Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introducción

Las ecuaciones en derivadas parciales es una materia que aparece en varias áreas de conocimiento de diferentes disciplinas, entre las que se encuentras las Ciencias Matemáticas, las Ciencias Físicas, las Ciencias Biológicas, la Ingeniería o la Economía.

El concepto de derivada parcial de una función aparece por primera vez en los documentos que Isaac Newton escribe en 1671 y son publicados en 1736 bajo el título *"Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum"*. Sin embargo, en dicho documento no aparece de manera explícita ningún tipo de ecuación en derivadas parciales. La primera publicación científica donde aparecen ecuaciones en derivadas parciales es en el artículo escrito por Johann Bernoulli y publicado en *Acta Eruditorum* en 1719. De manera intuitiva, dada una función definida sobre un conjunto abierto de un espacio de dimensión 2 o superior, su derivada parcial nos indica la tasa de variación de la función respecto de una de las variables en cada uno de los puntos del conjunto sobre el que se define. Existen numerosos ejemplos físicos donde una ecuación o un sistema de ecuaciones en derivadas parciales describe el comportamiento de una o varias magnitudes físicas que a priori no conocemos. Conocer dichas magnitudes de forma explícita u obtener la mayor información posible de ellas a partir de la ecuación que satisfacen sus derivadas parciales es el objetivo del análisis de dicha ecuación.

Desde su aparición hasta nuestros días, las ecuaciones en derivadas parciales han suscitado el interés en distintas disciplinas. Este interés, causado en parte por su utilidad, también es debido a su uso como herramienta fundamental en la modelización[1] de una gran cantidad de procesos, entre los

[1]La modelización matemática es el proceso de construción de una expresión matemática que describe el comportamiento de un determinado proceso. Dicho proceso puede pertenecer a cualquier disciplina científica o área de

que se encuentran la transmisión del calor, la propagación de ondas, el comportamiento de fluidos o la evolución de ciertas poblaciones biológicas.

1.2 Conceptos básicos

Antes de introducir el concepto de *"ecuación en derivadas parciales"*, se recuerda en la siguiente definición la noción de derivada parcial de una función de varias variables.

Derivada parcial

Definición 1.1. *Sea $N \geq 2$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, sean $\tilde{x} \in \Omega$ y $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Si existe el límite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(\tilde{x}_1, \ldots \tilde{x}_i + h, \ldots \tilde{x}_N) - f(\tilde{x}_1, \ldots \tilde{x}_i, \ldots \tilde{x}_N))$$

y es finito, decimos que dicho límite es la derivada parcial de f respecto de x_i en el punto $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots \tilde{x}_N)$.

Observación 1.2. *Si la función f es derivable respecto de x_i en un entorno de $\tilde{x}$, la definición anterior es equivalente a derivar f respecto de la variable x_i dejando el resto de las variables como si fueran constantes. La notación utilizada es*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(\tilde{x}_1, \ldots \tilde{x}_i + h, \ldots \tilde{x}_N) - f(\tilde{x}_1, \ldots \tilde{x}_i, \ldots \tilde{x}_N)) := \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x = \tilde{x}}.$$

Función de clase k

Definición 1.3. *Sea $N \geq 2$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Si existen todas las derivadas parciales de f en todo punto $x \in \Omega$ y estas son continuas, decimos que f es una función $C^1(\Omega)$. Denotamos su derivada parcial respecto de la variable x_i por*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Si existen las derivadas parciales de f hasta el orden k y estas son continuas, decimos que f es una función de clase C^k en Ω o que pertenece a $C^k(\Omega)$.

Ejemplo 1.4. *Se considera la función $f(x, y) = x^2 + y^2$. La derivada parcial de f respecto de la variable x, consiste en derivar la función f respecto de "x" considerando la variable "y" como una*

conocimiento humano, como la Física, la Química, la Biología, la Ingeniería, la Economía, la Medicina o la Sociologıa entre otros.

constante, es decir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x.$$

Definición 1.5. Función lipschitziana. *Sea $N \geq 2$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Decimos que una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es lipschitziana, si existe una contante c_f tal que para todo $x, y \in \Omega$*

$$|f(x) - f(y)| \leq c_f |x - y|$$

donde $|x - y|$ representa la distancia euclídea en $\mathbb{R}^N$.

