CAPÍTULO I

Espacios Afines

En este primer capítulo definiremos los objetos con los que trabaja la geometría afín, los espacios afines. Entenderemos cómo referirnos a cada elemento de estos espacios, los puntos, respecto a diferentes sistemas de referencia, y estudiaremos sus subespacios y las ecuaciones que los definen.

1. El espacio afín

La motivación para definir el espacio afín es poder ver los elementos de un espacio vectorial V como puntos, y entender los vectores de V como vectores que unen estos puntos, sin que estén necesariamente anclados en el origen de coordenadas.

Sea $V := \mathbb{R}^2$ visto como espacio vectorial, cuyos elementos son vectores $\overrightarrow{v}$, que llamaremos *vectores libres*. Por otra parte, sea $A := \mathbb{R}^2$ visto como conjunto cuyos elementos son puntos de coordenadas cartesianas (x, y). Para cada par de puntos $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2) \in A$, definimos el *vector fijo* que los une como el que vector cuyas componentes son las diferencias de las coordenadas de los puntos, es decir,

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Un vector libre es, por tanto, una clase de equivalencia de vectores fijos con las mismas componentes:

$$\overrightarrow{v} = [\overrightarrow{PQ}].$$

Dado un punto $P = (x, y) \in A$ y un vector $\overrightarrow{v} = (a, b) \in V$, sea $Q \in A$ el único punto de $\mathbb{R}^2$ donde termina el trasladado del vector $\overrightarrow{v}$ con origen en P. Esta operación define la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \vartheta : & A \times V & \longrightarrow & A \\ & (P, \overrightarrow{v}) & \longmapsto & \vartheta(P, \overrightarrow{v}) := \quad P + \overrightarrow{v} = Q \end{array}$$

con las siguientes propiedades:

(i) Para cualesquiera $P, Q \in A$ existe $\overrightarrow{v} \in V$ tal que $P + \overrightarrow{v} = Q$.
(ii) Para cada $P \in A$ y cada $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$ se tiene que $(P+\overrightarrow{u})+\overrightarrow{v} = P+(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})$.

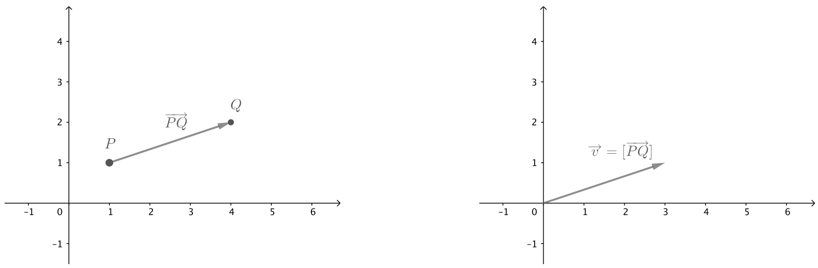

FIGURA I.1. Vector fijo y su vector libre asociado.

Este ejemplo en el plano motiva la definición general de espacio afín, como un espacio A modelado en un espacio vectorial V, donde los vectores de V unen puntos de A.

DEFINICIÓN I.1

Sean A un conjunto y V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Un *espacio afín* es una terna (A, V, α), donde

$$\begin{array}{rccl} \alpha: & A \times A & \longrightarrow & V \\ & (P,Q) & \longmapsto & \alpha(P,Q) := [\overrightarrow{PQ}] = \overrightarrow{v} \end{array}$$

cumple las siguientes propiedades:

(i) Para cada $P \in A$, la función

$$\begin{array}{rccl} \alpha_P: & A & \longrightarrow & V \\ & Q & \longmapsto & \alpha_P(Q) := \alpha(P,Q) = [\overrightarrow{PQ}] \end{array}$$

es biyectiva.

(ii) α es asociativa en A, es decir, para cualesquiera $P, Q, R \in A$,

$$\alpha(P,Q) + \alpha(Q,R) = \alpha(P,R)$$

o, equivalentemente,

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$

Diremos que el espacio vectorial V es la *dirección* del espacio afín (A, V, α).

Observación I.2

En general nos referiremos al espacio afín (A, V, α) simplemente por A, sobreentendiendo el resto de la estructura dada por V y α, o haciendo mención a ellas cuando sea necesario.

Observación I.3

Es equivalente definir la aplicación de un espacio afín en la Definición I.1 como

$$\begin{array}{rccl} \vartheta: & A \times V & \longrightarrow & A \\ & (P, \overrightarrow{v}) & \longmapsto & \vartheta(P, \overrightarrow{v}) := \quad P + \overrightarrow{v} \end{array}$$

verificando las dos propiedades anteriormente mencionadas en $\mathbb{R}^2$.

Proposición I.4. *La aplicación α de la Definición I.1 de espacio afín verifica las siguientes propiedades:*

(1) $\overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$.
(2) $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{0}$ *si y solo si* $P = Q$.
(3) $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$.
(4) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ *si y solo si* $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$ *(Ley del paralelogramo).*
(5) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \mathbf{0}$.

Demostración.

(1) Por la propiedad (ii), $\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP}$, por lo que $\overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$.
(2) Por la propiedad (i), dados P y $\overrightarrow{v} = \mathbf{0}$, existe un único Q tal que $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{0}$. Pero (1) garantiza que P también verifica $\overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$ y, por tanto, $P = Q$.
(3) Aplicando la propiedad (ii), $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$, por lo que $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$.
(4) Si $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, entonces

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} - \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{QS}.$$

El recíproco se obtiene intercambiando los papeles de Q y R.
(5) Inmediata a partir de (ii) y (3).

$\square$

Definición I.5

Dado un espacio afín A con dirección V se define la *dimensión* de A como la dimensión de V.

Ejemplo I.6

Podemos interpretar un espacio vectorial V como un espacio afín con su estructura afín estándar, denotado por (V, V, α). El primer elemento de la terna es V donde cada elemento es visto como un punto, y el segundo es V como espacio vectorial con sus elementos vistos como vectores. La aplicación α viene dada por

$$\alpha(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{\overrightarrow{v}\overrightarrow{w}} = \overrightarrow{w} - \overrightarrow{v}.$$

Nótese que, en general, no está definida la suma (ni la resta) de puntos en un espacio afín. Sin embargo, en una estructura de espacio afín estándar de un espacio vectorial, podemos entender la resta de puntos como la resta de los correspondientes vectores.

Notación I.7

Dado un espacio vectorial V de dimensión n sobre $\mathbb{K}$, denotamos al espacio afín con la estructura de espacio afín inducida por V por $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

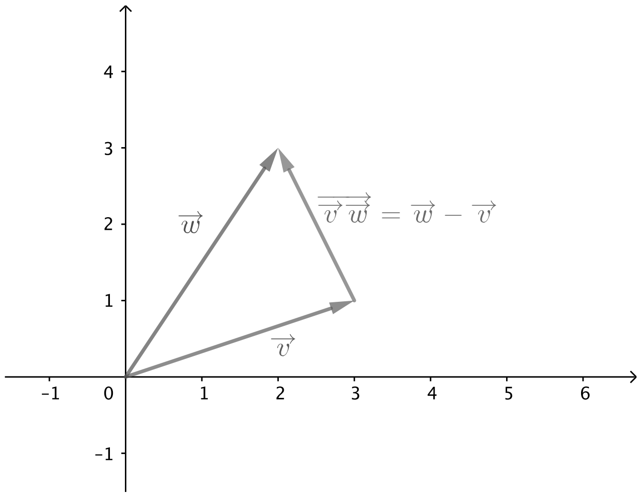

Figura I.2. Suma de vectores en $\mathbb{R}^2$ con su estructura afín estándar $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ inducida.

EJEMPLO I.8

(a) Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio de polinomios en una variable con coeficientes reales de grado $\leqslant 2$. Este espacio vectorial, como se conoce de álgebra lineal, es isomorfo a $\mathbb{R}^3$. La aplicación

$$\alpha(a_2X^2 + a_1X + a_0, b_2X^2 + b_1X + b_0) = (b_2 - a_2, b_1 - a_1, b_0 - a_0) \in \mathbb{R}^3$$

define una estructura de espacio afín en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(b) Sea $A = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y $\mathbb{R}$ el espacio vectorial real de dimensión 1. La aplicación

$$\alpha(x, y) = \tan(y) - \tan(x)$$

define una estructura de espacio afín en A. En efecto, dado un punto $x \in A$, hay una biyección entre los puntos $y \in A$ y los valores reales $\tan(y) - \tan(x)$, con inversa el arco tangente. Y es claro que

$$\alpha(x, y) + \alpha(y, z) = \big(\tan(y) - \tan(x)\big) + \big(\tan(z) - \tan(y)\big) =$$
$$\tan(z) - \tan(x) = \alpha(x, z).$$

(c) Sea la recta $L = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} : x + y - 1 = 0\}$ de puntos de $\mathbb{R}^2$. Sean $P = (x, 1 - x)$, $Q = (x', 1 - x')$, puntos de L. La aplicación

$$\alpha(P, Q) = \alpha\big((x, 1 - x), (x', 1 - x')\big) = x' - x$$

define una estructura de espacio afín en L, con espacio vectorial asociado $\mathbb{R}$.

2. Referencias y coordenadas

Cuando se estudian los espacios vectoriales abstractos de dimensión finita n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ se utilizan bases y coordenadas respecto de esas bases para establecer isomorfismos entre dicho espacio y el correspondiente $\mathbb{K}^n$. Con los espacios afines ocurrirá lo mismo: definiremos referencias y coordenadas respecto de las mismas, que nos harán entender cada espacio afín en términos de un modelo estándar $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

2.1. Referencias y coordenadas cartesianas

Como hemos visto en la definición de espacio afín, cualquier punto Q de A se puede obtener a partir de otro punto $P \in A$ y la suma de un vector $\overrightarrow{v} \in V$. Este vector $\overrightarrow{v}$ puede expresarse en coordenadas de una base de V, por lo que a partir de un punto y una base de V podemos describir todo el espacio afín A. Esto es lo que consiguen las referencias cartesianas.

Definición I.9

Una *referencia cartesiana* de un espacio afín (A, V, α) de dimensión n es $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$, donde $O \in A$ es un punto, y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V.

Notación I.10

En el espacio afín estándar $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, la referencia $\mathcal{R}_{c,e} := \big\{\overline{0} := (0, \ldots, 0); \mathcal{B}_e)\big\}$, donde $\overline{0} := (0, \ldots, 0)$ es el origen (visto como punto), y $\mathcal{B}_e$ es la base canónica o estándar de $\mathbb{K}^n$,

$$\mathcal{B}_e = \{e_1, \ldots, e_n\} = \big\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\big\}$$

se denomina *referencia cartesiana estándar*.

Definición I.11

Dado $P \in A$, sus *coordenadas cartesianas* con respecto a una referencia cartesiana $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ son las coordenadas $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ del vector $\overrightarrow{OP}$ respecto a la base $\mathcal{B}$.

