to W$ definida por*

$$L(f) := \frac{df}{dt}.$$

Se pide comprobar que L es lineal.
Solución:
Comprobar que L es lineal es equivalente a comprobar que se satisface la propiedad:

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

para todo $\alpha, \beta \in I\!R$, f y g funciones derivables. Por las propiedades de la derivada sabemos que

$$\frac{d}{dt}(\alpha f + \beta g) = \alpha \frac{df}{dt} + \beta \frac{dg}{dt}$$

de donde se deduce que L es lineal.

Funciones continuas y con derivadas continuas

Función continua en $I \subset I\!R$

Definición 1.12. *Sea I un intervalo abierto de $I\!R$; $x_0 \in I$ y $f : I \to I\!R$. Decimos que f es una función continua en x_0, si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si*

$$|x - x_0| < \delta, \quad \textit{entonces } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Decimos que f es continua en $I \subset I\!R$, si f es continua en todos los puntos de I.

La Definición 1.12 se extiende de manera natural a funciones definidas sobre dominios de $I\!R^N$, para $N > 1$.

Función continua en $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Definición 1.13. *Sea $N \in \mathbb{N}$; Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^N$; $x_0 = (x_{01}, \cdots x_{0N}) \in \Omega$ y $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Decimos que f es una función continua en x_0, si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\text{si } d(x, x_0) < \delta, \quad \text{entonces } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon,$$

donde

$$d(x, x_0) = \sqrt{|x_1 - x_{01}|^2 + \cdots + |x_N - x_{0N}|^2}.$$

Decimos que f es continua en $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, si f es continua en todos los puntos de Ω.

$C(\Omega)$

Definición 1.14. *Sea N un número natural y Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^N$. Denotamos por $C(\Omega)$ al conjunto formado por todas las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continuas en Ω.*

Funciones $C^k(\Omega)$

Definición 1.15. *Sea $N \in \mathbb{N}$; Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ y $k \in \mathbb{N}$. Definimos el conjunto de las funciones de clase k en Ω, como el conjunto formado por las funciones $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continuas y con derivadas continuas en Ω hasta el orden k. El conjunto de estas funciones se denota por $C^k(\Omega)$. Cuando la función pertenece a $C^k(\Omega)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, decimos que la función es de clase $C^\infty(\Omega)$.*

Ejemplo 1.16. *La función $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ pertenece a $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ por ser una función continua y tener sus derivadas de cualquier orden continuas.*

Ejemplo 1.17. *Funciones de clase $C^\infty(\mathbb{R})$ son: e^x; $\operatorname{sen}(x)$; $\cos(x)$; x^n para $n \in \mathbb{N}$, entre otras.*

Ejemplo 1.18. *La función $f(x) = |x|x$, donde $|x|$ indica el valor absoluto de x, es una función $C^1(\mathbb{R})$, por ser $\dfrac{df}{dx} = 2|x|$ una función continua. Sin embargo, $f \neq C^2(\mathbb{R})$ ya que $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ no es una función continua en el origen.*

Clasificación de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Hay una gran cantidad de ecuaciones diferenciales ordinarias donde es posible encontrar la solución explícita expresada en términos de funciones conocidas: polinómios, funciones trigonométricas, exponenciales, logaritmos etc. A pesar de ser una gran cantidad, su número es insignificante frente a aquellas ecuaciones que no sabemos resolver. Los métodos de resolución son variados y dependen de factores como el orden de derivación de la incógnita que aparece en la ecuación o la linealidad de la función que define la ecuación, entre otros factores. Para el estudio de la ecuación comenzamos introduciendo la definición de orden de una ecuación.

Orden de una ecuación diferencial

Definición 1.19. *El orden de una ecuación diferencial es el máximo número de veces que aparece derivada la función incógnita en la ecuación.*

Ejemplo 1.20. *Las ecuaciones diferenciales*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{dx}{dt}\right|^2 + t^2\frac{dx}{dt} + \frac{1}{1+x^2} = t^2+1;\\
&\frac{dx}{dt} + x^4 = t^2+1;\\
&x\frac{dx}{dt} = e^t;\\
&\frac{dx}{dt} = \frac{t^2-x^2}{t^2+x^2+1};
\end{aligned}$$

son ecuaciones de primer orden, ya que la derivada de mayor orden que aparece en cada igualdad es la derivada primera de x.

