Capítulo 1

El espacio proyectivo

1.1. Introducción

En el año 1872 se publicó el famoso "Erlangen Programme", del matemático Felix Klein (véase [**8, 9**]). En él se proponía concebir el estudio de la geometría como el estudio de propiedades invariantes bajo un grupo de transformaciones. Uno de los ejemplos más significativos que inspiraron a Klein para enunciar su programa fue la visión jerarquizada de las geometrías proyectiva, afín y euclídea, que son la materia de este libro.

En este capítulo introducimos la geometría proyectiva que es, en esta jerarquía, la más sencilla de las tres dado que su grupo de transformaciones es el más grande y, por tanto, hay menos propiedades que quedan invariantes por dicho grupo. Entre dichas propiedades nos encontraremos con la incidencia, la colinealidad y el invariante numérico denominado razón doble. Los teoremas proyectivos que enunciemos serán ciertos para las demás geometrías y, en este sentido, resultan ser los resultados más profundos.

El espacio proyectivo puede entenderse como el espacio afín ordinario completado con los puntos del infinito, con la salvedad de que la definición formal que veremos hace que no haya distinción alguna entre unos y otros. La posibilidad de un tratamiento algebraico cómodo de la noción de infinito es uno de los principales atractivos de esta geometría.

Otra ventaja de disponer de la geometría proyectiva es la simplicidad con la que se pueden enunciar sus resultados. Por ejemplo, en geometría afín dos rectas distintas del plano pueden o bien cortarse en un punto o ser paralelas, mientras que en geometría proyectiva dos rectas distintas siempre se cortan en un punto que, desde el punto de vista afín, puede estar o no en el infinito.

Finalmente, la generalidad de la geometría proyectiva, en la que no existe *per se* una noción de medida, ángulo, proporción ni paralelismo, hace que las referencias proyectivas, que usaremos para coordenar los espacios proyectivos, tengan más grados de libertad que los que tiene las otras geometrías. Por ejemplo, en el plano, una referencia proyectiva se puede elegir con 8 grados de libertad mientras que en el plano afín una referencia tiene 6 grados de libertad y en el plano euclídeo disponemos solamente de 3 grados de libertad. Esto permite simplificar extraordinariamente muchos problemas proyectivos. No obstante, de cara a la resolución de ejercicios, se recomienda al estudiante que considere la opción de utilizar coordenadas como un último recurso, dado que en numerosas ocasiones es posible argumentar utilizando razonamientos geométricos más elegantes.

La geometría proyectiva tiene interés en otros muchos campos de las matemáticas, tanto puros como aplicados. Desde el punto de vista aplicado, mencionemos que la geometría proyectiva es un ingrediente fundamental en visión por ordenador, en donde las cámaras se pueden modelar como ciertas proyecciones. Desde el punto de vista de la matemática pura, destaquemos que, al igual que las geometrías afín y euclídeas se pueden ver como subgeometrías de la geometría proyectiva, es posible construir modelos de otras geometrías no euclídeas a partir de la geometría proyectiva. Es también el espacio ambiente natural en el que se desarrolla la geometría algebraica, una importante rama de las matemáticas.

1.2. Definición de espacio proyectivo

Formalmente, este capítulo es muy sencillo: se trata de reformular las nociones habituales del álgebra lineal en un nuevo contexto en el que los elementos básicos no son los vectores, sino las rectas vectoriales. En la siguiente sección se introducirá la motivación que justifica esta aproximación y permitirá establecer un vínculo entre la geometría proyectiva y la geometría afín ordinaria que seguramente conoce el lector.

DEFINICIÓN 1.2.1. Dado un espacio vectorial $\mathbb{E}$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ arbitrario (que usualmente será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), se llama espacio proyectivo asociado a $\mathbb{E}$, y se denota por $\mathbf{P}(\mathbb{E})$, al conjunto formado por todos los subespacios de dimensión uno de $\mathbb{E}$ (rayos vectoriales). Esto es,

$$\mathbf{P}(\mathbb{E}) := \{[\mathbf{u}] : \mathbf{u} \in \mathbb{E} \setminus \{0\}\},$$

donde $[\mathbf{u}] := \{\lambda \mathbf{u} : \lambda \in \mathbb{K}\}$ es el rayo engendrado por el vector $\mathbf{u}$. A los elementos de $\mathbf{P}(\mathbb{E})$ los llamaremos puntos.

EJEMPLO 1.2.2. Supongamos que $\mathbb{E} = \{0\}$. En este caso $\mathbb{E}$ no contiene ningún rayo vectorial, por tanto $\mathbf{P}(\mathbb{E}) = \varnothing$.

