Capítulo 1

Números reales

Al operar con números se debe precisar el conjunto numérico con el que se trata, puesto que existen varios conjuntos numéricos que pueden ser utilizados. En general, si no se especifica, se suele considerar un conjunto de escalares $\mathbb{K}$ dotado de dos leyes de composición interna;

$$\begin{array}{ll} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} & \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ \quad (\alpha, \beta) \longrightarrow \alpha + \beta & \quad (\alpha, \beta) \longrightarrow \alpha \cdot \beta \end{array}$$

y que se cumplen algunas, o todas, de las siguientes propiedades:

- $(\mathbb{K}, +)$ es un **grupo conmutativo** si y sólo si la operación $+$ satisface las siguientes propiedades para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$:

  1. Asociativa: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma$.
  2. Elemento neutro: Denotado 0, tal que $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$.
  3. Elemento simétrico: El opuesto de α es $-\alpha$; $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$.
  4. Conmutativa: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

- $(\mathbb{K} - \{0\}, \cdot)$ es un grupo conmutativo. La operación $\cdot$ satisface las siguientes propiedades para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} - \{0\}$:

  5. Asociativa: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$.
  6. Elemento neutro: Denotado 1, tal que $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$.
  7. Elemento simétrico: El inverso de α es α^{-1}; $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1$.
  8. Conmutativa: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

- La operación $\cdot$ es distributiva respecto de la operación $+$ en $\mathbb{K}$, es decir, para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ se tiene

  9. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Todas estas propiedades se resumen en la siguiente definición.

Definición 1.1 Estructura de Cuerpo
$(\mathbb{K} \ + \ \cdot)$ es un **cuerpo** si y sólo si se cumplen las propiedades del 1 al 9.

Observación La propiedad asociativa es la que permite dar sentido a las sumas, o a los productos, con más de dos números. Es decir expresiones similares a las expresiones $a+b+c+d$ y $a\cdot b\cdot c\cdot d$ son sintáticamente correctas gracias a la propiedad asociativa, puesto que mediante la inclusión de paréntesis se puede expresar como una cadena de operaciones de dos números cada vez. Además, la forma de cómo se incluyen los paréntesis no afecta al resultado.

Observación La propiedad distributiva es la que permite, con la mezcla de las dos operaciones, construir expresiones con sentido. Al hacer uso de esta propiedad de izquierda a derecha se suele decir que se quitan paréntesis, mientras de el uso de derecha a izquierda se indica como sacar factor común.

Los conjunto numéricos a los cuales se suele hacer referencia son:

- El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales que están definidos mediante los axiomas de Peano. Se emplean los símbolos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ en lugar de una notación que haga referencia al número siguiente de un número n, $s(n)$; $\mathbb{N} = \{0, s(0), s(s(0)), \ldots\}$
- El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros que están definidos como clases de equivalencia de la relación definida por $(n, m)\mathcal{R}(p, q) \iff n+q = m+p$ en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Se emplean los símbolos $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ en lugar de una notación de clases; $\mathbb{Z} = \{\ldots, [(0, 2)], [(0, 1)], [(0, 0)], [(1, 0)], [(2, 0)], \ldots\}$.
- El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales que están definidos por las clases de equivalencia de la relación definida por $(n, m)\mathcal{R}(p, q) \iff n \cdot q = m \cdot p$ en $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})$. Se emplea la escritura de fracción $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\right\}$ en lugar de una notación de clases $\mathbb{Q} = \{[(a, b)] \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\}$.
- El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.
- El conjunto $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ de los números complejos.

Es claro que estos conjuntos están compuestos por elementos de naturaleza distinta y no hay ninguna relación de contenido como simples conjuntos entre ellos.
Los conjunto anteriores están dotados con una operación suma y una operación producto, y cumplen distintas propiedades que se resumen diciendo que

- $(\mathbb{N} + \cdot)$ es un **semianillo conmutativo con elemento unidad**, puesto que se cumplen las propiedades 1, 2, 4 , 5, 6, 8 y 9.

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(0, n) \longrightarrow 0 + n = n \qquad (0, n) \longrightarrow 0 \cdot n = 0$$
$$(n, s(m)) \longrightarrow n + s(m) = s(n + m) \quad (n, s(m)) \longrightarrow n \cdot s(m) = n \cdot m + n$$

- $(\mathbb{Z} + \cdot)$ es un **anilllo conmutativo con elemento unidad,** puesto que se cumplen las propiedades del 1 al 6, 8 y 9.
$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad [(n, m)] + [(h, k)] = [(n + h, m + k)]$$
$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad [(n, m)] \cdot [(h, k)] = [(n \cdot h + m \cdot k, m \cdot h + n \cdot k)]$$

- $(\mathbb{Q} + \cdot)$ es un cuerpo.
$$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \qquad [(n, m)] + [(h, k)] = [(n \cdot k + m \cdot h, m \cdot k)]$$
$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \qquad [(n, m)] \cdot [(h, k)] = [(n \cdot h, m \cdot k)]$$

- $(\mathbb{R} + \cdot)$ y $(\mathbb{C} + \cdot)$ son cuerpos.