Ejemplo I.12

Consideremos el espacio afín estándar real 2-dimensional $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ y la referencia cartesiana

$$\mathcal{R}_c = \big\{(2, 1); \{(1, 1), (-1, 1)\}\big\}.$$

Obsérvese que $\mathcal{B} = \big\{(1, 1), (-1, 1)\big\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. El punto $P = (2, -1) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ tiene coordenadas cartesianas $(x_1, x_2) = (-1, -1)$ respecto de la referencia $\mathcal{R}_c$, ya que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{(2, 1)(2, -1)} = (0, -2) = (-1) \cdot (1, 1) + (-1) \cdot (-1, 1).$$

Ejemplo I.13

Si tomamos la referencia cartesiana estándar $\mathcal{R}_{c,e}$ del espacio afín estándar real 3-dimensional $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, las coordenadas de un punto $P = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ respecto de $\mathcal{R}_{c,e}$ son los mismos escalares (x_1, x_2, x_3) que definen el punto P.

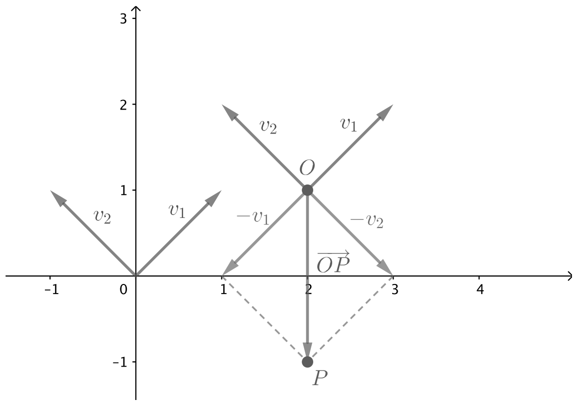

FIGURA I.3. Coordenadas cartesianas del Ejemplo I.12.

PROPOSICIÓN I.14. *Sean $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ y $\mathcal{R}'_c = \{O'; \mathcal{B}'\}$ dos referencias cartesianas en un espacio afín A. Sea $P \in A$ un punto con coordenadas $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ respecto de $\mathcal{R}_c$ y coordenadas $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ respecto de $\mathcal{R}'_c$. Si $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ son las coordenadas cartesianas de O respecto de $\mathcal{R}'_c$, el* cambio de coordenadas *entre $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ viene dado por*

$$\boldsymbol{y}^t = \boldsymbol{a}^t + C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot \boldsymbol{x}^t,$$

donde $C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ es la matriz de cambio de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$ en V.

DEMOSTRACIÓN. Se verifica que existen vectores $\vec{v}, \vec{v}\,' \in V$ tales que

$$P = O + \vec{v} = O' + \vec{v}\,'.$$

Por tanto, se tiene que

$$\vec{v}\,' = \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'O} + \vec{v}.$$

Respecto de la base $\mathcal{B}'$, las coordenadas de $\vec{v}\,'$ son $\boldsymbol{y}$, las de $\overrightarrow{O'O}$ son $\boldsymbol{a}$ y las de $\vec{v}$ vienen dadas por el vector traspuesto de $C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot \boldsymbol{x}^t$, de lo cual se sigue la expresión del cambio de coordenadas. La unicidad se sigue de la unicidad de las coordenadas de un vector respecto de una base. $\square$

El cambio de coordenadas cartesianas de la anterior proposición se puede expresar de forma más compacta como

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{y}^t \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \boldsymbol{a}^t & C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{x}^t \end{pmatrix}$$

donde la matriz que relaciona ambos vectores

$$C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c} := \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \boldsymbol{a}^t & C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \end{array}\right)$$

es la *matriz de cambio de referencia cartesiana* de $\mathcal{R}_c$ a $\mathcal{R}'_c$.

Observación I.15

La matriz de cambio de referencia cartesiana verifica las siguientes propiedades:

(a) Si $O = O'$, entonces $\boldsymbol{a} = (0, \dots, 0)$, y la matriz de cambio de referencia cartesiana recoge solo el cambio de base en V:

$$C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \end{array}\right).$$

(b) Si $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, entonces $C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = I_n$, la matriz identidad, y la matriz de cambio de referencia cartesiana recoge solo la traslación de O a O':

$$C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \boldsymbol{a}^t & I_n \end{array}\right).$$

(c) La matriz de cambio de referencia cartesiana $C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c}$ es invertible, ya que su determinante es igual al determinante de $C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, que es distinto de cero.

(d) La inversa de la matriz de cambio de referencia cartesiana $C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c}$ es

$$\left(C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c}\right)^{-1} = C_{\mathcal{R}'_c\mathcal{R}_c}$$

la matriz del cambio de referencia cartesiana inverso, al igual que sucede en el caso vectorial.

Ejemplo I.16

Tomemos la referencia cartesiana del Ejemplo I.12

$$\mathcal{R}_c = \{(2,1); \{(1,1), (-1,1)\}\}$$

y el punto $P = (2,-1) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ con coordenadas cartesianas $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) = (-1,-1)$. Consideremos la referencia cartesiana estándar en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$

$$\mathcal{R}_{c,e} = \{(0,0); \{(1,0), (0,1)\}\}.$$

La matriz de cambio de referencia de la referencia cartesiana $\mathcal{R}_c$ a la referencia cartesiana estándar $\mathcal{R}_{c,e}$ viene dada por

$$C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}_{c,e}} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

donde se observa que la matriz de cambio de base $C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_e}$ tiene por columnas los vectores de la base $\mathcal{B}$ expresados en la base canónica. Por tanto, las coordenadas cartesianas $\boldsymbol{y}$ de P en la referencia cartesiana estándar $\mathcal{R}_{c,e}$

vendrán dadas como

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{y}^t \end{pmatrix} = C_{\mathcal{R}_c \mathcal{R}_{c,e}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{x}^t \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \hline -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \hline 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

con lo cual las coordenadas de P en la referencia cartesiana estándar son $(2, -1)$, exactamente como esperábamos.

2.2. Referencias afines

Para introducir las coordenadas baricéntricas, tendremos que hablar de referencias afines. Las referencias afines son genuinas del espacio afín, ya que en ellas solo intervienen puntos y no vectores. Al igual que una base en un espacio vectorial, un conjunto de puntos será una referencia afín si cualquier punto se puede expresar de forma única respecto de esos puntos referentes. El poderse expresar nos llevará a la existencia de una combinación afín y la idea de afínmente generador, mientras que la unicidad se corresponderá con la independencia afín.

Definición I.17

Dados puntos $P_0, P_1, \ldots, P_r \in A$ y escalares $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, con $\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$, definimos *combinación afín* como la suma formal

$$P = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \cdot P_i := P_0 + \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \overrightarrow{P_0 P_i} \in A.$$

Se dice que P es *combinación afín de los puntos* $P_0, P_1, \ldots, P_r$.

Observación I.18

Recordemos que la suma de puntos no estaba definida en A, por eso recurrimos en la definición a la suma de los vectores de V correspondientes. Sin embargo, desde ahora daremos sentido a la suma de puntos de un espacio afín como la suma formal de la Definición I.17, donde $(1-\lambda)P + \lambda Q := P + \lambda\overrightarrow{PQ}$. De igual modo interpretaremos la resta formal $Q - P := \overrightarrow{PQ}$ como el vector que une dichos puntos.

Lema I.19. *Una combinación afín está bien definida, es decir, la Definición I.17 no depende del punto P_0 que tomemos.*

Demostración. En efecto, tomando $P_i \neq P_j$, tenemos

$$P_i + \sum_{k=0}^{r} \lambda_k \overrightarrow{P_iP_k} = P_i + \sum_{k=0}^{r} \lambda_k \left(\overrightarrow{P_iP_j} + \overrightarrow{P_jP_k} \right) =$$

$$P_i + \left(\sum_{k=0}^{r} \lambda_k \right) \overrightarrow{P_iP_j} + \left(\sum_{k=0}^{r} \lambda_k \overrightarrow{P_jP_k} \right) =$$

$$P_i + \overrightarrow{P_iP_j} + \sum_{k=0}^{r} \lambda_k \overrightarrow{P_jP_k} = P_j + \sum_{k=0}^{r} \lambda_k \overrightarrow{P_jP_k}$$

usando que $\sum_{k=0}^{r} \lambda_k = 1$. □

Definición I.20

Los puntos $P_0, P_1, \ldots, P_r \in A$ son *afínmente dependientes* si existe algún P_i tal que es combinación afín de los restantes puntos. En caso contrario diremos que son *afínmente independientes*.

Proposición I.21. *Son equivalentes:*

(1) *$P_0, P_1, \ldots, P_r \in A$ son afínmente independientes.*
(2) *Para todo P_i, los vectores $\overrightarrow{P_iP_j}$, con $j \neq i$, son linealmente independientes.*
(3) *Existe un punto P_i tal que los vectores $\overrightarrow{P_iP_j}$, con $j \neq i$, son linealmente independientes.*

Demostración.

- (1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que los puntos $P_0, P_1, \ldots, P_r$ son afínmente independientes y que existe un punto P_i tal que los vectores

$$\overrightarrow{P_iP_0}, \overrightarrow{P_iP_1}, \ldots, \overrightarrow{P_iP_{i-1}}, \overrightarrow{P_iP_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{P_iP_r}$$

son linealmente dependientes y, por tanto, que existe $j \neq i$ tal que

$$\overrightarrow{P_iP_j} = \sum_{k \neq i,j} \lambda_k \overrightarrow{P_iP_k}$$

De esto se deduce

$$P_j = P_i + \overrightarrow{P_iP_j} = P_i + \sum_{k \neq i,j} \lambda_k \overrightarrow{P_iP_k} =$$

$$P_i - \sum_{k\neq i,j} \lambda_k P_i + \sum_{k\neq i,j} \lambda_k P_k = (1 - \sum_{k\neq i,j} \lambda_k) P_i + \sum_{k\neq i,j} \lambda_k P_k,$$

que es una combinación afín que expresa P_j en función de los restantes puntos, ya que los escalares suman 1. Por tanto los puntos $P_0, P_i, \ldots, P_r$ serían afínmente dependientes, lo cual contradice la hipótesis. Concluimos que los vectores del enunciado son linealmente independientes.

- (2) $\Rightarrow$ (3) Inmediata.
- (3) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que los vectores $\overrightarrow{P_iP_j}$, con $j \neq i$, son linealmente independientes y, por reducción al absurdo, que los puntos $P_0, P_1, \ldots, P_r \in A$ son afínmente dependientes. Existe una combinación afín de la forma

$$P_k = \sum_{j\neq k} \lambda_j P_j$$

con $\sum\limits_{j\neq k} \lambda_j = 1$. Entonces, por definición de combinación afín,

$$P_k = P_i + \sum_{j\neq k} \lambda_j \overrightarrow{P_iP_j}$$

luego

$$\overrightarrow{P_iP_k} = \sum_{j\neq k} \lambda_j \overrightarrow{P_iP_j} \ ,$$

que es una combinación lineal de vectores con escalares no todos nulos (ya que suman 1). Por tanto, $\overrightarrow{P_iP_k}$ depende linealmente del resto de vectores, en contradicción con la hipótesis. Por consiguiente, $P_0, P_1, \ldots, P_r$ son afínmente independientes.

□

Definición I.22

Los puntos $P_0, P_1, \ldots, P_r \in A$ son *afínmente generadores de A* si, para todo $P \in A$, P es combinación afín de $P_0, P_1, \ldots, P_r$.

Proposición I.23. *Son equivalentes:*

(1) *$P_0, P_1, \ldots, P_r \in A$ son afínmente generadores de A.*

(2) *Para todo P_i, los vectores $\overrightarrow{P_iP_j}$, con $j \neq i$, generan V como espacio vectorial.*

(3) *Existe un punto P_i tal que los vectores $\overrightarrow{P_iP_j}$, con $j \neq i$, generan V como espacio vectorial.*

Demostración.