En el caso de que $\dim \mathbb{E} = 1$ hay un solo rayo vectorial en $\mathbb{E}$ y, por tanto, $\mathbf{P}(\mathbb{E})$ se reduce a un solo punto.

Supongamos ahora que $\dim \mathbb{E} = 2$. El espacio proyectivo $\mathbf{P}(\mathbb{E})$ está formado por todas las rectas de $\mathbb{E}$ que pasan por 0. Ilustramos la situación en la figura 1.

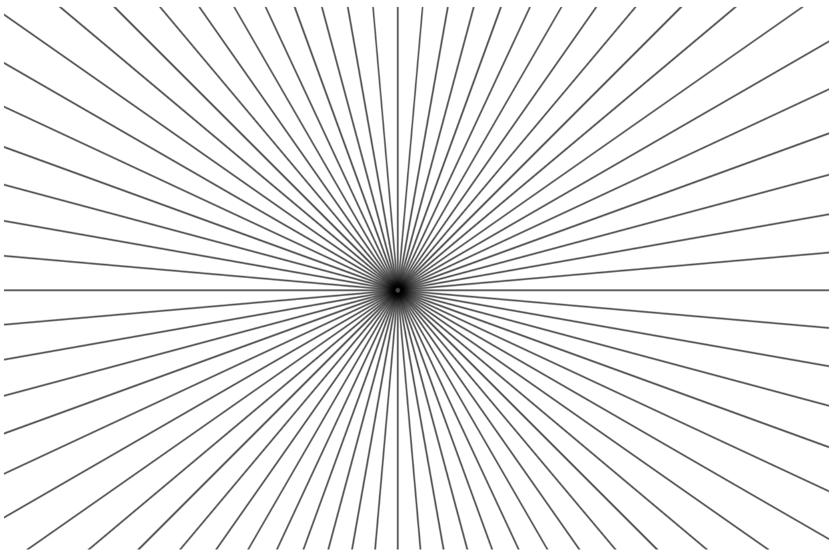

FIGURA 1. Espacio proyectivo $\mathbf{P}(\mathbb{E})$ si $\dim \mathbb{E} = 2$.

Dos puntos $[\mathbf{u}]$ y $[\mathbf{v}]$ de $\mathbf{P}(\mathbb{E})$ son iguales si y solo si existe un $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$. La proyección $\pi \colon \mathbb{E} \setminus \{0\} \to \mathbf{P}(\mathbb{E})$ es la aplicación que asigna a cada $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$ no nulo el rayo $\pi(\mathbf{u}) = [\mathbf{u}]$ engendrado por él y se llamará proyección canónica.

Cuando $\mathbb{E} = \mathbb{K}^{n+1}$, escribiremos $\mathbb{K}\mathbf{P}^n$, o simplemente $\mathbf{P}^n$ si no queremos enfatizar cuál es el cuerpo base. Este es el espacio proyectivo canónico.

OBSERVACIÓN 1.2.3. Una definición alternativa del espacio proyectivo es la siguiente: sea $\mathbb{E}$ espacio vectorial, y sea R la relación de equivalencia definida en $\mathbb{E} \setminus \{0\}$ del siguiente modo: $\mathbf{u}R\mathbf{v}$ si y solo si existe un $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$. Entonces el espacio proyectivo asociado a $\mathbb{E}$ se define en algunos textos como el conjunto de clases de equivalencia $(\mathbb{E} \setminus \{0\})/R$. Como la aplicación $(\mathbb{E} \setminus \{0\})/R \to \mathbf{P}(\mathbb{E}), \mathbf{u}R \mapsto [\mathbf{u}]$ es una biyección natural, podemos identificar ambos conjuntos, con lo que ambas definiciones de espacio proyectivo resultan ser equivalentes.

1.3. Motivación de la definición de espacio proyectivo

Es posible completar el plano usual añadiendo un solo punto en el infinito, denotado por ∞, de forma que $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ estará en biyección con $\mathbf{S}^2$, la esfera unidad de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$. La proyección estereográfica $\phi : \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \to \mathbf{S}^2$ es una tal biyección, que asigna a cada punto del plano (x,y) el punto de la esfera $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ que se obtiene intersecando la recta que une $(0,0,1)$ y el punto $(x,y,0)$ con S^2 (ver figura 2). Su expresión analítica es:

$$\phi(x,y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \right), \qquad \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2;$$

y $\phi(\infty) = (0,0,1)$. Esta completación con un único punto del infinito es útil en diversos contextos matemáticos, en especial en análisis complejo. Sin embargo, tiene el inconveniente de que perdemos la información sobre la dirección hacia la que nos dirigimos al alejarnos hacia el infinito, ya que las imágenes en la esfera de todas las direcciones convergen hacia un único punto. Nues-