Ejemplo 1.6. *La función $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ puede derivarse tantas veces como se desee en cualesquiera puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Además, todas sus derivadas son siempre continuas, por ese motivo, dicha función es una función $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.*

Definición 1.7. Función par. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, decimos que f es una función par, si*

$$f(x) = f(-x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.8. *Existen numerosos ejemplos de funciones pares, como son $\{\cos(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$, e^{-x^2}, x^2, x^4, x^6 entre otras.*

Definición 1.9. Función impar. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, decimos que f es una función impar, si*

$$f(x) = -f(-x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.10. *Existen numerosos ejemplos de funciones impares que se utilizan con frecuencia, entre otras, las funciones de la forma $\{sen(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$, x, x^3, x^5.*

Ecuación en derivadas parciales

Definición 1.11. *Sea $N \geq 2$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Una ecuación en derivadas parciales (E.D.P.) es una igualdad en la que intervienen derivadas respecto de dos o más variables de una función desconocida "u". Es decir, una E.D.P. es una igualdad de la forma*

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial u}{\partial x_N}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots \frac{\partial^j u}{\partial x_{i_1}^{j_1} \dots \partial x_{i_j}^{j_N}}, \dots \frac{\partial^k u}{\partial x_N^k}\right) = 0, \quad x \in \Omega \tag{1.1}$$

donde $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \dots \mathbb{R}^{N^k} \to \mathbb{R}$ es una función conocida. Si aparecen varias igualdades con varias funciones desconocidas y sus derivadas respecto de varias variables, se denomina "Sistema de ecuaciones en derivadas parciales".

En la Definición 1.11 no se precisa la regularidad de la función F. Con carácter general y si no se especifica lo contrario, supondremos que F es una función $C^k(\Omega \times I\!R \times I\!R^N \dots I\!R^{N^k})$.

Orden de una ecuación

Definición 1.12. *El orden de una ecuación diferencial es el grado de derivación más alto que aparece en la ecuación.*

Ejemplo 1.13. *El orden de la ecuación*

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^3 = u + x^4$$

es 2, ya que aparecen las derivadas segundas de la función incógnita "u" respecto de la variable x y no aparecen derivadas de orden superior..

Solución clásica

Definición 1.14. *Decimos que una función "u" es una solución clásica de una ecuación diferencial, si todas las derivadas de "u" que aparecen en la ecuación, con sus ordenes correspondientes, son continuas y al sustituir dicha función y sus derivadas en (1.1) se satisface la ecuación puntualmente, es decir, se satisface para todo $x \in \Omega$.*

Ejemplo 1.15. Ejemplo de solución clásica de una ecuación diferencial. *Sea $N \in I\!N$, y ϕ la función definida en la expresión*

$$\phi = e^{-x^2} = e^{-\sum_{i=1}^{N} x_i^2}.$$

Veamos que ϕ es una solución clásica del problema

$$-\Delta u - 2x^T \cdot \nabla u - 2Nu = 0, \qquad \text{en } I\!R^N,$$

donde x^T indica el vector x expresado como vector fila y $x^T \cdot \nabla u$ el producto escalar de x^T por ∇u. Calculamos las derivadas de ϕ y deducimos

$$-\Delta\phi = -4x^2 e^{-x^2} + 2Ne^{-x^2}, \quad -2x^T \cdot \nabla\phi = 4x^2 e^{-x^2}.$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos que ϕ satisface la ecuación en cada punto x de $I\!R^N$.

Solución particular

Definición 1.16. *Dada una condición extra que debe satisfacer la solución (dato inicial y/o datos de contorno), una solución particular es aquella que satisface tanto la ecuación como la condición inicial y/o los datos de contorno. Es decir, es un caso particular de la solución general. El tipo de condiciones iniciales/datos de contorno está determinado por el tipo de ecuación.*

Definición 1.17. Solución trivial. *Dada una ecuación diferencial*

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial u}{\partial x_N}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots \frac{\partial^j u}{\partial x_{i_1}^{j_1} \ldots \partial x_{i_j}^{j_N}}, \ldots \frac{\partial^k u}{\partial x_N^k}\right) = 0,$$

decimos que una solución "u" es la solución trivial, si dicha función es idénticamente 0*, es decir, si* $u(x) = 0$*, para todo* $x \in \Omega$*.*

Definición 1.18. Problema bien planteado. *Decimos que el problema está "bien planteado" si existe una única solución que depende de manera continua de los datos del problema (ver Evans [10], Salsa [26]).*

El concepto de problema "bien planteado" fue introducido por J. Salomon Hadamard en 1932 para el problema de Cauchy. De manera intuitiva, el concepto de dependencia continua respecto de los datos se refiere a que, "pequeñas" variaciones de dichos datos crean "pequeñas" variaciones en la solución.