Ejemplo 1.21. *Sea $I \subset I\!R$ un intervalo abierto; $f, g : I\!R \to I\!R$ una funciones conocidas y derivables hasta el orden 4. Las ecuaciones diferenciales*

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = f(t);\\
&\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + x = f(t);\\
&\left|\frac{d^2x}{dt^2}\right|^3 + x^3 = f(t);\\
&\frac{d^2x}{dt^2} + x = \frac{d^4f}{dt^4};\\
&\frac{d^2x}{dt^2} + x = g(x);
\end{aligned}$$

son ecuaciones de segundo orden, ya que la derivada de mayor orden de la función incógnita "x" que aparece en cada ecuación es la derivada segunda.

Ecuación lineal

Definición 1.22. *Dada una ecuación diferencial de orden k, decimos que es una ecuación lineal, si es posible expresarla de la forma*

$$\frac{d^k x}{dt^k} + a_{k-1}(t)\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} + \cdots + a_0(t)u = f(t)$$

donde a_j (para $j = 0 \cdots k-1$) y f son funciones conocidas que no dependen de x ni de sus derivadas. Si la ecuación diferencial no es lineal, decimos que es no-lineal.

Ejemplo 1.23. *La ecuación diferencial*

$$x\frac{d^2x}{dt^2} = x,$$

es una ecuación no lineal, ya que el coeficiente del término $\frac{d^2x}{dt^2}$ depende de x.

Observación 1.24. *Dada la ecuación diferencial*

$$-\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + e^t x = t^4$$

es posible expresarla de la forma

$$L(x) = f(t)$$

donde L se define de la forma

$$L(x) = -\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + e^t x,$$

y $f(t) = t^4$. En este caso la ecuación es lineal por ser L una aplicación lineal en x. En general, cuando la ecuación

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \cdots, \frac{d^k x}{dt^k}\right) = 0 \tag{1.2}$$

se expresa de la forma $L(x) = f(t)$, donde $L : C^k(I) \to C^0(I)$ es una aplicación definida a partir de derivadas, (1.2) es lineal, si y solo si L es una aplicación lineal. Cuando la aplicación $L : C^k(I) \to C^0(I)$, se define a partir de derivadas se denomina "operador diferencial".

Ejemplo 1.25. *Las ecuaciones*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + e^t x = \operatorname{sen}(t); \quad \frac{dx}{dt} = x\cos(t) + t^2; \quad -\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0,$$

son ecuaciones lineales por ser

$$L_1(x) = \frac{d^2x}{dt^2} + e^t x; \qquad L_2(y) = \frac{dx}{dt} - x\cos(t); \qquad L_3(y) = -\frac{d^2x}{dt^2} + x$$

lineales.

Concepto de solución

Consideramos la ecuación diferencial

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \cdots, \frac{d^k x}{dt^k}\right) = 0,\ t \in I, \tag{1.3}$$

donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto; $k \in \mathbb{N}$ y $F : I \times \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$, es una función conocida.

Entendemos la ecuación (1.3) como una igualdad puntual, que se debe satisfacer para todo punto $t \in I$. Para que esta igualdad puntual tenga sentido, es necesario que la función x sea derivable hasta el orden k en todo $t \in I$, es decir, la solución debe pertenecer al espacio $C^k(I)$. Cuando x no posee la regularidad deseada, pero satisface la igualdad en casi todo punto; es posible extender el concepto de solución a un conjunto más amplio de funciones, no necesariamente funciones de clase $C^k(I)$, veasé [12] si se desea profundizar en el tema.

Solución general

Definición 1.26. *Dada la ecuación diferencial de orden k (1.3) definida en I; decimos que*

$$x(t) = f(t, c_1, \cdots c_k)$$

es la solución general de la ecuación si: $x \in C^k(I)$ y al reemplazar "x" en la ecuación, con las derivaciones correspondientes, se verifica la igualdad. Las constantes $c_1, \cdots c_k$ son constantes arbitrarias que definen un conjunto de dimensión k.

Ejemplo 1.27. *Dada la ecuación diferencial*

$$-\frac{d^2 x}{dt^2} + \pi^2 x = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La función

$$x(t) = c_1 \operatorname{sen}(\pi t) + c_2 \cos(\pi t),$$

para $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, es la solución general de la ecuación por tener la regularidad requerida; por coincidir el orden de la ecuación con la dimensión del conjunto de las posibles constantes que aparecen en la solución y por satisfacer la ecuación para todo $t \in \mathbb{R}$.