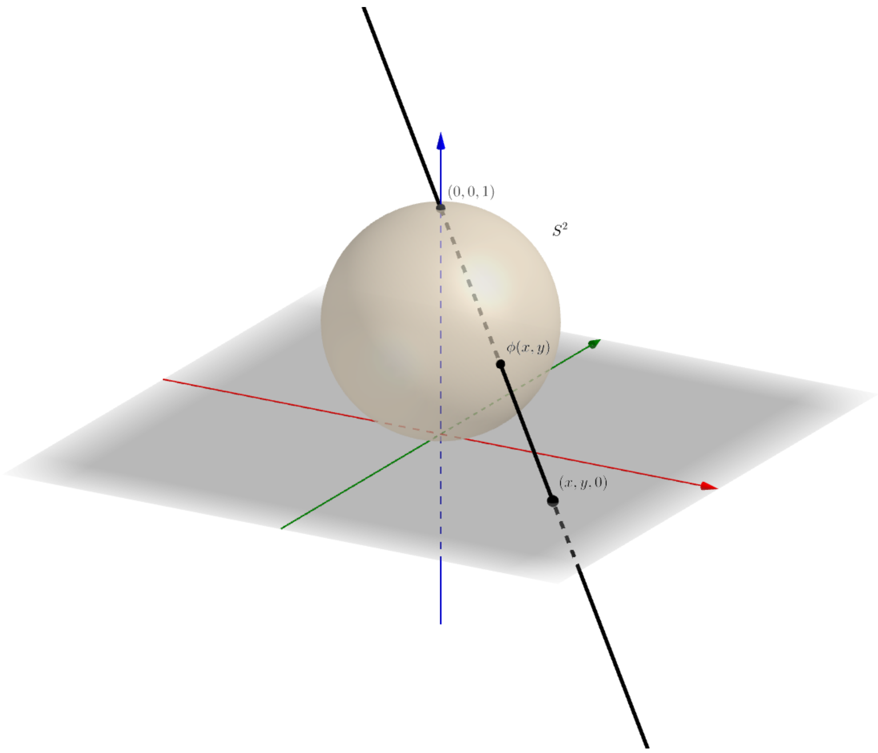

FIGURA 2. Proyección estereográfica

tro propósito es asociar a cada haz de rectas paralelas un punto en el infinito distinto que tenga la información de cuál es la dirección del haz. Para ello, primero introducimos $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ mediante la aplicación $\psi(x,y) = (x,y,1)$. De esta forma $\mathbb{R}^2$ es puesto en biyección con el plano $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\} \subset \mathbb{R}^3$. La elección del plano $z = 1$ es arbitraria, lo único relevante es que es un plano afín no vectorial, es decir, no pasa por el $0 \in \mathbb{R}^3$.

Ahora consideremos un punto arbitrario $\mathbf{p} = (X,Y,1)$ de $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Este punto, visto como vector de $\mathbb{R}^3$, engendra un rayo $[\mathbf{p}] \in \mathbb{R}\mathbf{P}^2$. Tenemos por tanto una aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}\mathbf{P}^2 \setminus l_\infty \\ (X,Y,1) &\longmapsto [(X,Y,1)] \end{aligned}$$

en donde l_∞ es el conjunto de los rayos engendrados por vectores de la forma $(u,v,0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