Ejemplo 1.19. *Ejemplos de E.D.P.s:*

Ecuación del calor en dimensión 1: $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$

Ecuación de ondas en dimensión 1: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$

Ecuación de Monge-Ampere: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left|\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|^2 + F(x, u, \nabla u) = 0.$

Ecuación de Laplace: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

El concepto de solución clásica de una ecuación de orden k, requiere que la solución sea una función de clase C^k. Para ello es necesario que los datos del problema y la función F, que define la ecuación en derivadas parciales, presenten cierta regularidad. Cuando esta regularidad no se satisface, no existe solución clásica y es necesario introducir una nueva noción de solución. Volveremos sobre este concepto de solución, que llamamos solución débil, en los próximos capítulos. Estos aspectos de la ecuación, determinan el "marco funcional" donde se resuelve el problema, entendiendo la ecuación como una igualdad en un determinado espacio de funciones.

Otro punto importante que determina la existencia o no existencia de solución clásica es la regularidad de la frontera del dominio. Se detallan a continuación los aspectos relativos a dicha regularidad.

Dominio de clase C^k

Definición 1.20. *Sea N un número natural mayor o igual a 2. Decimos que un conjunto abierto $\Omega \subset I\!R^N$ es un* dominio de clase C^k*, si para todo punto $x \in \partial\Omega$ existe una bola de centro x y radio $\epsilon > 0$, que denotamos por $B_\epsilon(x) \subset I\!R^N$ y una función*

$$\phi : A := (-1,1)^N \to B_\epsilon(x)$$

tal que

1. $\phi(0) = x$;
2. ϕ *es biyectiva;*
3. $\phi \in C^k([-1,1]^N)$;
4. $\phi^{-1} \in C^k(\overline{B}_\epsilon(x))$;
5. $\phi(A_+) = \Omega \cap B_\epsilon(x)$, *donde* $A_+ := \{x \in (-1,1)^N, \quad x_N > 0\}$;
6. $\phi(A_0) = \partial\Omega \cap B_\epsilon(x)$, *donde* $A_0 := \{x \in (-1,1)^N, \quad x_N = 0\}$.

Si ϕ es una función lipschitziana decimos que Ω es un dominio lipschitziano.

Recordamos a continuación una de las fórmulas de integración que se utilizan con frecuencia en el texto.

Fórmula de integración de Green en dimensión N

Sea $\Omega \subset I\!R^N$ un conjunto abierto y con frontera C^1. Sean

$$g : \Omega \subset R^N \longrightarrow I\!R, \quad \vec{f} \; : \; \Omega \subset R^N \longrightarrow I\!R^N,$$

funciones continuas con derivadas continuas. Sea $\vec{n}$ el vector normal exterior unitario a $\partial\Omega$, entonces

$$\int_\Omega g \; div(\vec{f}\,)dx = \int_{\partial\Omega} g \; \vec{f}^{\,T} \cdot \vec{n} d\sigma - \int_\Omega [\nabla g]^T \cdot \vec{f} dx.$$

El caso en el que la función g es constante, la fórmula anterior recibe el nombre de fórmula de Gauss o teorema de la divergencia cuando $\Omega \subset I\!R^3$.

1.3 Clasificación de ecuaciones en derivadas parciales

Se presenta en esta sección la clasificación de ecuaciones en derivadas parciales, para ello, consideramos un número natural $N \geq 2$, un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y una función

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \ldots \mathbb{R}^{N^k} \to \mathbb{R}$$

conocida, que define la ecuación diferencial

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial u}{\partial x_N}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots \frac{\partial^j u}{\partial x_{i_1}^{j_1} \ldots \partial x_{i_j}^{j_N}}, \ldots \frac{\partial^k u}{\partial x_N^k}\right) = 0, \quad x \in \Omega.$$

El método de resolución de la ecuación, depende de la naturaleza de F. Para ello, clasificamos la ecuación considerando su orden, su linealidad y el tipo de nolinealidad:

- Por su orden.
  Decimos que una "ecuación en derivadas parciales" es de orden k, si el grado de derivación parcial más alto que aparece en la expresión es k.

- Por su linealidad.

  - Ecuaciones lineales: aquellas en las que la ecuación puede expresarse de la forma

    $$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x) \tag{1.2}$$

    donde a_α y f son funciones conocidas.

  - Ecuaciones no lineales: aquellas que no pueden expresarse de la forma (1.2).
    Las ecuaciones no lineales, se clasifican a su vez en los siguientes tipos:

    - Ecuaciones semilineales. Son aquellas ecuaciones no lineales que pueden expresarse de la forma:

      $$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) D^\alpha u + F(x, u, D\, u \ldots D^{|\alpha|-1} u) = 0.$$

      Es decir, el coeficiente del término de mayor orden solo depende de x.