- (1) $\Rightarrow$ (2) Elegimos un punto P_i y un vector $\overrightarrow{v} \in A$. Sea $Q := P_i + \overrightarrow{v}$. Como los puntos $P_0, P_1, \ldots, P_r \in A$ son afínmente generadores de A, existen escalares $\lambda_0, \ldots, \lambda_r$, con $\sum_{j=0}^{r} \lambda_j = 1$ tales que
$$Q = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j P_j = P_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j \overrightarrow{P_i P_j}$$
por lo que se tiene
$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{P_i Q} = \sum_{j \neq i} \lambda_j \overrightarrow{P_i P_j}$$
y la colección de vectores $\overrightarrow{P_i P_j}$, con $j \neq i$, es generadora de V.
- (2) $\Rightarrow$ (3) Inmediata.
- (3) $\Rightarrow$ (1) Sea P_i tal que los vectores $\overrightarrow{P_i P_j}$, con $j \neq i$, generan V, y sea un punto $Q \in A$. Por hipótesis, el vector $\overrightarrow{v} := \overrightarrow{P_i Q}$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{P_i P_j}$ y, por tanto,
$$\overrightarrow{v} := \overrightarrow{P_i Q} = \sum_{j \neq i} \lambda_j \overrightarrow{P_i P_j}.$$
Definiendo $\lambda_i := 1 - \sum_{j \neq i} \lambda_j$ tenemos que
$$Q = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j P_j$$
y los puntos $P_0, P_1, \ldots, P_r \in A$ son afínmente generadores de A.

□

Definición I.24

Los puntos $P_0, P_1, \ldots, P_r \in A$ son una *referencia afín de* A si son afínmente generadores de A y afínmente independientes.

Proposición I.25. *Son equivalentes:*

(1) $P_0, P_1, \ldots, P_r \in A$ *son referencia afín de* A.
(2) *Para todo* P_i*, los vectores* $\overrightarrow{P_i P_j}$*, con* $j \neq i$*, son base de* V.
(3) *Existe un punto* P_i *tal que los vectores* $\overrightarrow{P_i P_j}$*, con* $j \neq i$*, son base de* V.

Demostración. Combina las Proposiciones I.21 y I.23. □

Corolario I.26. *Sea A un espacio afín de dimensión n y sean puntos $P_0, P_1, \ldots, P_r \in A$.*

(1) *Si $P_0, P_1, \ldots, P_r \in A$ son afínmente independientes $\Rightarrow\ r \leqslant n$.*

(2) *Si $P_0, P_1, \ldots, P_r \in A$ son afínmente generadores de $A \Rightarrow\ r \geqslant n$.*

(3) *Si $P_0, P_1, \ldots, P_r \in A$ son referencia afín de $A \Rightarrow\ r = n$.*

Demostración. Inmediata a partir de las Proposiciones I.21, I.23 y I.25, y el hecho de que, para un espacio vectorial de dimensión n, un conjunto generador tiene al menos n vectores, así como un conjunto linealmente independiente tiene como máximo n vectores, siendo n exactamente el número de vectores de una base. □

Del Corolario I.26 se deduce que para generar un espacio afín n-dimensional necesitamos al menos $n+1$ puntos. Asimismo, $n+1$ será el máximo número de puntos afínmente independientes. Cuando tengamos ambas propiedades hablaremos de referencias afines. Por ejemplo, las referencias afines de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ constan de 3 puntos y, las de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$ de 4 puntos.

De este modo tenemos una correspondencia entre referencias cartesianas y afines donde, dada una referencia cartesiana

$$\mathcal{R}_c = \left\{O; \mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}\right\}$$

le asociamos la referencia afín

$$\mathcal{R}_a = \left\{P_0 = O, P_1 = O + \overrightarrow{v_1}, \ldots, P_n = O + \overrightarrow{v_n}\right\}$$

y viceversa.

Notación I.27

Dado el espacio afín estándar $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, la referencia afín

$$\mathcal{R}_{a,e} = \left\{\overline{0} := (0, \ldots, 0); \{\overline{0} + e_1, \ldots, \overline{0} + e_n\}\right\} =$$
$$\left\{(0, \ldots, 0); \{(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}\right\},$$

donde e_i son los vectores de la base canónica de $\mathbb{K}^n$, se denomina *referencia afín estándar*.

2.3. Coordenadas baricéntricas

Dada una referencia afín $\mathcal{R}_a = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$, por la Proposición I.25,

$$\mathcal{R}_c = \left\{P_0; \left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\right\}\right\}$$

es una referencia cartesiana. Entonces, dado $P \in A$, existen únicos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$P = P_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}.$$

Definiendo $\lambda_0 := 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, los escalares $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ son los únicos que expresan P como combinación afín de los puntos de la referencia afín $\mathcal{R}_a$:

$$P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i.$$

Definición I.28

Dada una referencia afín $\mathcal{R}_a = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$, los únicos escalares $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i$ se llaman *coordenadas baricéntricas* de P respecto de la referencia $\mathcal{R}_a$.

Observación I.29

El baricentro de los puntos $P_0, P_1, \ldots, P_n \in A$ con pesos $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ representa el centro de gravedad de un sistema de masas de valor λ_i situadas en los puntos P_i. Se define analíticamente como el punto $B \in A$ tal que

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{BP_i} = 0.$$

Supongamos que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$; si no, siempre podemos reescalar todos los pesos para que esto ocurra. Usando las propiedades de puntos y vectores:

$$\mathbf{0} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{BP_i} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (\overrightarrow{P_0P_i} - \overrightarrow{P_0B}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i} - \overrightarrow{P_0B}\ ,$$

por tanto

$$\overrightarrow{P_0B} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}$$

que es equivalente a

$$B = P_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}.$$

Es decir, las coordenadas baricéntricas del baricentro B (y de ahí toman su nombre) son los valores de las masas que situamos en los puntos P_i, de las cuales B es su centro de gravedad (véase Figura I.4).

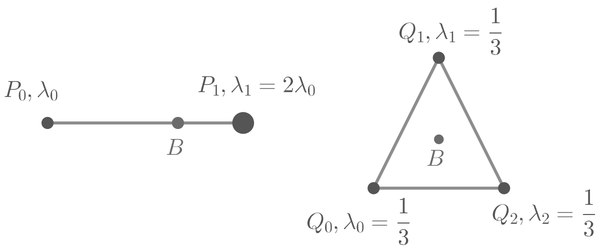

FIGURA I.4. Ejemplos de baricentros de puntos con pesos.

LEMA I.30. *Dada una referencia afín* $\mathcal{R}_a = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$, *el baricentro* B *de los puntos de la referencia (con masas iguales en cada punto) es el único punto* $B \in A$ *con coordenadas baricéntricas* $\lambda_i = \frac{1}{n+1}$ *para todo* i.

DEMOSTRACIÓN. Es inmediato a partir de la Observación I.29, simplemente reescalando los pesos para que verifiquen $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$. □

EJEMPLO I.31

Las coordenadas baricéntricas expresan cómo de cerca está un punto de cada uno de los puntos de una referencia afín. Dicho de otro modo, cada λ_i se puede entender como la fracción de la contribución de P_i al definir P en una combinación afín. De ello se desprenden las siguientes propiedades (véase Figuras I.5 y I.6):

(a) Si $\lambda_i \geqslant 0$ para todo i, entonces P pertenece al interior de la envolvente convexa de los puntos P_i. En este caso se dice que P es *combinación convexa* de los puntos P_i.

(b) Si algún λ_i es negativo, entonces el punto P se sitúa más allá de la envolvente convexa de los puntos $P_j, j \neq i$, en la región opuesta al punto o puntos cuyos escalares λ_j son negativos.

(c) Si algún $\lambda_i = 0$, P se puede escribir como combinación afín de sólo los restantes puntos P_j, $j \neq i$. Si todos los $\lambda_j \geqslant 0$, $j \neq i$, P pertenece a una de las caras de la envolvente convexa, la opuesta al punto P_i.

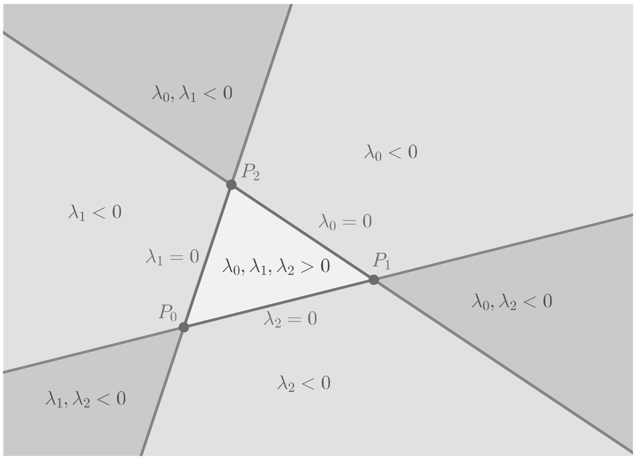

FIGURA I.5. Coordenadas baricéntricas respecto a una referencia afín en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

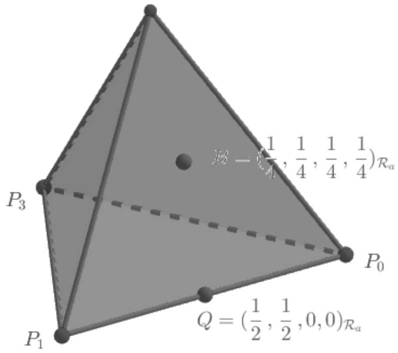

FIGURA I.6. Referencia afín en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ y coordenadas baricéntricas del baricentro B y de un punto Q situado en una arista del tetraedro.

Dadas una referencia cartesiana $\mathcal{R}_c$ y su referencia afín asociada $\mathcal{R}_a$, sean $\boldsymbol{\lambda}' = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sus coordenadas cartesianas respecto de $\mathcal{R}_c$ y $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$, con $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i$, sus coordenadas baricéntricas respecto de $\mathcal{R}_a$. La relación entre ambos vectores viene dada por

$$\boldsymbol{\lambda}^t = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & I_n & \\ 0 & & & \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\lambda}'^t \end{pmatrix}.$$

Denotamos a la matriz que relaciona ambos vectores por

$$M_n := \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & I_n & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Sean dos referencias afines $\mathcal{R}_a = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ y $\mathcal{R}'_a = \{Q_0, Q_1, \ldots, Q_n\}$, y un punto $P \in A$ con coordenadas $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ respecto de $\mathcal{R}_a$, y coordenadas $\boldsymbol{\mu} = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n)$ respecto de $\mathcal{R}'_a$. Cada uno de los puntos P_j de la referencia $\mathcal{R}_a$ lo podemos escribir de forma única como combinación afín de la referencia $\mathcal{R}'_a$:

$$P_j = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij} Q_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij} = 1.$$

La matriz

$$C_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a} := \left(\alpha_{ij}\right)_{\substack{i=0,\ldots,n \\ j=0,\ldots,n}}$$

es precisamente la matriz de cambio de referencia afín de $\mathcal{R}_a$ a $\mathcal{R}'_a$ con

$$\boldsymbol{\mu}^t = C_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a} \cdot \boldsymbol{\lambda}^t.$$

En efecto, dado $P \in A$, se tiene que

$$P = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P_j = \sum_{j=0}^{n} \mu_j Q_j \quad \text{con} \quad \sum_{j=0}^{n} \lambda_j = \sum_{i=0}^{n} \mu_i = 1.$$

Combinando con la expresión de cada P_j como combinación afín de los puntos de la referencia $\mathcal{R}'_a$, tenemos

$$\sum_{j=0}^{n} \mu_j Q_j = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P_j = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij} Q_i \right) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} \lambda_j \right) Q_i.$$

con lo que $\mu_i = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} \lambda_j$ y se tiene el resultado. La unicidad de la matriz se sigue de la unicidad de las coordenadas baricéntricas.