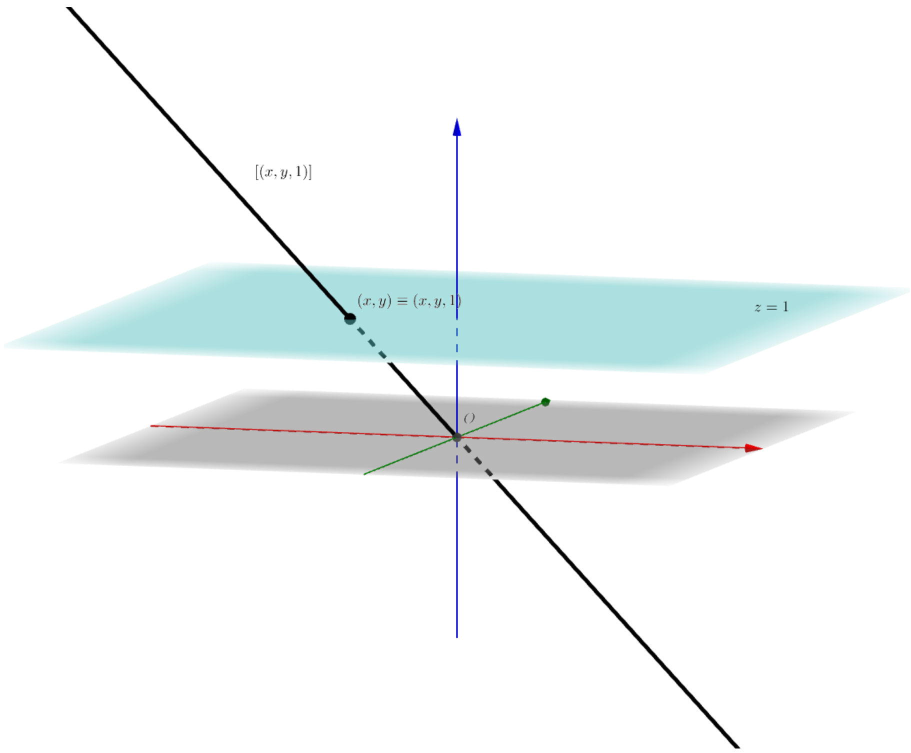

FIGURA 3. Identificación del plano con los rayos no contenidos en el plano $z = 0$.

Esta aplicación tiene una inversa

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\mathbf{P}^2 \setminus l_\infty &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ [(u,v,w)] &\longmapsto (u/w, v/w, 1)\end{aligned}$$

que está bien definida, puesto que $w \neq 0$. Por tanto, es una aplicación biyectiva que nos permite identificar el plano usual con el subconjunto del plano proyectivo $\mathbb{R}\mathbf{P}^2 \setminus l_\infty$

Sea ahora $\mathbf{p}_0 = (X_0, Y_0, 1)$ y sea r una recta por $\mathbf{p}_0$ con vector director $\mathbf{u} = (u_x, u_y, 0)$. Los puntos de r son de la forma $\mathbf{p} = (X_0 + tu_x, Y_0 + tu_y, 1)$ con $t \in \mathbb{R}$. El límite

$$\lim_{t\to\pm\infty} (X_0 + tu_x, Y_0 + tu_y, 1)$$

no es finito. Sin embargo, si consideramos los rayos que dichos puntos generan, $[(X_0 + tu_x, Y_0 + tu_y, 1)]$ y notamos que podemos multiplicar el representante del rayo por $1/t$ sin modificar el rayo, vemos que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\pm\infty}[(X_0 + tu_x, Y_0 + tu_y, 1)] &= \lim_{t\to\pm\infty}[(X_0/t + u_x, Y_0/t + u_y, 1/t)]\\ &= [(u_x, u_y, 0)].\end{aligned}$$

Tiene, por tanto, sentido llamar al rayo $[(u_x, u_y, 0)]$ **punto del infinito** de la recta r. Como este punto solo depende del vector director, todas la rectas paralelas a una dirección dada comparten el mismo punto del infinito. El punto del infinito es el mismo, independientemente del sentido en el que se recorra la recta. Esto contrasta con la recta $\mathbb{R}$ ampliada con dos puntos del infinito $[-\infty, \infty]$, que a menudo se usa en análisis.

EJEMPLO 1.3.1. Consideremos las dos rectas paralelas de $\mathbb{R}^2$ de ecuaciones $X - Y - 1 = 0$ y $2X - 2Y + 1 = 0$. Si consideramos la inmersión $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ que hace corresponder a cada punto (X, Y) el punto $(X, Y, 1)$. Entonces los rayos engendrados por puntos de las rectas están contenidos en los planos vectoriales de ecuaciones $x - y - z = 0$ y $2x - 2y + z = 0$. La intersección de los dos planos es el rayo vectorial $[(1,1,0)] \in \mathbf{P}(\mathbb{R}^2)$, que interpretamos como punto del infinito en el que se cortan ambas rectas y que está engendrado por el vector director común a ambas.

1.4. Dimensión, subespacios proyectivos, suma e intersección.

DEFINICIÓN 1.4.1. Dado el espacio vectorial $\mathbb{E}$, se llama dimensión del espacio proyectivo $\mathbf{P}(\mathbb{E})$, y se denotará por $\dim \mathbf{P}(\mathbb{E})$ al número