La existencia de isomorfismos entre las estructuras algebraicas de los conjuntos numéricos con una parte de otro conjunto numérico permiten identificar algunos números de dos conjuntos distintos.

- $(\mathbb{N} + \cdot)$ y el subsemianillo de los números enteros no negativos, $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, de $(\mathbb{Z} + \cdot)$. Por ello, se suele hablar de número natural para hacer referencia a número entero no negativo.

- $(\mathbb{Z} + \cdot)$ y el subanillo de las fracciones con denominador 1 de $(\mathbb{Q} + \cdot)$. Por ello, se suele hablar de número entero para hacer referencia a cualquier fracción de denominador 1.

- $(\mathbb{Q} + \cdot)$ es un subcuerpo de $(\mathbb{R} + \cdot)$. Cualquier número racional puede ser tratado como un número real.

- $(\mathbb{R} + \cdot)$ es subcuerpo de $(\mathbb{C} + \cdot)$. Cualquier número real puede ser tratado como un número complejo de parte imaginaria nula.

Observación La existencia de estos isomorfismos indica que se operan de forma análoga los números de un cierto conjunto y los números del conjunto imagen. No distinguir si se trata del conjunto inicial o de su imagen es un uso muy común. Un ejemplo de este uso implícito, y ambiguo, permite hablar de la suma de un número real y un número natural o entero. En general, se opera en el marco numérico más amplio que en este caso es el de los números reales. De esta forma, al número natural aludido se le representa por el número entero no negativo correspondiente. Este último es representado por el número racional cuyo numerador ese número entero y cuyo denominador es 1. De esta forma se establece cierta ambigüedad cuando

se presentan operaciones donde hay distintos tipos de números por medio, que se resuelve al considerar el marco operacional más amplio. En cierta medida esto explica que sea muy común ver la expresión

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$

que sólo tiene sentido operacionalmente y bajo la referencia de los isomorfismos aludidos de las estructuras algebraicas y de orden.

Otras propiedades: De las propiedades de la estructura de cuerpo se derivan las siguientes propiedades: Para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$,

10. $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.
11. Si $\alpha \cdot \beta = 0$, entonces $\alpha = 0$ o $\beta = 0$ (En $\mathbb{K}$ no hay divisores de 0).
12. Si $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$ y $\alpha \neq 0$, entonces $\beta = \gamma$ (P. Cancelativa en $(\mathbb{K} - \{0\}\ \cdot)$).
13. $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2$; $\cdots$; $\alpha \cdot \alpha^{n-1} = \alpha^n$. (Potencias en $(\mathbb{K}\ \cdot)$).
14. $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
15. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ (Binomio de Newton).
    $(\alpha + \beta)^n = \binom{n}{0}\alpha^n + \binom{n}{1}\alpha^{n-1}\beta + \cdots + \binom{n}{n-1}\alpha\beta^{n-1} + \binom{n}{n}\beta^n$.

Observación Todas las propiedades mencionadas del 1 al 15 se cumplen sobre cualquier cuerpo, por ello, se cumplen en $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. En $\mathbb{Z}$ se cumplen todas menos la propiedad 7 y en $\mathbb{N}$ se cumplen todas menos las propiedades 3, 7 y la propiedad 14 por no está definida en $\mathbb{N}$ la expresión $\alpha - \beta$.

Nota En $\mathbb{K}$ escribiremos $\alpha\beta$ en lugar de $\alpha \cdot \beta$ y expresiones como 3α para representar a $\alpha + \alpha + \alpha$ o α^3 para representar a $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$. De forma análoga se interpretan las expresiones $n\alpha$ y α^n para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.2 Estructura de Cuerpo ordenado
$(\mathbb{K}\ +\ \cdot\ \leqslant)$ es un **cuerpo ordenado** si y sólo si $(\mathbb{K}\ +\ \cdot)$ es un cuerpo, $(\mathbb{K}\ \leqslant)$ es un conjunto ordenado con orden total y la relación de orden $\leqslant$ es compatible con las dos operaciones $+$ y $\cdot$. Es decir, para todo $\alpha, \beta, \gamma, \rho \in \mathbb{K}$:

Si $\alpha \leqslant \beta$ y $\gamma \leqslant \rho$, entonces $\alpha + \gamma \leqslant \beta + \rho$.
Si $0 \leqslant \alpha$ y $0 \leqslant \beta$, entonces $0 \leqslant \alpha\beta$.

En un cuerpo ordenado se debe cumplir que si $\alpha \neq 0$ entonces $0 < \alpha^2$. Además, $0 < 1$ y por tanto $-1 < 0$. En general un cuerpo puede carecer de una estructura de orden total compatible con las operaciones, por ejemplo $(\mathbb{C}\ +\ \cdot)$ puesto que si $\alpha = i \neq 0$ se tiene $\alpha^2 = -1 < 0$.