Observación I.32

La matriz de cambio de referencia afín verifica las siguientes propiedades:

(a) Las columnas de la matriz $C_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a}$ son las coordenadas baricéntricas de P_j en la referencia afín $\mathcal{R}'_a$, y suman 1.

(b) La matriz $C_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a}$ es invertible, con inversa $C_{\mathcal{R}'_a \mathcal{R}_a}$. En efecto:

$$\boldsymbol{\mu}^t = C_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a} \boldsymbol{\lambda}^t = C_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a} \cdot C_{\mathcal{R}'_a \mathcal{R}_a} \boldsymbol{\mu}^t$$

por lo que

$$C_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a} \cdot C_{\mathcal{R}'_a \mathcal{R}_a} = I_n \,, \quad \text{y} \quad \left(C_{\mathcal{R}_a \mathcal{R}'_a}\right)^{-1} = C_{\mathcal{R}'_a \mathcal{R}_a}.$$

Para finalizar la sección, ponemos en común todos los cambios de coordenadas. Sean referencias afines $\mathcal{R}_a$ y $\mathcal{R}'_a$, con referencias cartesianas asociadas $\mathcal{R}_c$ y $\mathcal{R}'_c$, y sea $P \in A$ con coordenadas baricéntricas $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$ respecto de $\mathcal{R}_a$ y $\mathcal{R}'_a$, y coordenadas cartesianas $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ respecto de $\mathcal{R}_c$ y $\mathcal{R}'_c$. Tenemos el siguiente diagrama que relaciona las cuatro tuplas de coordenadas:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} & \mathcal{R}_c & \longleftrightarrow & \mathcal{R}'_c & \\ & \boldsymbol{x} & \left(1 \mid \boldsymbol{y}\right)^t = C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c} \cdot \left(1 \mid \boldsymbol{x}\right)^t & \boldsymbol{y} & \\ \boldsymbol{\lambda}^t = M_n \cdot \left(1 \mid \boldsymbol{x}\right)^t & \updownarrow & & \updownarrow & \boldsymbol{\mu}^t = M_n \cdot \left(1 \mid \boldsymbol{y}\right)^t \\ & \mathcal{R}_a & \longleftrightarrow & \mathcal{R}'_a & \\ & \boldsymbol{\lambda} & \boldsymbol{\mu}^t = C_{\mathcal{R}_a\mathcal{R}'_a} \cdot \boldsymbol{\lambda}^t & \boldsymbol{\mu} & \end{array}}$$

De la combinación de expresiones obtenemos

$$M_n \cdot C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c} \cdot \left(1 \mid \boldsymbol{x}\right)^t = M_n \cdot \left(1 \mid \boldsymbol{y}\right)^t = \boldsymbol{\mu}^t = C_{\mathcal{R}_a\mathcal{R}'_a} \cdot \boldsymbol{\lambda}^t = C_{\mathcal{R}_a\mathcal{R}'_a} \cdot M_n \cdot \left(1 \mid \boldsymbol{x}\right)^t,$$

de lo cual extraemos las relaciones entre las matrices de cambio de referencia baricéntricas y cartesianas:

$$\boxed{C_{\mathcal{R}_a\mathcal{R}'_a} = M_n \cdot C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c} \cdot M_n^{-1}}$$
$$\boxed{C_{\mathcal{R}_c\mathcal{R}'_c} = M_n^{-1} \cdot C_{\mathcal{R}_a\mathcal{R}'_a} \cdot M_n}$$

Nótese que la inversa de la matriz M_n, viene dada por

$$M_n^{-1} := \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & I_n & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Ejemplo I.33

Sean en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$

$$\mathcal{R}_{c,e} = \left\{\overline{0}; \{e_1, e_2, e_3\}\right\}$$

la referencia cartesiana estándar y su referencia afín asociada

$$\mathcal{R}_{a,e} = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}.$$

Sea el punto P con coordenadas cartesianas $\boldsymbol{x} = (2, -1, 1)$ respecto de $\mathcal{R}_{c,e}$. Respecto de la referencia afín asociada $\mathcal{R}_{a,e}$ sus coordenadas baricéntricas son $\boldsymbol{\lambda} = (-1, 2, -1, 1)$.

Ahora sea otra referencia cartesiana

$$\mathcal{R}'_c = \big\{(1,0,1); \{(1,2,-1),(-1,-1,0),(0,1,1)\}\big\}.$$

Las coordenadas cartesianas del punto P respecto de $\mathcal{R}'_c$ serán las coordenadas del vector $\overrightarrow{O'P}$ respecto de la base $\mathcal{B}'$, donde $O' = (1,0,1)$ y $\mathcal{B}' = \{(1,2,-1),(-1,-1,0),(0,1,1)\}$. Por tanto $\overrightarrow{O'P} = (1,-1,0)$ y, para calcular sus coordenadas, resolvemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} 1 & = & y_1 & -y_2 & \\ -1 & = & 2y_1 & -y_2 & +y_3 \\ 0 & = & -y_1 & & +y_3 \end{array}\right.$$

cuya solución es $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3) = (-1,-2,-1)$. Observamos que la matriz de cambio de referencia de $\mathcal{R}'_c$ a $\mathcal{R}_{c,e}$ viene dada por

$$C_{\mathcal{R}'_c\mathcal{R}_{c,e}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y que se verifica efectivamente

$$C_{\mathcal{R}'_c\mathcal{R}_{c,e}} \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline \boldsymbol{y} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline \boldsymbol{x} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline -1 \\ -2 \\ -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 2 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right)$$

Por otra parte, la referencia afín asociada a $\mathcal{R}'_c$ es

$$\mathcal{R}'_a = \{(1,0,1),(2,2,0),(0,-1,1),(1,1,2)\}$$

y las coordenadas baricéntricas de P respecto de $\mathcal{R}'_a$ se obtienen a partir de las cartesianas respecto de $\mathcal{R}'_c$ ajustando el primer escalar para que la suma sea 1,

$$\boldsymbol{\mu} = (5,-1,-2,-1).$$

Entonces, podemos obtener la matriz de cambio de referencia afín a partir de la de cambio de referencia cartesiana, tal que

$$C_{\mathcal{R}'_a\mathcal{R}_{a,e}} = M_n \cdot C_{\mathcal{R}'_c\mathcal{R}_{c,e}} \cdot M_n^{-1} =$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} -1 & -2 & 2 & -2 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Observamos que las columnas de la matriz $C_{\mathcal{R}'_a\mathcal{R}_{a,e}}$ son las coordenadas baricéntricas de los puntos de la referencia $\mathcal{R}'_a$, en la referencia $\mathcal{R}_{a,e}$. Y también vemos que se verifica

$$C_{\mathcal{R}'_a\mathcal{R}_{a,e}} \cdot \boldsymbol{\mu}^t = \boldsymbol{\lambda}^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Subespacios afines

En esta sección estudiaremos los subespacios de un espacio afín, las operaciones entre ellos y las ecuaciones que los definen.

3.1. Subespacios afines

Como en cualquier área de matemáticas, un subobjeto del objeto que estamos estudiando, en este caso los espacios afines, será un subconjunto que reproduce la misma estructura y propiedades del conjunto inicial.

Definición I.34

Sea (A, V, α) un espacio afín. Un subconjunto $B \subset A$ es un *subespacio afín* si existe un subespacio vectorial $W \subset V$ tal que $(B, W, \alpha|_B)$ es un espacio afín que satisface que la restricción de α a B,

$$\alpha|_B : B \times B \longrightarrow V$$

verifica

(i) Para todo punto $P \in B$ y para todo vector $\overrightarrow{w} \in W$ existe un único punto $Q \in B$ con $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{w}$.

(ii) Dados puntos cualesquiera $P, Q, R \in B$,

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$

El subespacio vectorial W se denomina *dirección* de B.

Observación I.35

Obsérvese que la propiedad (ii) se cumple inmediatamente, ya que B la hereda por ser un subconjunto de A. Para probar que B es un subespacio afín lo único que hay que demostrar es que dados $P \in B$ y $\overrightarrow{w} \in W$, el único Q que existe con $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{w}$ está en B.

Proposición I.36. *Son equivalentes a la definición de subespacio afín las siguientes propiedades:*

(1) *Dado $P \in B$, existe $W \subset V$ subespacio vectorial tal que $B = P + W$. Es decir, todos los puntos de B se pueden expresar como $P + \overrightarrow{w}$, con $\overrightarrow{w} \in W$. El subespacio vectorial W es único y no depende del punto P elegido.*

(2) *Existe $P \in B$ tal que la imagen de la aplicación*

$$\alpha_P|_B : B \longrightarrow V \ , \quad \alpha_P|_B(Q) := \overrightarrow{PQ}$$

es un subespacio vectorial de V.

Demostración.

(1) Como la propiedad (ii) de la Definición I.34 se cumple automáticamente para un subconjunto $B \subset A$ como propiedad heredada de A (ver Observación I.35), probaremos la equivalencia entre la propiedad (i) y la Proposición I.36, (1).

Sea $P \in B$ y supongamos que existe un subespacio vectorial $W \subset V$ tal que $B = P + W$. Entonces, dado un vector $\overrightarrow{w} \in W$, el punto $Q := P + \overrightarrow{w}$ pertenece a B y la propiedad se cumple por la Definición I.34, (i).

Recíprocamente, supongamos que $B \subset A$ es un subespacio afín con dirección $W \subset V$, verificando la propiedad de la Definición I.34, (i), y probemos que, dado $P \in B$, se tiene $B = P + W$. En efecto, la Definición I.1, (i) garantiza que para cualquier $Q \in B \subset A$ existe un único vector $\overrightarrow{w} \in V$ con $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{w}$. Por otro lado, por la Definición I.34, la restricción a B, $\alpha|_B : B \times B \longrightarrow W$ tiene imagen en W. Por tanto, $\overrightarrow{w} \in W$ y se tiene que $Q = P + \overrightarrow{w} \in P + W$. Para el otro contenido, dados $P \in B$ y $\overrightarrow{w} \in W$, por la Definición I.34, (i), existe un único $Q \in B$ con $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{w}$, por tanto $Q = P + \overrightarrow{w} \in B$.

(2) La aplicación $\alpha_P|_B$ es la restricción a B de la aplicación que define un espacio afín (Definición I.1 y Definición I.34). Si se cumple la Definición I.34, entonces es claro que la imagen de $\alpha_P|_B$ es la dirección $W \subset V$, que es un subespacio vectorial. Recíprocamente, si $\alpha_P(B) = W \subset V$, dado

un vector $\overrightarrow{w} \in W \subset V$, existe (por la Definición I.1, (i)) un único punto $Q \in A$ tal que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{w}$. Pero, como $Q \in \alpha_P^{-1}(W) \subset B$, entonces $Q \in B$ y se tiene la propiedad (i) de la Definición I.34, con lo cual B es subespacio afín.