$$\dim \mathbf{P}(\mathbb{E}) := \dim \mathbb{E} - 1,$$

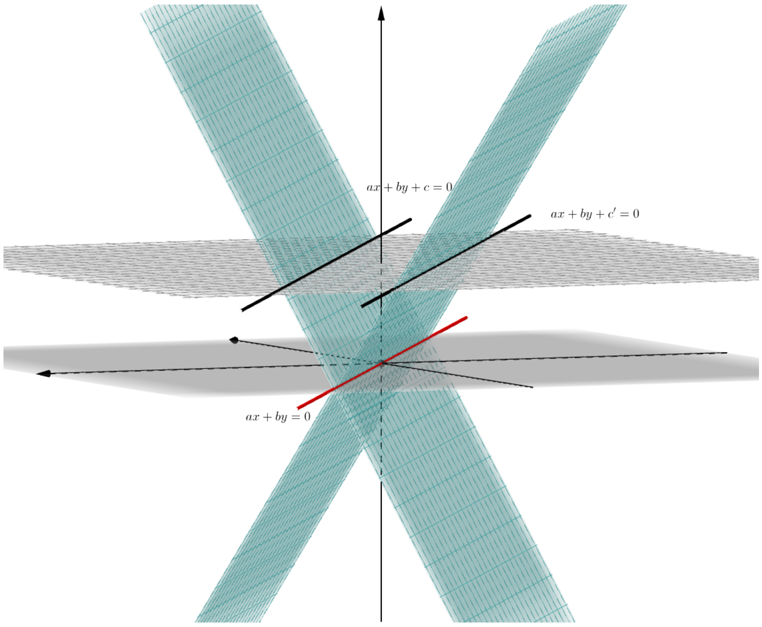

FIGURA 4. El punto del infinito (en rojo) común a un par de rectas paralelas

donde $\dim \mathbb{E}$ es la dimensión de $\mathbb{E}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Esta definición de dimensión es razonable a la vista de la identificación que hicimos previamente del plano afín usual con $\mathbb{R}\mathbf{P}^2 \setminus l_\infty$. Esta identificación se puede extender, como veremos, a cualquier dimensión y cuerpo. La definición también puede entenderse observando que, al considerar como puntos a los rayos vectoriales, estamos perdiendo una de las dimensiones de $\mathbb{E}$.

DEFINICIÓN 1.4.2. Si $\mathbb{E}$ es espacio vectorial y $\mathbb{X} \subset \mathbb{E}$ es un subespacio vectorial, entonces $\mathbf{P}(\mathbb{X}) \subset \mathbf{P}(\mathbb{E})$ es también un espacio proyectivo, y diremos que $\mathbf{P}(\mathbb{X})$ es subespacio proyectivo de $\mathbf{P}(\mathbb{E})$.

Introduzcamos alguna terminología adicional. De forma análoga a como se define en el caso de espacios vectoriales, la codimensión de $\mathbf{P}(\mathbb{X})$ se define como

$$\operatorname{codim} \mathbf{P}(\mathbb{X}) = \dim \mathbf{P}(\mathbb{E}) - \dim \mathbf{P}(\mathbb{X}).$$

Si $\mathbf{P}(\mathbb{X})$ tiene codimensión uno, diremos que es un hiperplano proyectivo. En el caso de que sea $\dim \mathbf{P}(\mathbb{X}) = 1$, diremos que es una recta proyectiva. Los puntos proyectivos son los subespacios de dimensión cero. Observemos finalmente que, según la definición de dimensión proyectiva, si $\dim \mathbb{E} = 0$ es

$\mathbf{P}(\mathbb{E}) = \varnothing$ y tenemos que $\dim \varnothing = -1$. Esto puede parecer extraño, pero es necesario para poder tener una fórmula de Grassmann, que indicará cuál es la dimensión del subespacio proyectivo generado por dos subespacios, válida para subespacios proyectivos. Esto se verá más adelante.

EJEMPLO 1.4.3. Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ y sea $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^3$ el subespacio vectorial de ecuación $x - y + z = 0$. Los rayos de $\mathbb{R}^3$ contenidos en $\mathbb{X}$ forman un subespacio proyectivo $\mathbf{P}(\mathbb{X}) \subset \mathbf{P}(\mathbb{R}^3)$ de dimensión $\dim \mathbf{P}(\mathbb{X}) = 1$ puesto que $\dim \mathbb{X} = 2$, por tanto se trata de una recta proyectiva y, al mismo tiempo, un hiperplano proyectivo ya que $\dim \mathbf{P}(\mathbb{E}) = 2$.

Dado un subconjunto $S \subset \mathbf{P}(\mathbb{E})$, denotaremos

$$\hat{S} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{E} : \pi(\mathbf{u}) \in S\} \cup \{0\} = \pi^{-1}(S) \cup \{0\}$$

Obsérvese que $\pi\left(\hat{S} \setminus \{0\}\right) = S$ y que un subconjunto $S \subset \mathbf{P}(\mathbb{E})$ es subespacio proyectivo de $\mathbf{P}(\mathbb{E})$ si y sólo si $\hat{S}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{E}$.

En adelante, si $\mathbf{X}$ es subespacio proyectivo, denotaremos por $\mathbb{X} = \hat{\mathbf{X}}$ al subespacio vectorial del que procede. Observemos que $\pi(\mathbb{X} \setminus \{0\}) = \mathbf{X}$, y que $\mathbb{X} = \pi^{-1}(\mathbf{X}) \cup \{0\}$. Finalmente, notemos que $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y} \Leftrightarrow \mathbb{X} \subset \mathbb{Y}$.

