

Índice

Notación

Prologo

1	Preliminares	1
1.1	Introducción	1
1.2	Conceptos básicos	2
1.3	Clasificación de ecuaciones en derivadas parciales	7
1.4	Ejercicios	8
2	Ecuaciones de primer orden	15
2.1	Conceptos generales	15
2.2	Ecuaciones lineales	17
2.3	Ecuaciones semilineales y cuasilineales	24
2.4	Ecuaciones completamente no lineales	29
2.5	Teorema de Cauchy-Kowalevsky o Cauchy-Kowalevskaya	40
2.6	Ejercicios	41
3	Conceptos del análisis funcional	43
3.1	Prerrequisitos	43
3.2	Espacios topológicos, métricos, de Banach y de Hilbert	45
3.3	Integral de Lebesgue y espacios L^p	60
3.3.1	Espacios de medida. Medida exterior	60
3.3.2	Medida de Lebesgue en \mathbb{R}^N	65
3.3.3	Función medible	66
3.3.4	Teorema de la convergencia monótona y de la convergencia dominada	72
3.3.5	Lema de Fatou	74

3.3.6	Teorema de Egorov	74
3.3.7	Definición de espacios $L^p(\Omega)$ y sus propiedades	75
3.4	Bases de un espacio de Hilbert	85
3.5	Aplicaciones lineales	92
3.6	Operadores compactos	94
3.7	Espacios de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, $W_0^{m,p}(\Omega)$	104
3.7.1	Definición	104
3.7.2	Desigualdad de Poincaré	105
3.7.3	Desigualdad de Poincaré-Wirtinger	106
3.7.4	Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg	106
3.7.5	Desigualdad de Jensen	106
3.7.6	Lema de Gronwall	107
3.7.7	Inclusiones de Sobolev. Teorema de Rellich-Kondrachov	108
3.7.8	Espacio Dual. Teorema de representación de Riesz. Convergencia débil	110
3.7.9	Lema de Aubin-Lions	114
3.8	Semicontinuidad	114
3.9	Distribuciones	118
4	Problemas de Sturm-Liouville	121
4.1	Introducción	121
4.2	Definición y propiedades	122
4.3	Formulación débil del problema de Sturm-Liouville	135
4.4	Forma normal del problema de Sturm-Liouville	140
4.5	Autovalores del problema de Sturm-Liouville	143
4.6	Ecuación de Legendre. Polinomios de Legendre	154
4.7	Ecuación de Bessel. Funciones de Bessel	155
4.8	Función de Green para el problema de Sturm-Liouville	156
4.9	Teorema de la alternativa de Fredholm aplicado a la ecuación de Sturm-Liouville	161
4.10	Ejercicios	163
5	Series de Fourier	165
5.1	Introducción	165
5.2	Definición y propiedades	166
5.3	Desigualdad de Bessel	168
5.4	Identidad de Parseval	170
5.5	Lema de Riemann-Lebesgue	172
5.6	Completitud del sistema de autofunciones del problema de Sturm-Liouville	174
5.7	Series trigonométricas	182

ÍNDICE

5.8	Fenómeno de Gibbs	195
5.9	Ejercicios	200
6	Clasificación de ecuaciones de segundo orden	209
6.1	Clasificación de ecuaciones de segundo orden	209
6.2	Ejercicios	211
7	Ecuaciones de tipo elíptico	213
7.1	Introducción	213
7.2	Formulación débil de problemas elípticos lineales	216
7.3	Unicidad de soluciones	219
7.4	Principio de superposición	222
7.5	Principio débil del máximo	224
7.6	Existencia de soluciones. Teorema de Lax-Milgram	227
7.7	Autovalores y autofunciones de problemas elípticos	234
7.8	Método de separación de variables	238
7.9	Funciones de Green	255
7.10	Principio fuerte del máximo	260
7.11	Existencia de soluciones. Método de Perron	263
8	Ecuaciones parabólicas	271
8.1	Modelización de la ecuación del calor	271
8.2	Método de separación de variables	274
8.3	Unicidad de soluciones	279
8.4	Principio de superposición para la ecuación del calor	281
8.5	Principio del máximo para ecuaciones parabólicas	282
8.6	Existencia de soluciones. Método de Galerkin	285
9	La ecuación de ondas	293
9.1	Modelización de la ecuación de ondas en dimensión 1	293
9.2	Fórmula de D'Alembert	296
9.3	Principio de superposición	298
9.4	Método de separación de variables	299
9.5	Existencia y unicidad de soluciones	305
10	Transformada de Fourier	309
10.1	Introducción	309
10.2	Definición y propiedades	310
10.3	Transformada de Fourier aplicada a la ecuación del calor	312

10.4 Transformada de Fourier aplicada a la ecuación de ondas	313
10.5 La transformada de Fourier N -dimensional	314
Apéndice I. Conceptos de análisis de varias variables	317
Apéndice II. Resultados de ecuaciones diferenciales ordinarias	323
Apéndice III. Regularidad de las soluciones de problemas elípticos	331
Bibliografía	335
Glosario	337