□

Definición I.37

La *dimensión* de un subespacio afín B es la dimensión de su dirección W como subespacio vectorial de V.

Proposición I.38.

(1) *Si tenemos subespacios afines* $\emptyset \subsetneq B_1 \subseteq B_2 \subseteq A$, *entonces* $\dim B_1 \leqslant \dim B_2 \leqslant \dim A$. *En particular la dimensión de un subespacio afín de un espacio afín de dimensión finita es también finita.*

(2) *Si* $\emptyset \subsetneq B_1 \subseteq B_2 \subseteq A$, *entonces* $B_1 = B_2$ *si y solo si* $\dim B_1 = \dim B_2$.

Demostración.

(1) La Proposición I.36, (1) garantiza la existencia de un punto $P \in B_1 \subset B_2$ y subespacios vectoriales $W_1, W_2 \subset V$, tales que $B_1 = P + W_1$ y $B_2 = P + W_2$. Como cualquier $Q \in B_1$ es de la forma $Q = P + \overrightarrow{PQ}$ con $\overrightarrow{PQ} \in W_1$ y $Q \in B_1 \subset B_2 = P + W_2$ entonces $\overrightarrow{PQ} \in W_2$ y se tiene $W_1 \subset W_2$, por lo que $\dim W_1 \leqslant \dim W_2$. Como la dimensión de un subespacio afín coincide con la de su dirección, se tiene el resultado.

(2) La implicación a la derecha es obvia. En sentido contrario, si $\dim B_1 = \dim B_2$ entonces sus direcciones tienen la misma dimensión, $\dim W_1 = \dim W_2$. Como $B_1 \subset B_2$ entonces $W_1 \subset W_2$ y se tiene necesariamente que $W_1 = W_2$, por tanto, $B_1 = P + W_1 = P + W_2 = B_2$.

□

Notación I.39

(a) Llamamos *puntos* y *rectas* a los subespacios afines de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ de dimensiones 0 y 1, respectivamente.

(b) Llamamos *puntos*, *rectas* y *planos* a los subespacios afines de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ de dimensiones 0, 1 y 2, respectivamente.

(c) Llamamos *hiperplanos* a los subespacios afines de dimensión $n - 1$, de un espacio afín de dimensión n.

Uno de los ejemplos más importantes de subespacio afín es el dado por el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales (no necesariamente homogéneo), siempre que sea no vacío.

PROPOSICIÓN I.40. *Sea $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ una matriz $m \times n$ de rango r, y sea un vector $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$. El conjunto (si es no vacío)*

$$B = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} : M\boldsymbol{x}^t = \mathbf{b}^t\right\},$$

identificando puntos con sus coordenadas cartesianas respecto de la referencia cartesiana estándar de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, es un subespacio afín de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ de dimensión $n-r$, cuya dirección es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado

$$W = \left\{\overrightarrow{w} \in \mathbb{K}^n : M\overrightarrow{w}^t = \mathbf{0}\right\},$$

identificando vectores con sus coordenadas respecto de la base canónica de $\mathbb{K}^n$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema de Rouché-Frobenius se tiene que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ cuya dimensión es $n-r$, .

Sea $P \in B$ y sean $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ sus coordenadas respecto de la referencia cartesiana estándar en $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, que son las coordenadas del vector $\overrightarrow{0P}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{K}^n$. Para cada $Q \in B$ con coordenadas $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ se tiene que

$$M\left(\overrightarrow{PQ}\right)^t = M\boldsymbol{y}^t - M\boldsymbol{x}^t = \boldsymbol{b}^t - \boldsymbol{b}^t = \mathbf{0},$$

por lo que $\overrightarrow{PQ} \in W$ y $Q = P + \overrightarrow{PQ}$. Por otra parte, para cada vector $\overrightarrow{w} \in W$, con coordenadas $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_n)$ respecto de la base canónica de $\mathbb{K}^n$,

$$M\left(P + \overrightarrow{w}\right)^t = M\boldsymbol{x}^t + M\boldsymbol{z}^t = \boldsymbol{b}^t + \mathbf{0} = \boldsymbol{b}^t,$$

por lo que $B = P + W$ y se concluye que B es subespacio afín de la dirección y dimensión indicadas. □

EJEMPLO I.41

(a) En $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, los puntos de la forma

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} : (x_1, x_2) = (1, 2) + \lambda(-1, 1)\right\}$$

son un subespacio afín $B = P + W$, con $P = (1, 2)$ y $W = \mathcal{L}\{(-1, 1)\}$. Como la dirección W tiene dimensión 1 se sigue que B es una recta.

(b) Sea el conjunto de soluciones $L = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} : M\boldsymbol{x}^t = \boldsymbol{b}^t\}$, donde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Puesto que M tiene rango 2, L es un subespacio afín de dimensión $3-2=1$, es decir, una recta en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$. Para poder expresar L como suma de un punto y una recta vectorial, extraemos una solución particular del sistema, por ejemplo $P=(-1,0,2)\in\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, y observamos que $W=\mathcal{L}\{(2,-1,-1)\}$ es la recta de soluciones del sistema homogéneo asociado, por tanto

$$L = P + W = (-1,0,2) + \mathcal{L}\{(2,-1,-1)\}.$$

(c) El conjunto de las matrices reales 2×2, denotado por $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, con la suma de matrices y el producto por escalares es un espacio vectorial real de dimensión 4, que puede interpretarse como su espacio afín estándar asociado. Sea

$$B = \{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \operatorname{tr}(M) = 3\}$$

el subconjunto de matrices de traza (suma de los elementos de la diagonal) igual a 3. B es un subespacio afín de dimensión 3, con dirección las matrices de traza nula (véase Problema I.4).

(d) El subconjunto de polinomios que toman un determinado valor en un punto es un subespacio afín (véase Problema I.6). Por ejemplo

$$C = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p(1) = 5\}$$

es un subespacio afín con dirección

$$W = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}.$$

En efecto, la resta de dos polinomios $p(x)$, $q(x)$, tales que $p(1)=q(1)=5$ es un polinomio $(p-q)(x)$ tal que

$$(p-q)(1) = p(1) - q(1) = 5 - 5 = 0,$$

por lo que $(p-q)(x)\in W$ y C es subespacio afín de la dirección indicada.

3.2. Operaciones con subespacios afines

Comenzamos mostrando que la intersección de un número arbitrario de subespacios afines es un subespacio afín.

Proposición I.42. *Sea $\{B_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios afines de A, cada uno con dirección $W_i \subset V$. Si $\bigcap_{i\in I} B_i \neq \emptyset$, entonces $\bigcap_{i\in I} B_i$ es subespacio afín de A con dirección $\bigcap_{i\in I} W_i$.*

Demostración. Sea $P \in \bigcap_{i\in I} B_i$. Probaremos que $\bigcap_{i\in I} B_i = P + \bigcap_{i\in I} W_i$.

Para todo $Q \in \bigcap_{i\in I} B_i$ se tiene que $Q \in B_i$, para cada $i \in I$, por lo que $\overrightarrow{PQ} \in W_i$, para todo $i \in I$ y, por tanto $Q = P + \overrightarrow{PQ} \in P + \bigcap_{i\in I} W_i$.

Recíprocamente, cualquier $Q \in P + \bigcap_{i\in I} W_i$ es de la forma $Q = P + \overrightarrow{PQ}$, con $\overrightarrow{PQ} \in W_i$ para todo $i \in I$. Por tanto, $Q \in B_i = P + W_i$, para todo $i \in I$.

Como consecuencia, $\bigcap_{i\in I} B_i = P + \bigcap_{i\in I} W_i$ es un subespacio afín de la dirección indicada. $\square$

La unión de subespacios afines no es un subespacio afín, del mismo modo que la unión de subespacios vectoriales no es un subespacio vectorial. Por ejemplo, la unión de las líneas

$$L_1 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} : x_1 + x_2 = 1\right\} \quad \text{y} \quad L_2 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} : x_1 - x_2 = 1\right\}$$

no es un subespacio afín. En efecto, sean $P = (1, 0) \in L_1 \cap L_2$, $Q = (0, 1) \in L_1$ y $R = (0, -1) \in L_2$ y supongamos que existe un $W \subset \mathbb{R}^2$ tal que $L_1 \cup L_2 = P + W$. Por tanto, los vectores $\overrightarrow{PQ} = (-1, 1)$ y $\overrightarrow{PR} = (-1, -1)$ han de pertenecer a W, con lo cual $\mathcal{L}\{(-1, 1), (-1, -1)\} \subset W$, y entonces $W = \mathbb{R}^2$. Pero en tal caso, el vector $\overrightarrow{w} = (1, 0) \in W = \mathbb{R}^2$, mientras que el punto $P + \overrightarrow{w} = (2, 0) \notin L_1 \cup L_2$, lo cual es una contradicción. Véase Figura I.7.

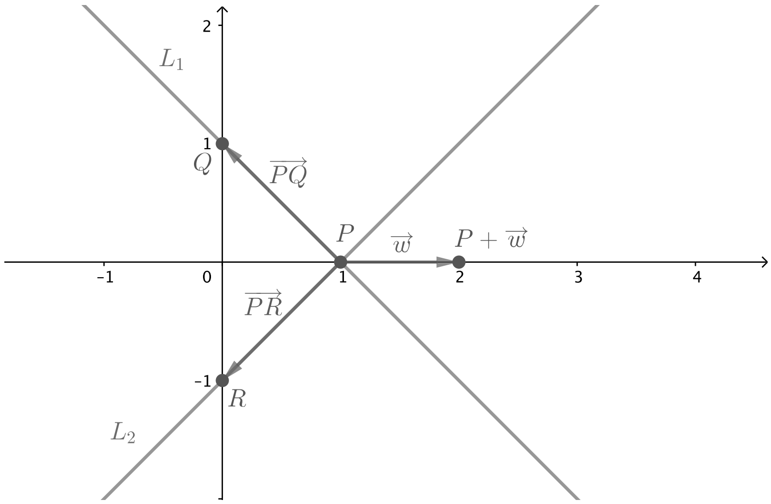

Figura I.7. La unión de los subespacios afines L_1 y L_2 no es un subespacio afín.

Definición I.43

Sea $S \in A$ un conjunto no vacío. Definimos el *subespacio afín generado por S*, denotado por $V(S)$, como el menor subespacio afín de A que contiene a S.

El subespacio afín generado por un subconjunto S existe y es único, ya que se puede definir como la intersección

$$V(S) := \bigcap_{\substack{B_i \text{ subespacio afín} \\ S \subset B_i}} B_i$$

que es un subespacio afín y, por definición, cualquier otro subespacio afín que contiene a S debe contener necesariamente a esta intersección.

Un caso importante de subespacios generados aparece cuando S es un conjunto de puntos de A.

Proposición I.44. *Dados puntos $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$, el subespacio afín que generan viene dado por todas sus combinaciones afines,*

$$V\big(\{P_0, P_1, \dots, P_r\}\big) = \left\{\sum_{i=0}^{r} \lambda_i P_i : \lambda_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1\right\},$$

y tiene dirección $\mathcal{L}\left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_r}\right\}$.