Solución particular

Definición 1.28. *Dada la ecuación diferencial (1.3) decimos que "x" es una solución particular de la ecuación, si: $x \in C^k(I)$ y al reemplazar "x" en la ecuación, con las derivaciones correspondientes, se verifica la igualdad.*

En el Ejemplo 1.27, la función $x(t) = \operatorname{sen}(t)$ es una solución particular de la ecuación que se obtiene al tomar $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$. Además, cuando se impone una condición extra: el valor de la solución o el de su derivada en un punto; la integral de la solución en un intervalo etc, estamos buscando una solución particular que se obtiene al encontrar los valores de las constantes $c_1, \cdots, c_k$ para que se satisfaga la condición.

Ejemplo 1.29. *La ecuación*

$$\frac{dx}{dt} = x\cos(t)$$

tiene por solución general la función $x(t) = ce^{\operatorname{sen}(t)}$. *Si imponemos la condición* $x(0) = 1$, *despejamos el valor de* c *de la igualdad*

$$1 = x(0) = ce^{\operatorname{sen}(0)} = c$$

es decir, $c = 1$, *y la solución es* $x(t) = e^{\operatorname{sen}(t)}$.

Problema de Cauchy

Problema de Cauchy

Definición 1.30. *Sea* $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ *un intervalo abierto;* $t_0 \in [a, b] \cap \mathbb{R}$ *y* $k \in \mathbb{N}$ *el orden de la ecuación diferencial ordinaria*

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \cdots, \frac{d^k x}{dt^k}\right) = 0, \quad t \in I. \tag{1.4}$$

El problema de Cauchy consiste en encontrar una función $x \in C^k(I)$ *que satisfaga la ecuación (1.4) y la condición o condiciónes extra*

$$x(t_0) = x_0, \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = x_1, \ \cdots \quad \left.\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}\right|_{t=t_0} = x_{k-1} \tag{1.5}$$

donde $x_0, x_1, \cdots x_{k-1}$ *son datos conocidos. La condición (1.5) se denomina dato inicial.*

Observación 1.31. *Es necesario que la condición o condiciones extra determinen el valor de la función incógnita y de sus derivadas hasta el orden* $k - 1$ *en el mismo punto* t_0.

Ejemplo 1.32. *Los problemas*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x = t^2, \quad t > 0 \\ x(0) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left|\dfrac{dx}{dt}\right|^2 + x^2 = e^t, \ t \in \mathbb{R} \\ x(-1) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + x = 0, \ t \in \mathbb{R} \\ x(0) = 0, \ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 1 \end{cases}$$

son problemas de Cauchy. Sin embargo

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 0, \; t \in (0, 2\pi) \\ x(0) = x(2\pi) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + x = t, \; t \in (0, \pi) \\ x(0) = \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=\pi} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + x = 0, \; t \in I\!R \\ x(0) = \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=\pi} + x(\pi) = 0 \end{cases}$$

no son problemas de Cauchy, puesto que la condición extra evalúa la función en diferentes puntos.

Problema bien planteado

Definición 1.33. *Decimos que el problema está "bien planteado" si existe una única solución que depende de manera continua de los datos del problema.*

El concepto de problema "bien planteado" fue introducido en 1932 por *J. Salomon Hadamard* (1865-1963) para el problema de Cauchy. De manera intuitiva, el concepto de dependencia continua respecto de los datos se refiere a que "pequeñas" variaciones de dichos datos crean "pequeñas" variaciones en la solución.

Funciones lipschitzianas

Función lipschitziana

Definición 1.34. *Sea N un número natural, y $\Omega \subset I\!R^N$ un conjunto abierto y conexo. Decimos que una función $f : \Omega \to I\!R$ es lipschitziana en Ω, si existe una contante c_f tal que para todo $x, y \in \Omega$*

$$|f(x) - f(y)| \leq c_f |x - y|$$

donde $|x - y|$ representa la distancia euclídea en $I\!R^N$.

Ejemplo 1.35. *La función seno es una función lipschitziana. La demostración es una consecuencia del teorema del valor medio:*

$$\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) = \cos(\xi)(x - y)$$

para algún valor $\xi \in (x, y)$. Por las propiedades de la función coseno resulta

$$|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| \leq |x - y|.$$

Ejemplo 1.36. *Sea $f : I\!R \to I\!R$ una función de clase $C^1(I\!R)$ tal que $\left|\dfrac{df}{dx}\right| < c$. Entonces f es una función lipschitziana.*