    - Ecuaciones cuasilineales. Son aquellas ecuaciones no lineales que pueden expresarse de la forma:

      $$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x, u, D\, u \ldots D^{|\alpha|-1} u) D^\alpha u + F(x, u, D\, u \ldots D^{|\alpha|-1} u) = 0,$$

      donde a_α son funciones conocidas.

- Ecuaciones completamente no lineales. Si F es no lineal en la derivada de máximo orden.

– En cualquiera de los casos anteriores (lineal y no lineal), hablamos de ecuaciones homogeneas cuando el término independiente es cero.

Ejemplo 1.21. *La ecuación*

$$u_x + u_y = u + x^2 + y^2$$

es una ecuación de primer orden por ser las derivadas de primer orden las de máximo orden que aparecen en la ecuación. La ecuación es además lineal.

1.4 Ejercicios

1. En las siguientes ecuaciones "u" representa la función incógnita y "f" una función conocida. Se pide clasificar las siguientes ecuaciones diferenciales en función de su grado y linealidad.

   (a) $u_x + u_y = f$.

   (b) $u_x u_y = f$.

   (c) $-u_{xx} - u_{yy} = f$.

   (d) $u_t - u_{xx} = f$.

   (e) $u_{xyz} + u_z u_y = u$.

   (f) $u_x + u_y - u_{xzy} = u^2$.

   (g) $xu_y - yu_x = u$.

   Solución:

   (a) $u_x + u_y = f$. Ecuación lineal de primer orden.

   (b) $u_x u_y = f$. Ecuación no lineal de primer orden (completamente no lineal).

   (c) $-u_{xx} - u_{yy} = f$. Ecuación lineal de segundo orden.

   (d) $u_t - u_{xx} = f$. Ecuación lineal de segundo orden.

   (e) $u_{xyz} + u_z u_y = u$. Ecuación no lineal de tercer orden (semilineal).

   (f) $u_x + u_y - u_{xzy} = u^2$. Ecuación no lineal de tercer orden (semilineal).

   (g) $xu_y - yu_x = u$. Ecuación lineal de primer orden.

2. Sea $N \in I\!N$ y $x = (x_1, \cdots x_N) \in I\!R^N$, $x_0 = (x_{01}, \cdots x_{0N}) \in I\!R^N$ un dato conocido y sea u la función definida por
$$u(x) = \ln((x - x_0)^2 + 1).$$
Comprobar que la función u es una solución de la ecuación diferencial
$$(x - x_0)^T \cdot \nabla u = 2 - 2e^{-u}.$$
Solución: Calculamos ∇u y resulta
$$\nabla u = \frac{2(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + 1},$$
entonces
$$(x - x_0)^T \cdot \nabla u = \frac{2(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2 + 1} = 2 - \frac{2}{(x - x_0)^2 + 1} = 2 - 2e^{-\ln((x-x_0)^2+1)} = 2 - 2e^{-u}.$$

3. Sean $u, v \in C^k(I\!R)$ para $k \in I\!N$, denotamos por D la derivada respecto de la variable en la que están definidas las funciones u y v. Se pide demostrar que
$$D^k(uv) = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} (D^p u) D^{k-p} v.$$
Solución: Procedemos a comprobar la fórmula por inducción. Veamos en primer lugar que la fórmula es cierta para $k = 1$:
$$D(uv) = uDv + vDu.$$
Suponemos cierta la fórmula para el caso $k - 1$ y resulta
$$\begin{aligned}
D^k(uv) &= D[D^{k-1}(uv)] \\
&= D\left[\sum_{p=0}^{k-1} \binom{k-1}{p} (D^p u) D^{k-p-1} v\right] \\
&= \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k-1}{p} (D^p u) D^{k-p} v + \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k-1}{p} (D^{p+1} u) D^{k-p-1} v \\
&= \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k-1}{p} (D^p u) D^{k-p} v + \sum_{p=1}^{k} \binom{k-1}{p-1} (D^p u) D^{k-p} v \\
&= uD^k v + (D^k u) v + \sum_{p=1}^{k-1} \left(\binom{k-1}{p} + \binom{k-1}{p+1} \right) (D^p u) D^{k-p} v.
\end{aligned}$$

Por la propiedad de los números combinatorios

$$\binom{k-1}{p} + \binom{k-1}{p+1} = \binom{k}{p}$$

se obtiene

$$D^k(uv) = \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} (D^p u) D^{k-p} v.$$

4. Aplicar la definición de función par e impar para demostrar ls siguientes propiedades

   - El producto de dos funciones impares es una función par.
   - El producto de dos funciones pares es una función par.
   - El producto de una función par por una función impar es una función impar.
   - Sea f una función par y continua en $\mathbb{R}$. Entonces, $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ es una función impar.
   - Sea f una función impar y continua en $\mathbb{R}$. Entonces, $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ es una función par.
   - Sea f una función par, continua y con derivada continua en $\mathbb{R}$. Entonces, f' es una función impar.
   - Sea f una función impar, continua y con derivada continua en $\mathbb{R}$. Entonces, f' es una función par.