La correspondencia $\mathbf{X} \mapsto \mathbb{X}$ entre subespacios proyectivos de $\mathbf{P}(\mathbb{E})$ y los subespacios vectoriales de $\mathbb{E}$ tiene una aplicación inversa dada por $\mathbb{X} \mapsto \mathbf{P}(\mathbb{X})$. Por tanto tenemos una biyección entre subespacios vectoriales de $\mathbb{E}$ y subespacios proyectivos de $\mathbf{P}(\mathbb{E})$.

Veamos ahora cómo se comportan los subespacios proyectivos respecto a las operaciones de intersección y unión.

PROPOSICIÓN 1.4.4. *Si $\mathbf{X}_i \subset \mathbf{P}(\mathbb{E})$, $i \in I$, son subespacios proyectivos entonces $\bigcap_{i \in I} \mathbf{X}_i$ es subespacio proyectivo, y*

$$\bigcap_{i \in I} \mathbf{X}_i = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in I} \mathbb{X}_i\right).$$

Equivalentemente, el espacio vectorial asociado a la intersección $\bigcap_{i \in I} \mathbf{X}_i$ es $\bigcap_{i \in I} \mathbb{X}_i$.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que la intersección arbitraria de espacios vectoriales es un espacio vectorial. Se tiene entonces que

$$\widehat{\bigcap_{i \in I} X_i} = \pi^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \cup \{0\} = \bigcap_{i \in I} \pi^{-1}(X_i) \cup \{0\} = \bigcap_{i \in I} \mathbb{X}_i,$$

lo que demuestra el resultado. ■

DEFINICIÓN 1.4.5. El subespacio proyectivo engendrado por un subconjunto $A \subset \mathbf{P}(\mathbb{E})$ es el menor subespacio proyectivo $\mathbf{V}(A)$ que contiene a A. En particular, si $A = \{P_1, \ldots, P_n\}$ es finito, escribimos $\mathbf{V}(A) = \mathbf{V}(P_1, \ldots, P_n)$. También en ocasiones denotaremos simplemente por PQ la recta que pasa por los puntos P y Q de $\mathbf{P}(\mathbb{E})$, i.e., $PQ = \mathbf{V}(P, Q)$.

EJEMPLO 1.4.6. Sean $P_1 = [(1, -1, 0, 1)]$, $P_2 = [(0, 1, 1, 2)]$ dos puntos de $\mathbf{P}(\mathbb{R}^4)$. El subespacio proyectivo $\mathbf{V}(P_1, P_2)$ estará formado por todos los rayos $[(x, y, z, t)]$ tales que los vectores (x, y, z, t) son no nulos y linealmente dependientes de $(1, -1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1, 2)$, es decir, tendrán coordenadas de la forma

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ z = \mu \\ t = \lambda + 2\mu \end{cases}$$

siendo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. El subespacio vectorial subyacente es pues un plano vectorial y por tanto $\mathbf{V}(P_1, P_2)$ es una recta proyectiva. También podemos encontrar cuáles son dichos vectores obligando a que

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

Hagamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz para obtener una matriz escalonada:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & y+x & z & t-x \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & z-(y+x) & t-x-2(y+x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La última fila de la matriz escalonada deberá ser nula para que el rango sea 2, de forma que vemos coordenadas de los vectores que engendran rayos de $\mathbf{V}(P_1, P_2)$ son aquellas no nulas y que satisfacen las ecuaciones ecuaciones $z - y - x = -3x - 2y + t = 0$. De esta forma vemos la recta proyectiva como intersección de dos planos proyectivos de ¶$(\mathbb{R}^3)$.

PROPOSICIÓN 1.4.7. *Sean $A \subset \mathbf{P}(\mathbb{E})$ un subconjunto cualquiera. Entonces*

$$\mathbf{V}(A) = \bigcap_{\mathbf{X} \supset A} \mathbf{X},$$

en donde entendemos que los $\mathbf{X}$ en esta intersección recorren los subespacios proyectivos de $\mathbf{P}(\mathbb{E})$ que contienen a A. Además, $\widehat{\mathbf{V}(A)} = \mathbb{L}(\hat{A})$.

DEMOSTRACIÓN. Por definición de $\mathbf{V}(A)$, si $\mathbf{X} \supset A$ es subespacio proyectivo entonces $\mathbf{X} \supset \mathbf{V}(A)$, por lo tanto $\bigcap_{\mathbf{X} \supset A} \mathbf{X} \supset \mathbf{V}(A)$. Por otro lado, por la definición misma de $\mathbf{V}(A)$, resulta que $\mathbf{V}(A)$ es un subespacio proyectivo que contiene a A y por tanto uno de los elementos de la intersección. En consecuencia tenemos el otro contenido $\bigcap_{\mathbf{X} \supset A} \mathbf{X} \subset \mathbf{V}(A)$.