Demostración. Demostraremos que

$$V\big(\{P_0, P_1, \dots, P_r\}\big) = P_0 + \mathcal{L}\left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_r}\right\}.$$

Sea W la dirección de $V\big(\{P_0, P_1, \dots, P_r\}\big)$. Como $P_i \in V\big(\{P_0, P_1, \dots, P_r\}\big)$, $i = 1, \dots, r$, necesariamente los vectores $\overrightarrow{P_0P_i} \in W$ y $\mathcal{L}\left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_r}\right\} \subset W$, por lo tanto

$$P_0 + \mathcal{L}\left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_r}\right\} \subset V\big(\{P_0, P_1, \dots, P_r\}\big).$$

Por otra parte, todos los puntos P_i están en $P_0 + \mathcal{L}\left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_r}\right\}$, que es un subespacio afín, por lo que el menor subespacio afín que los contiene debe estar contenido a su vez en él, de donde se sigue que

$$V\big(\{P_0, P_1, \dots, P_r\}\big) \subset P_0 + \mathcal{L}\left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_r}\right\},$$

lo que completa la prueba. □

La prueba del siguiente corolario es inmediata a partir de la Proposición I.44 y las Proposiciones I.21 y I.23.

COROLARIO I.45. *Los puntos* $P_0, P_1, \dots, P_r \in A$ *son*
(1) *afínmente independientes si y solo si* $\dim V\big(\{P_0, P_1, \dots, P_r\}\big) = r$.
(2) *afínmente generadores de* A *si y solo si* $\dim V\big(\{P_0, P_1, \dots, P_r\}\big) = \dim A$.

Gracias a la noción de subespacio generado por un conjunto de puntos, podemos dar una nueva caracterización de los subespacios afines.

PROPOSICIÓN I.46. *Un subconjunto* $B \subset A$ *es un subespacio afín si y solo si es cerrado respecto a las combinaciones afines.*

DEMOSTRACIÓN. Una dirección es clara ya que, si B es un subespacio afín, dados puntos $P_0, P_1, \dots, P_r \in B$ se tiene que $V\big(\{P_0, P_1, \dots, P_r\}\big) \subset B$, por lo que contiene las combinaciones afines.

Recíprocamente, supongamos que B contiene cualquier combinación afín. Definamos $W := \left\{\overrightarrow{PQ} : P, Q \in B\right\}$. Se tiene que W es un subespacio vectorial, ya que dados $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS} \in W$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, el punto

$$P + \lambda\overrightarrow{PQ} + \mu\overrightarrow{RS} = (1-\lambda)P + \lambda Q - \mu R + \mu S \in B$$

porque es una combinación afín donde la suma de los coeficientes es uno. Por tanto la combinación lineal $\lambda\overrightarrow{PQ} + \mu\overrightarrow{RS} \in W$. Por otro lado, dado $P \in B$, podemos escribir $B = P + W$ ya que, para cualquier otro punto $Q \in B$, $\overrightarrow{PQ} \in W$ por definición de W. □

EJEMPLO I.47

La idea de independencia afín se puede visualizar por medio de puntos que generan, mediante combinaciones afines, todo el subespacio afín donde están, siendo todos ellos necesarios. Por ejemplo:

(a) Un punto en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, solo genera el propio punto, que es un subespacio afín de dimensión 0.

(b) Dos puntos diferentes $P, Q \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ generan la recta de dimensión 1 que los une, con dirección $\mathcal{L}\left\{\overrightarrow{PQ}\right\}$, ya que cualquier punto de esta recta se puede expresar de forma única como

$$P + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} = P + \lambda(Q - P) = (1-\lambda)P + \lambda Q$$

que es una combinación afín. Si $P = Q$, obviamente son puntos afínmente dependientes que generan únicamente el propio punto.

(c) Tres puntos no alineados generan todo $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ y son afínmente independientes. En efecto, si los puntos $P, Q, R \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ no están alineados, entonces $\mathcal{L}\left\{\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right\} = \mathbb{R}^2$ y cualquier punto $S \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ se puede expresar de forma única como

$$S = P + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} + \mu \cdot \overrightarrow{PR} = P + \lambda(Q - P) + \mu(R - P) =$$
$$(1 - \lambda - \mu)P + \lambda Q + \mu R,$$

que es una combinación afín. Si los puntos estuviesen alineados, podemos prescindir de uno de ellos para generar únicamente una recta.

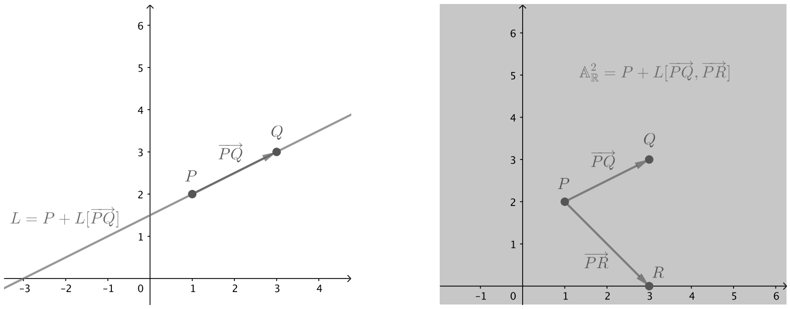

FIGURA I.8. Recta generada por dos puntos y plano generado por tres puntos.

Dado que la unión de subespacios no es un subespacio, definimos la suma como el subespacio generado por la unión, que es el mínimo subespacio afín que contiene a todos los subespacios de la suma.

DEFINICIÓN I.48

Dados subespacios afines $B_i \subset A$, $i \in I$, la *suma de subespacios afines* se define como

$$\sum_{i \in I} B_i := V\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right).$$

PROPOSICIÓN I.49. *Dados subespacios afines $B_i \subset A$, de la forma $B_i = P_i + W_i$, con $P_i \in B_i$, $W_i \subset V$, $i \in I$, su suma $\sum_{i \in I} B_i = V\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right)$ es un subespacio afín que tiene por dirección*

$$\mathcal{L}\left\{\overrightarrow{P_iP_j} : i, j \in I\right\} + \sum_{i \in I} W_i.$$

En particular, la suma de dos subespacios afines $B_1 = P_1 + W_1$, $B_2 = P_2 + W_2$, está dada por

$$B_1 + B_2 = P_1 + \left(\mathcal{L}\left\{\overrightarrow{P_1P_2}\right\} + W_1 + W_2\right).$$

Demostración. Daremos solo una prueba para la suma de dos subespacios B_1 y B_2. La prueba para la suma de un número finito se sigue por inducción. La prueba para una suma arbitraria es técnicamente más complicada y puede encontrarse en [5][Sección 1.a.3].

Sean $B_1 = P_1 + W_1$ y $B_2 = P_2 + W_2$, y sea W la dirección del subespacio afín $B_1 + B_2 = V(B_1 \cup B_2)$. Como

$$B_1 = P_1 + W_1 \subset P_1 + \left(\mathcal{L}\left\{\overrightarrow{P_1P_2}\right\} + W_1 + W_2\right)$$

y

$$B_2 = P_2 + W_2 = P_1 + \overrightarrow{P_1P_2} + W_2 \subset P_1 + \left(\mathcal{L}\left\{\overrightarrow{P_1P_2}\right\} + W_1 + W_2\right),$$

se tiene que

$$B_1 + B_2 \subset P_1 + \left(\mathcal{L}\left\{\overrightarrow{P_1P_2}\right\} + W_1 + W_2\right)$$

y, entonces

$$W \subset \left(\mathcal{L}\left\{\overrightarrow{P_1P_2}\right\} + W_1 + W_2\right).$$

Recíprocamente, como $B_1 \subset B_1+B_2$ y $B_2 \subset B_1+B_2$, los contenidos se reproducen en sus direcciones, es decir, $W_1 \subset W$, $W_2 \subset W$. Además $\overrightarrow{P_1P_2} \in W$, ya que ambos puntos están en $B_1 + B_2$. Por tanto

$$\left(\mathcal{L}\left\{\overrightarrow{P_1P_2}\right\} + W_1 + W_2\right) \subset W$$

y, como consecuencia

$$P_1 + \left(\mathcal{L}\left\{\overrightarrow{P_1P_2}\right\} + W_1 + W_2\right) \subset B_1 + B_2.$$

□

Teorema I.50 (Fórmula de Grassmann afín). *Sean $B_1, B_2 \subset A$ subespacios afines con direcciones $W_1, W_2 \subset V$. Se verifica*

$$\dim(B_1 + B_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) + \varepsilon$$

donde $\varepsilon = 0$ si $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ y $\varepsilon = 1$ si $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Demostración. Sea W la dirección de la suma $B_1 + B_2$. Por la Proposición I.49,

$$W = \mathcal{L}\left\{\overrightarrow{P_1P_2}\right\} + W_1 + W_2.$$

Supongamos que $\epsilon = 0$, es decir existe $P \in B_1 \cap B_2$. Entonces $B_1 = P + W_1$ y $B_2 = P + W_2$ y se tiene que

$$\dim(B_1 + B_2) = \dim W = \dim\left(\mathcal{L}\left\{\overrightarrow{PP}\right\} + W_1 + W_2\right) =$$

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Por el contrario, si $\epsilon = 1$ y tomamos $B_1 = P_1 + W_1$ y $B_2 = P_2 + W_2$, se verifica que $\overrightarrow{P_1P_2} \notin (W_1 + W_2)$. En efecto, en caso contrario, existen vectores $\overrightarrow{w_1} \in W_1$, $\overrightarrow{w_2} \in W_2$ tales que $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$. Si $Q \in B_1$ con $\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{P_1Q}$ se tiene que

$$\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{P_1P_2} - \overrightarrow{P_1Q} = \overrightarrow{QP_2} \in W_2$$

luego $Q \in B_2$ y, entonces $Q \in B_1 \cap B_2$, lo que es una contradicción. Entonces se tiene que

$$\dim(B_1 + B_2) = \dim W = \dim\left(\mathcal{L}\left\{\overrightarrow{P_1P_2}\right\} + W_1 + W_2\right) =$$

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1 + W_2) + 1 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) + 1.$$

$\square$

Ejemplo I.51

Dos rectas $L_1, L_2 \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ que se cortan en un punto P, verifican la fórmula de Grassmann, ya que

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_1) + \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow 2 = 1 + 1 - 0 + 0$$

ya que la suma de subespacios es todo el plano afín $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

Dos rectas paralelas $L_1, L_2 \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ diferentes tienen la misma dirección W pero tienen intersección vacía, por tanto su suma es todo $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ ya que un vector de W y el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$, $P_1 \in L_1$, $P_2 \in L_2$, generan todo $\mathbb{R}^2$. Por tanto

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_1) + \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow 2 = 1 + 1 - 1 + 1$$

y la fórmula de Grassmann también se cumple.

Posiciones relativas de dos subespacios afines

A partir de la relación entre dos subespacios afines $B_1, B_2 \subset A$ y sus direcciones vectoriales $W_1, W_2 \subset V$, podemos hablar de cuatro posibilidades para las *posiciones relativas* de B_1 y B_2:

(a) Si $B_1 \subseteq B_2$ o $B_2 \subseteq B_1$, un subespacio está *incluido* en el otro.

(b) Si $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$ pero $B_1 \not\subset B_2$ ni $B_2 \not\subset B_1$, B_1 y B_2 se *cortan.*

(c) Si $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ con $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$, B_1 y B_2 son *paralelos*, y lo denotaremos por $B_1 \| B_2$.