Solución:

- El producto de dos funciones impares es una función par.
  Sean f y g dos funciones impares, entonces

  $$f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x)$$

  que implica que fg es una función par.

- El producto de dos funciones pares es una función par.
  Sean f y g dos funciones pares, entonces

  $$f(-x)g(-x) = f(x)g(x)$$

  que implica que fg es una función par.

- El producto de una función par por una función impar es una función impar.
  Sean f una función par y g una función par, entonces

  $$f(-x)g(-x) = f(x)(-g(x)) = -f(x)g(x)$$

  que implica que fg es una función impar.

- Sea f una función par y continua en $I\!R$. Entonces $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ es una función impar.
  Introducimos el cambio de variable $s = -t$, para obtener

  $$\int_0^x f(s)ds = -\int_0^{-x} f(-t)dt$$

  por ser f una función par resulta que $f(-t) = f(t)$ y por tanto

  $$\int_0^x f(s)ds = -\int_0^{-x} f(t)dt.$$

  Deducimos que $F(x) = -F(-x)$.

- Sea f una función impar y continua en $I\!R$. Entonces $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ es una función par.
  Introducimos el cambio de variable $s = -t$, para obtener

  $$\int_0^x f(s)ds = -\int_0^{-x} f(-t)dt$$

  por ser f una función impar resulta que $f(-t) = -f(t)$ y por tanto

  $$\int_0^x f(s)ds = \int_0^{-x} f(t)dt.$$

  Deducimos que $F(x) = F(-x)$, es decir, F es una función par.

- Sea f una función par, continua y con derivada continua en $I\!R$. Entonces, f' es una función impar.
  Aplicamos la definición de derivada en $x \neq 0$, para obtener

  $$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\epsilon\to 0} \tfrac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(-x-\epsilon)-f(-x)}{\epsilon} \\ &= -\lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(-x-\epsilon)-f(-x)}{-\epsilon} \\ &= -f'(-x), \end{aligned}$$

  que prueba que f' es impar.

- Sea f una función impar, continua y con derivada continua en $I\!R$. Entonces, f' es una función par.
  Aplicamos la definición de derivada en $x \neq 0$, para obtener
  $$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\epsilon\to 0} \tfrac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} \\ &= -\lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(-x-\epsilon)-f(-x)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(-x-\epsilon)-f(-x)}{-\epsilon} \\ &= f'(-x), \end{aligned}$$
  que prueba que f' es par.

5. Sea $f : (-L, L) \to I\!R$ demostrar que f puede expresarse como suma de dos funciones, una par y una impar.
   Solución:
   $$f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right).$$
   La función $\frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right)$ es una función par, ya que
   $$\frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) = \frac{1}{2}\left(f(-x) + f(x)\right).$$
   De igual modo se comprueba que
   $$\frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) = -\frac{1}{2}\left(f(-x) - f(x)\right)$$
   que demuestra que $\frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$ es una función impar.

6. Estudiar cuales de los siguientes conjuntos abiertos son C^1:
   - $\Omega_1 := \{(x, y) \in I\!R^2, \quad |x| + |y| < 1\}$.
   - $\Omega_2 := \{(x, y, z) \in I\!R^3, \quad x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.
   - $\Omega_3 := \{(x, y) \in I\!R^, \quad x > 0, \quad y > 1/x\}$.

   Solución:
   - $\Omega_1 := \{(x, y) \in I\!R^2, \quad |x| + |y| < 1\}$. No es C^1.
   - $\Omega_2 := \{(x, y, z) \in I\!R^3, \quad x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$. Si es C^1.
   - $\Omega_3 := \{(x, y) \in I\!R^2, \quad x > 0, \quad y > 1/x\}$. Si es C^1.

7. Estudiar si $\Omega = \{(x, y) \in I\!R^2,$ tales que $y > |x|^{\frac{1}{2}}\}$ es un dominio lipschitziano.
   Solución: No es un dominio lipschitziano, por no serlo en el punto $(0, 0)$.

8. Aplicar el cambio de variable $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\theta$ a la ecuación

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ (x,y) \in I\!R^2.$$

Solución:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$