Antes de probar la segunda afirmación, observemos primero que si $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ son subespacios proyectivos entonces $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$ si y sólo si $\mathbb{X} \subset \mathbb{Y}$. Tenemos ahora que

$$\widehat{\mathbf{V}(A)} = \widehat{\bigcap_{\mathbf{X} \supset A} \mathbf{X}} = \bigcap_{\mathbf{X} \supset A} \mathbb{X} = \bigcap_{\mathbb{X} \supset \hat{A}} \mathbb{X} = \mathbb{L}(\hat{A})$$

donde la segunda igualdad es consecuencia de la proposición 1.4.4 y la última por la definición de $\mathbb{L}(\hat{A})$ ■

EJEMPLO 1.4.8. Retomando el ejemplo 1.4.6, previo a la proposición, escribamos la recta $\mathbf{V}(P_1, P_2)$ como la intersección de todos los espacios proyectivos que contienen a los puntos P_1 y P_2. Puesto que el conjunto vacío no contiene ningún punto, no hay espacios proyectivos de dimensión -1 que los contengan. Tampoco los hay de dimensión 0, porque un tal espacio se reduce a un punto y, en este caso, tenemos dos puntos.

Un espacio proyectivo de dimensión 1 tendrá un espacio vectorial subyacente de dimensión 2 que deberá contener a los vectores $(1,-1,0,1)^\mathsf{T}$ y $(0,1,1,2)^\mathsf{T}$ y por tanto coincidirá con el plano vectorial engendrado por dichos vectores. En consecuencia el único espacio proyectivo de dimensión 1 que les contiene es el propio $\mathbf{V}(P_1, P_2)$.

Hemos visto que hay dos espacios proyectivos de dimensión 2 que contienen a P_1 y P_2, cuyos espacios vectoriales subyacentes tienen ecuaciones $z - y - x = 0$ y $-3x - 2y + t = 0$ y son de dimensión 3. Cualquier otro espacio vectorial de dimensión 3 de la forma

$$a(z - y - x) + b(-3x - 2y + t) = 0$$

para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$ no simultáneamente nulos también contendrá a los rayos vectoriales P_1 y P_2. Finalmente, si un espacio vectorial es de dimensión 3, es de la forma $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0$, con coeficientes no simultáneamente nulos, y si contiene a los rayos P_1 y P_2 debe ser combinación no trivial de $z - y - x = 0$ y $-3x - 2y + t = 0$, ya que, si no lo fuese, el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

sería 3 y las soluciones del sistema formado por las tres ecuaciones serían un espacio vectorial de dimensión $4 - 3 = 1$, que no podría contener el plano vectorial engendrado por P_1 y P_2. Por tanto, todos los espacios proyectivos de dimensión 2 que contienen a P_1 y P_2 son los que tienen espacios vectoriales subyacentes de la forma $a(z - y - x) + b(-3x - 2y + t) = 0$. Finalmente, el único espacio proyectivo de dimensión 3 es el propio $\mathbf{P}(\mathbb{R}^4)$ y tenemos así enumerados todos los espacios proyectivos que contienen a P_1 y P_2, cuya intersección es $\mathbf{V}(P_1, P_2)$.

Obviamente, la unión de subespacios proyectivos no es en general subespacio proyectivo, pero sí lo es el mínimo subespacio que la contiene

DEFINICIÓN 1.4.9. La suma de dos subespacios proyectivos $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ de $\mathbf{P}(\mathbb{E})$ es, por definición, el subespacio proyectivo $\mathbf{V}(\mathbf{X} \cup \mathbf{Y})$, es decir, es el subespacio proyectivo más pequeño que contiene a $\mathbf{X}$ y a $\mathbf{Y}$. Denotaremos a este espacio, indistintamente, como $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ o como $\mathbf{V}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Nótese que la notación $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ no debe inducir a pensar que los elementos de dicho espacio sean de la forma $P + Q$ con $P \in \mathbf{X}$ y $Q \in \mathbf{Y}$. Es importante darse cuenta de que *la suma de puntos proyectivos no está bien definida*, es decir, no es posible asignar un punto bien definido como significado de $P + Q$. Esto es así porque P es un rayo de puntos, al igual que Q, y no hay vectores representantes privilegiados de P y Q que podamos escoger para sumarlos en el espacio vectorial subyacente y así poder engendrar el rayo $P + Q$ (véase figura 5). Sí tiene sentido interpretar $P + Q$ como la recta proyectiva que pasa por ambos puntos. De forma general, lo que sí es cierto es que el espacio vectorial subyacente a una suma de espacios proyectivos es la suma de los espacios vectoriales subyacentes (para los que sí se cumple que sus vectores son las posibles sumas de vectores de cada término), como muestra la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.4.10. *Si* $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ *son subespacios proyectivos de* $\mathbf{P}(\mathbb{E})$ *entonces*