(d) Si $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ con $W_1 \not\subset W_2$ ni $W_2 \not\subset W_1$, B_1 y B_2 se *cruzan.*

EJEMPLO I.52

Vamos a listar las posibilidades para las posiciones relativas de subespacios en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ y $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

(1) Sean L_1, L_2 dos rectas en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ con direcciones $W_1 = \mathcal{L}\{\overrightarrow{w_1}\}, W_2 = \mathcal{L}\{\overrightarrow{w_2}\}$.
  - (a) Supongamos que existe $P \in L_1 \cap L_2$. Si $\overrightarrow{w_1} \in W_2$ (por tanto $W_1 = W_2$) entonces ambas rectas son iguales; si $\overrightarrow{w_1} \notin W_2$ entonces se cortan en el único punto P.
  - (b) Si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ y $W_1 = W_2$ entonces las rectas son paralelas $L_1 \| L_2$ de la misma dirección pero pasando por puntos diferentes.
  - (c) Si fuese $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ y $W_1 \neq W_2$, por la fórmula de Grassmann tendríamos

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(W_1 \cap W_2) + \varepsilon =$$
$$1 + 1 - 0 + 1 = 3$$

    lo que es imposible ya que la suma debe estar contenida en un espacio afín de dimensión 2, por tanto dos rectas no se pueden cruzar en el plano.

(2) Sean ahora L_1, L_2 dos rectas en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ con direcciones $W_1 = \mathcal{L}\{\overrightarrow{w_1}\}$, $W_2 = \mathcal{L}\{\overrightarrow{w_2}\}$.
  - (a) Supongamos que existe $P \in L_1 \cap L_2$. Si $\overrightarrow{w_1} \in W_2$ (por tanto $W_1 = W_2$) entonces ambas rectas son iguales; si $\overrightarrow{w_1} \notin W_2$ entonces las rectas se cortan en el único punto P.
  - (b) Si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ y $\overrightarrow{w_1} \in W_2$, entonces $W_1 = W_2$ y las rectas son paralelas $L_1 \| L_2$; si $\overrightarrow{w_1} \notin W_2$, las rectas se cruzan.

(3) Sean ahora L una recta y H un plano en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ con direcciones $W = \mathcal{L}\{\overrightarrow{w}\}$, $U = \mathcal{L}\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$, respectivamente.
  - (a) Supongamos que existe $P \in L \cap H$. Si $\overrightarrow{w} \in U$ (por tanto $W \subset U$) entonces la recta está contenida en el plano $L \subset H$; si $\overrightarrow{w} \notin U$ entonces la recta y el plano se cortan en el único punto P.
  - (b) Si $L \cap H = \emptyset$, necesariamente $\overrightarrow{w} \in U$ por la fórmula de Grassmann; entonces $W \subset U$ y la recta es paralela al plano $L \| H$.
  - (c) Por razones de dimensión, según la fórmula de Grassmann, una recta y un plano no se pueden cruzar en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

El último resultado del ejemplo se puede generalizar a dimensión superior.

PROPOSICIÓN I.53. *Dado $H \subset A$ hiperplano y otro subespacio $B \subset A$, con $B \cap H = \emptyset$, entonces B y H son paralelos.*

DEMOSTRACIÓN. Problema I.15. □

3.3. Ecuaciones de subespacios afines

Dado un subespacio afín $B \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, existen un punto $P \in B$ y un subespacio vectorial $W \subset V$ de dimensión $d < n$ tales que $B = P + W$. Entonces, si las coordenadas de un vector $\overrightarrow{w} \in W$ respecto de la base canónica de $\mathbb{K}^n$ son $\boldsymbol{z}$, existe una matriz $M \in \mathcal{M}_{(n-d)\times n}(\mathbb{K})$ con

$$W = \left\{\boldsymbol{z} \in \mathbb{K}^n : M\boldsymbol{z}^t = \mathbf{0}\right\}$$

descrito como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. Sean $\boldsymbol{y}$ las coordenadas cartesianas de P respecto de la referencia cartesiana estándar de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Definiendo

$$\boldsymbol{b} := \boldsymbol{y} \cdot M^t,$$

obtenemos que las coordenadas $\boldsymbol{x}$ de los puntos de B (respecto de la referencia cartesiana estándar de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$) son el conjunto de soluciones del sistema

$$M\boldsymbol{x}^t = \boldsymbol{b}^t.$$

En efecto, sea $Q \in B$ con coordenadas $\boldsymbol{x}$, tal que $Q = P + \overrightarrow{PQ}$, con $\overrightarrow{PQ} \in W$ de coordenadas $\boldsymbol{z}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{K}^n$. Se tiene que

$$M\boldsymbol{x}^t = M(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})^t = M\boldsymbol{y}^t + M\boldsymbol{z}^t = \boldsymbol{b}^t + \mathbf{0} = \boldsymbol{b}^t.$$

Imitaremos este proceso para definir unas ecuaciones tanto implícitas como paramétricas de un subespacio afín, en general.

DEFINICIÓN I.54

Sea A un espacio afín de dimensión n y sea $B \subset A$ un subespacio afín de dimensión d, con dirección $W \subset V$, tal que $B = P + W$. Sea $\mathcal{R}_c = \{O; \mathcal{B}\}$ una referencia cartesiana de A. Dado un punto genérico $Q \in B$, denotamos por $\boldsymbol{x}$ sus coordenadas cartesianas en la referencia cartesiana $\mathcal{R}_c$. En particular, $\boldsymbol{y}$ son las coordenadas cartesianas de P respecto de $\mathcal{R}_c$.

(a) En coordenadas cartesianas respecto a $\mathcal{R}_c$, un *sistema de ecuaciones implícitas* viene dado por

$$M\boldsymbol{x}^t = \boldsymbol{b}^t\ ,$$

donde $W = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{K}^n : M\boldsymbol{z}^t = \mathbf{0}\}$ es el conjunto de vectores de W expresados en coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}$, con $M \in \mathcal{M}_{(n-d)\times n}(\mathbb{K})$, y $\boldsymbol{b} := \boldsymbol{y} \cdot M^t$.

(b) Si $\{\overrightarrow{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_d}\}$ es una base de W, cualquier vector $\overrightarrow{z}$ de W se escribe como $\overrightarrow{z} = \lambda_1\overrightarrow{w_1} + \cdots + \lambda_d\overrightarrow{w_d}$. Si las coordenadas de $\overrightarrow{z}$ respecto de $\mathcal{B}$

son $\boldsymbol{z}$, se tiene que

$$\boldsymbol{z}^t = C \cdot \boldsymbol{\lambda}^t$$

son unas ecuaciones paramétricas de W, donde las columnas de C son las coordenadas de $\overrightarrow{w_i}$ en la base $\mathcal{B}$, y $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$. Entonces, un *sistema de ecuaciones paramétricas* de $B = P + W$, es

$$\boldsymbol{x}^t = \boldsymbol{y} + C \cdot \boldsymbol{\lambda}^t \ .$$

Observación I.55

Si $\dim B = d$ y $\dim A = n$, se verifica que el (mínimo) número de parámetros λ_i para definir el subespacio afín B en ecuaciones paramétricas es igual a su dimensión, d, y que el número de ecuaciones implícitas (independientes) es igual a la diferencia de dimensiones, $n - d$.

El paso de ecuaciones implícitas a paramétricas y viceversa puede ser tedioso en términos de cálculos, pero se rige por los mismos principios que el caso vectorial. Para pasar de paramétricas a implícitas, sabiendo que la dimensión de B es d, eliminaremos los d parámetros hasta obtener $n - d$ ecuaciones implícitas independientes. Para pasar de implícitas a paramétricas, resolvemos el sistema homogéneo asociado para obtener una base de W, tomamos un punto de B, solución del sistema no homogéneo, y con ello construimos unas ecuaciones paramétricas.

Cálculo de ecuaciones de la suma e intersección de dos subespacios afines

Dados subespacios afines $B_1 = P_1 + W_1$, y $B_2 = P_2 + W_2$, para obtener ecuaciones de la suma $B_1 + B_2$:

1. Buscamos una base de $W_1 + W_2$ uniendo bases de cada subespacio y eliminando dependencias lineales.
2. Si $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, añadimos a la base el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$.
3. Formamos unas ecuaciones paramétricas de la suma
$$B_1 + B_2 = P_1 + \mathcal{L}\left\{\overrightarrow{P_1P_2}\right\} + W_1 + W_2$$
4. Eliminamos parámetros para obtener unas ecuaciones implícitas.

Para obtener ecuaciones de la intersección $B_1 \cap B_2$:

1. Obtenemos ecuaciones implícitas de B_1 y de B_2.
2. Concatenamos las ecuaciones implícitas y eliminamos, si hay dependencias.

EJEMPLO I.56

Sean dos rectas en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, L_1 que pasa por los puntos $P = (0,1,2)$ y $Q = (1,0,2)$, y L_2 que viene dada por sus ecuaciones implícitas:

$$L_2 : \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & -2x_2 & & = & -2 \\ & x_2 & +x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

La recta L_1 se puede escribir como $L_1 = (0,1,2) + \mathcal{L}\{(1,-1,0)\}$, y unas ecuaciones paramétricas de L_1 vienen dadas por

$$L_2 : \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & = & & \lambda \\ x_2 & = & 1 & -\lambda \\ x_3 & = & 2 & \end{array} \right.$$

Eliminando parámetros en estas ecuaciones paramétricas obtenemos unas ecuaciones implícitas de L_1,

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & +x_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

Concatenando las ecuaciones implícitas de L_1 y de L_2, obtenemos unas ecuaciones de la intersección:

$$L_1 \cap L_2 : \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & +x_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & = & 2 \\ x_1 & -2x_2 & & = & -2 \\ & x_2 & +x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

cuyo sistema es compatible y tiene por solución el punto $P = (0,1,2)$, por lo que $L_1 \cap L_2 = \{(0,1,2)\}$.

Para calcular la suma de las dos rectas, primero obtenemos la dirección de L_2 resolviendo su sistema de ecuaciones implícitas. Obtenemos

$$L_2 = (0,1,2) + \mathcal{L}\{(2,1,-1)\}.$$

Como las dos rectas se cortan, la suma viene dada por

$$L_1 + L_2 = P + \mathcal{L}\{(1,-1,0)\} + \mathcal{L}\{(2,1,-1)\} =$$
$$(0,1,2) + \mathcal{L}\left\{(1,-1,0),(2,1,-1)\right\}.$$

Unas ecuaciones paramétricas de la suma son

$$L_1 + L_2 : \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & = & & \lambda & +2\mu \\ x_2 & = & 1 & -\lambda & +\mu \\ x_3 & = & 2 & & -\mu \end{array} \right.$$

Eliminando parámetros conseguimos una ecuación implícita para la suma, que es un plano

$$L_1 + L_2 : \{x_1 + x_2 + 3x_3 = 7\}.$$

Definición I.57

Dada $\mathcal{R}_a$ referencia afín de A, sean $P_0, \ldots, P_d \in A$ puntos afínmente independientes y sea $B = V\{P_0, \ldots, P_d\}$ un subespacio afín de dimensión d. Sean $(\alpha_{0j}, \alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{nj})$ las coordenadas baricéntricas de cada P_j respecto de $\mathcal{R}_a$. Sean $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ las coordenadas de un punto $Q \in B$ y $\boldsymbol{\mu} = (\mu_0, \ldots, \mu_d)$ parámetros. Unas *ecuaciones baricéntricas* (con respecto a $P_0, \ldots, P_d$, en coordenadas baricéntricas respecto de $\mathcal{R}_a$) de B son

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \alpha_{ij} \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\mu}$$

con la restricción $\sum_{i=0}^n \lambda_i = \sum_{j=0}^d \mu_j = 1$.