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{P}(\mathbb{X} + \mathbb{Y})$$

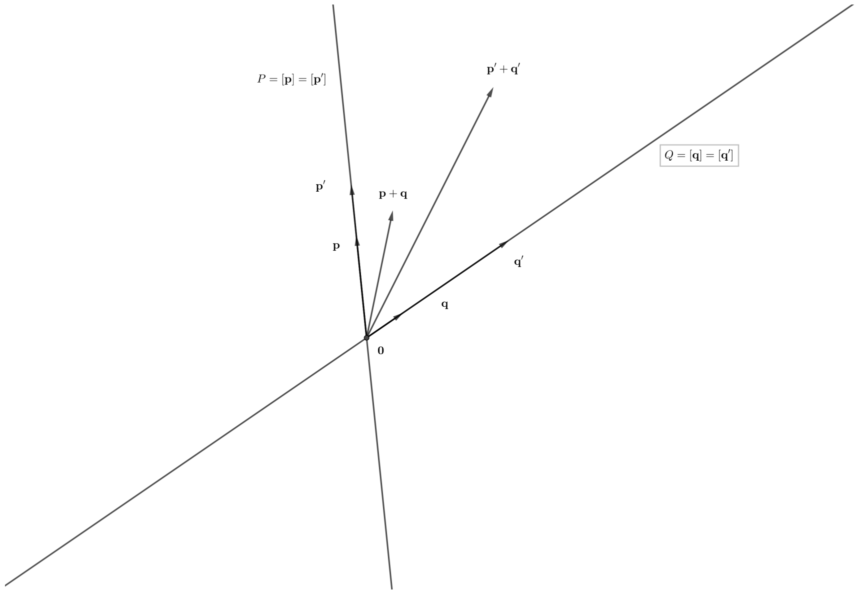

FIGURA 5. La elección de distintos vectores representantes da lugar a rayos distintos. Por tanto, la suma proyectiva de puntos no está bien definida

DEMOSTRACIÓN. Usando la definición 1.4.10, la proposición 1.4.7 y la definición de suma de subespacios vectoriales, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}+\mathbf{Y} &= \mathbf{V}(\mathbf{X}\cup\mathbf{Y}) = \mathbf{P}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{X}\cup\mathbf{Y}})) \\
&= \mathbf{P}\left(\mathbb{L}(\hat{\mathbf{X}}\cup\hat{\mathbf{Y}})\right) = \mathbf{P}\left(\mathbb{L}(\mathbb{X}\cup\mathbb{Y})\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\mathbb{X}+\mathbb{Y}\right)
\end{aligned}$$

■

El siguiente teorema es consecuencia inmediata de la proposición 1.4.10 y de la fórmula de Grassmann para espacios vectoriales, que afirma que si $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{E}$, entonces

$$\dim(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = \dim\mathbb{X} + \dim\mathbb{Y} - \dim(\mathbb{X}\cap\mathbb{Y}).$$

TEOREMA 1.4.11 (de incidencia). *Si* $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{Y}$ *son subespacios proyectivos de* $\mathbf{P}(\mathbb{E})$*, entonces*

$$\dim(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) = \dim\mathbf{X} + \dim\mathbf{Y} - \dim(\mathbf{X}\cap\mathbf{Y}).$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}
\dim(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) = & \\
&= \dim(\mathbb{X}+\mathbb{Y})-1 = \\
&= \dim(\mathbb{X})-1+\dim(\mathbb{Y})-1-(\dim(\mathbb{X}\cap\mathbb{Y})-1) \\
&= \dim\mathbf{X}+\dim\mathbf{Y}-\dim(\mathbf{X}\cap\mathbf{Y})
\end{aligned}$$

■

Como aplicación inmediata del teorema de incidencia, notemos que la intersección de una recta y un hiperplano es siempre no vacía. En efecto, si $\dim\mathbb{E}=n+1$, entonces la dimensión de la recta es 1 y la dimensión del hiperplano es $n-1$ (pues $\dim\mathbf{P}(\mathbb{E})=n$). Si suponemos que la recta y el hiperplano no se cortan, entonces la dimensión de la variedad proyectiva engendrada por ambos tendría dimensión $1+(n-1)-(-1)=n+1$, lo que es imposible. Vemos pues que en el espacio proyectivo no existe una noción de paralelismo.