Ejemplo I.58

Consideremos el espacio afín estándar $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ con la referencia afín estándar $\mathcal{R}_a = \{(0,0); (1,0), (0,1)\}$. Sea la recta $L : \{x_1 - x_2 = 2\}$ y vamos a obtener unas ecuaciones baricéntricas de L. Podemos ver

$$L = V\{Q_0 = (0,-2), Q_1 = (2,0)\},$$

y los puntos Q_0, Q_1, en coordenadas baricéntricas respecto de $\mathcal{R}_a$ son

$$Q_0 = (3, 0, -2)_{\mathcal{R}_a}, \quad Q_1 = (-1, 2, 0)_{\mathcal{R}_a}$$

(véase cómo obligamos a que la suma de coordenadas sea 1, multiplicando el punto $(0,0)$ por el escalar correspondiente). Por tanto, si $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ son las coordenadas baricéntricas de $R \in L$, se tiene que

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \end{pmatrix}$$

por lo que las ecuaciones baricéntricas de L (respecto de Q_1, Q_2, y en coordenadas baricéntricas estándar) son

$$\left\{ \begin{array}{rcrr} \lambda_0 & = & 3\mu_0 & -1\mu_1 \\ \lambda_1 & = & & 2\mu_1 \\ \lambda_2 & = & -2\mu_0 & \\ 1 & = & \mu_0 & +\mu_1 \end{array} \right.$$

donde hemos añadido la restricción de que la suma de coordenadas sea 1. Véase cómo el hecho de que la suma de cada columna de la matriz sea 1 implica que la última ecuación recoge ambas restricciones, $\sum_{i=0}^n \lambda_i = \sum_{j=0}^d \mu_j = 1$.

Dado el punto $R = (1, -1) = (1, 1, -1)_{\mathcal{R}_a} \in L$, si resolvemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrr} 1 & = & 3\mu_0 & -1\mu_1 \\ 1 & = & & 2\mu_1 \\ -1 & = & -2\mu_0 & \\ 1 & = & \mu_0 & +\mu_1 \end{array}\right.$$

que es compatible, obtenemos $\mu_0 = \mu_1 = \frac{1}{2}$, que son precisamente las coordenadas baricéntricas de $R = (1, -1)$ respecto de $Q_0 = (0, -2), Q_1 = (2, 0)$ (o, dicho de otro modo, R es el punto medio del segmento que une Q_0 con Q_1) (véase Figura I.9).

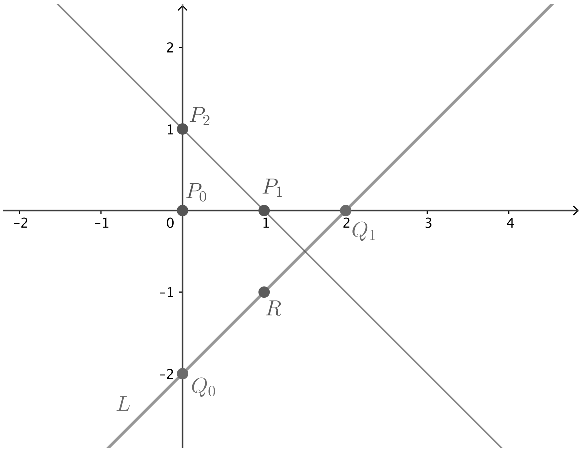

Figura I.9. Figura del Ejemplo I.58.

4. Problemas I

PROBLEMA I.1 Sean los puntos $(1,0)$, $(3,2)$ y $(2,-1)$ en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

(a) Demuestra que forman una referencia afín.

(b) Calcula las coordenadas baricéntricas del origen de coordenadas respecto de esta referencia afín.

PROBLEMA I.2 Sean los puntos $(1,i)$, $(1,-i)$ y $(1+i,1-i)$ en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.

(a) Demuestra que forman una referencia afín.

(b) Calcula las coordenadas baricéntricas del origen de coordenadas respecto de esta referencia afín.

PROBLEMA I.3 Sean los puntos $(1,0,0)$, $(-1,-1,2)$ y $(3,0,1)$ en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

(a) Completa una referencia afín con un cuarto punto y calcula las coordenadas baricéntricas del origen de coordenadas respecto de la referencia afín.

(b) Calcula la matriz de cambio de referencia de esta referencia afín a la referencia afín estándar y comprueba que transforma las coordenadas baricéntricas del origen respecto de ambas referencias.

PROBLEMA I.4 Prueba que el subconjunto de matrices de traza igual a 3

$$B = \{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \operatorname{tr}(M) = 3\}$$

es un subespacio afín de dimensión 3, con dirección las matrices de traza nula. Calcula unas ecuaciones implícitas que lo definan.

PROBLEMA I.5 Prueba que el subconjunto de matrices cuadradas $n \times n$ de determinante igual a 1 no es un subespacio afín de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

PROBLEMA I.6 Demuestra que el subconjunto de polinomios con coeficientes reales, que toman un determinado valor b en un punto a

$$C = \{p(x) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : p(a) = b\}$$

es un subespacio afín con dirección

$$W = \{p(x) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : p(a) = 0\}\,.$$

Calcula su dimensión y unas ecuaciones implícitas que lo definan.

Problema I.7 Sea $\mathcal{R}_a = \{(0,0),(1,1),(-1,1)\}$ una referencia afín en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ y sea $\mathcal{R}_{a,e}$ la referencia afín estándar. Calcula la matriz de cambio de referencia de la referencia afín estándar $\mathcal{R}_{a,e}$ a la referencia afín $\mathcal{R}_a$ y utilízala para calcular las coordenadas baricéntricas del punto $(2,2)$ en la referencia afín $\mathcal{R}_a$.

Problema I.8 Sean los puntos $P_0 = (-2,1)$, $P_1 = (1,2)$ y $P_2 = (1,0)$ en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

(a) Demuestra que $\mathcal{R}_a = \{P_0, P_1, P_2\}$ es una referencia afín.
(b) Calcula las coordenadas baricéntricas del punto $Q = (4,3)$ en la referencia afín $\mathcal{R}_a$.
(c) Escribe la referencia cartesiana $\mathcal{R}_c$ asociada a la referencia afín $\mathcal{R}_a$, y las coordenadas cartesianas de Q en la referencia cartesiana $\mathcal{R}_c$.
(d) Escribe la matriz de cambio de referencia de $\mathcal{R}_c$ a la referencia cartesiana estándar, y utilízala para comprobar las coordenadas calculadas en el apartado anterior.

Problema I.9 Prueba que si dos subespacios B_1, B_2 tienen intersección no vacía, se puede eliminar el término $\mathcal{L}\left\{\overrightarrow{P_1P_2}\right\}$ de la definición de suma de subespacios, y tenemos

$$B_1 + B_2 = P_1 + \big(W_1 + W_2\big).$$

Problema I.10 Prueba que dos planos distintos en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ que no son paralelos intersecan en una recta.

Problema I.11 Dado un subespacio afín B de dimensión m y un punto $P \notin B$, demuestra que el subespacio afín $\{P\} + B$ tiene dimensión $m+1$.

Problema I.12 Dado un punto P y una recta L contenidos en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, $P \notin L$, demuestra que existe una única recta L' paralela a L que pasa por P.

Problema I.13 Dado un punto P y un plano H contenidos en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, $P \notin H$, demuestra que existe un único plano H' paralelo a H que pasa por P.

Problema I.14 Muestra, con ayuda de la fórmula de Grassmann, que una recta y un plano no se pueden cruzar en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

Problema I.15 Demuestra que dado $H \subset A$ hiperplano y otro subespacio $B \subset A$, con $B \cap H = \varnothing$, entonces B y H son paralelos.

Problema I.16 Sea A un espacio afín con dirección V y sean $B, C \subset A$ subespacios afines con direcciones, respectivamente, W y U, tales que $W + U = V$.

(a) Prueba que $B + C = A$.
(b) Prueba que $B \cap C \neq \varnothing$.
(c) Si $\dim A = n$, $\dim B = m$ y $B \cap C = L$, donde L es una recta, calcula $\dim C$ (en función de n y m).

Problema I.17 Calcula unas ecuaciones implícitas de la recta $L \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ que pasa por el punto $(0, 1, 0)$ y es paralela al vector $(2, -1, 1)$.

Problema I.18 Calcula unas ecuaciones implícitas de la recta $L \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y es paralela a la intersección de los planos $\{x_1 + x_2 = 1\}$ y $\{x_2 - x_3 = -1\}$.

Problema I.19 Calcula ecuaciones paramétricas e implícitas del plano $H \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ que pasa por $P = (0, 0, 1)$ y es paralelo a $\{x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5\}$.

Problema I.20 Dadas dos rectas en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, L_1 que pasa por los puntos $P = (-1, -1, -1)$ y $Q = (2, 0, 1)$, y L_2 dada en ecuaciones implícitas

$$L_2 : \left\{ \begin{array}{rrrcr} 2x_1 & -x_2 & -x_3 & = & -1 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

calcula su suma y su intersección, calculando ecuaciones de ambas.

Problema I.21 Dadas dos rectas en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, L_1 que pasa por los puntos $P = (1, 1, 0)$ y $Q = (2, 0, 2)$, y L_2 dada en ecuaciones implícitas

$$L_2 : \left\{ \begin{array}{rrrcr} x_1 & -2x_2 & & = & -1 \\ & 3x_2 & +x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

calcula su suma y su intersección, calculando ecuaciones de ambas.

Problema I.22 Sean $H_1 : \{x_1 - x_2 + x_3 = 2\}$ y $H_2 : \{2x_1 + x_2 - 2x_3 = -1\}$ dos planos en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ dados por sus correspondientes ecuaciones implícitas. Calcula su suma y su intersección, obteniendo ecuaciones de ambas.

PROBLEMA I.23 Sea A un espacio afín de dimensión n y sean H y L subespacios afines de A tales que $\dim H + \dim L = n - 1$ y $H \cap L = \emptyset$. Sean W, U y V las direcciones de H, L y A, respectivamente y supongamos que $W \cap U = \{\overrightarrow{0}\}$.

(a) Demuestra que $H + L = A$.

(b) Demuestra que si añadimos al conjunto formado por una base de W y una base de U el vector $\overrightarrow{PQ}$, donde $P \in H$, $Q \in L$, completamos una base de V.

(c) Sean en $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ el plano

$$H : \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & & +x_3 & & = & -1 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 1 \end{array} \right.$$

y la recta $L = V\{(1, 0, -1, 1), (2, a, 0, 1)\}$, $a \in \mathbb{R}$. Calcula para qué valor de a H y L se cortan en un punto y calcula el punto de corte.

PROBLEMA I.24 Demuestra que $\mathcal{R}_a = \{(0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ es referencia afín en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$. Calcula la matriz de cambio de base de la referencia afín $\mathcal{R}_a$ a la referencia afín estándar $\mathcal{R}_{a,e}$ y utilízala para calcular el baricentro de la referencia afín $\mathcal{R}_a$.