Ejemplo 1.3 **Orden en un cuerpo**
Una forma habitual de crear un orden compatible con las operaciones consiste en determinar la existencia de un subconjunto $\mathbb{K}^+$ que cumpla las condiciones:

1. $0 \notin \mathbb{K}^+$, donde 0 es el elemento neutro de la suma.

2. Para cualquier $a \in \mathbb{K}$ se cumple que o $a \in \mathbb{K}^+$ o $a = 0$ o $-a \in \mathbb{K}^+$, donde $-a$ es el elemento opuesto para la suma.

3. Para cualquier $a, b \in \mathbb{K}^+$ se cumple $a + b \in \mathbb{K}^+$ y $ab \in \mathbb{K}^+$. ♣

Proposición 1.4 La relación

$$a \leqslant b \iff a = b \quad \text{o} \quad b - a \in \mathbb{K}^+$$

es una relación de orden total compatible con las operaciones.

Demostración
La propiedad *reflexiva*, $\forall a \in \mathbb{K}$ se cumple $a \leqslant a$ por definición de la relación.
La propiedad *antesimétrica* se cumple. Si $a \leqslant b$ y $b \leqslant a$, y suponemos que $a \neq b$, se tiene que $b - a, a - b \in \mathbb{K}^+$ que es una contradicción. El escalar $b - a$ y su opuesto $a - b$ no pueden pertenecer a $\mathbb{K}^+$.
La propiedad *transitiva* se cumple. Si $a \leqslant b$ y $b \leqslant c$, entonces $b - a \in \mathbb{K}^+$ y $c - b \in \mathbb{K}^+$. Así pues, $(c - b) + (b - a) = c - a \in \mathbb{K}^+$, es decir, $a \leqslant c$.
Además, de la segunda propiedad de $\mathbb{K}^+$ se obtiene que se es un orden total, puesto si $a, b \in \mathbb{K}$, entonces o bien $b - a \in \mathbb{K}^+$, es decir $a \leqslant b$), o $b - a = 0$, es decir $a = b$, o $-(b - a) = a - b \in \mathbb{K}^+$, es decir $b \leqslant a$. ♣

Observación Al conjunto $\mathbb{K}^+$ se le denomina el conjunto de escalares positivos. Además, se considera la relación estricta: $a < b \iff b - a \in \mathbb{K}^+$ que no es de orden, por no cumplir la propiedad reflexiva.

Ejercicio 1.5 **Una propiedad del orden**

Si $\alpha \leqslant \beta$ y $0 < \gamma$, entonces $\alpha\gamma \leqslant \beta\gamma$.

Solución
Si $\alpha \leqslant \beta$, entonces o $\alpha = \beta$ o $0 < \beta - \alpha$. En el caso $\alpha = \beta$ se tiene $\alpha\gamma = \beta\gamma$. En el caso $0 < \beta - \alpha$, como $0 < \gamma$ se tiene $0 \leqslant (\beta - \alpha)\gamma = \beta\gamma - \alpha\gamma$, es decir, $\alpha\gamma \leqslant \beta\gamma$. ♣

Práctica 1.6 **Otras propiedades del orden**

Si $0 < \alpha$, entonces $0 < \alpha^{-1}$.
Si $0 < \alpha \leqslant \beta$, entonces $0 < \beta^{-1} \leqslant \alpha^{-1}$.
Si $\alpha \leqslant \beta < 0$, entonces $\beta^{-1} \leqslant \alpha^{-1} < 0$.

Ejemplo 1.7 **Valor absoluto en un cuerpo ordenado**

La existencia de subconjunto $\mathbb{K}^+$ en un cuerpo ordenado $(\mathbb{K}\ +\ \cdot\ \leqslant)$ permite definir la aplicación valor absoluto de la forma siguiente:

$$|\ |:\mathbb{K}\longrightarrow\mathbb{K}^+\cup\{0\}\qquad |\alpha|=\begin{cases}\alpha & \text{si } \alpha\in\mathbb{K}^+\\ 0 & \text{si } \alpha=0\\ -\alpha & \text{si } \alpha\notin\mathbb{K}^+\cup\{0\}\end{cases}\quad\clubsuit$$

Ejercicio 1.8 **Propiedades del valor absoluto**

$$|\alpha\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|\quad,\quad |\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|.$$

Solución

Si $0<\alpha$ y $0<\beta$, entonces $0<\alpha\beta$ y $0<\alpha+\beta$. Luego,

$$|\alpha\beta|=\alpha\beta=|\alpha|\cdot|\beta|\quad;\quad |\alpha+\beta|=\alpha+\beta=|\alpha|+|\beta|.$$

Si $\alpha<0$ y $\beta<0$, entonces $0<\alpha\beta$ y $\alpha+\beta<0$. Luego,

$$|\alpha\beta|=\alpha\beta=(-\alpha)(-\beta)=|\alpha|\cdot|\beta|\quad;\quad |\alpha+\beta|=-(\alpha+\beta)=-\alpha-\beta=|\alpha|+|\beta|.$$

Si $\alpha<0$ y $0<\beta$, entonces $\alpha\beta<0$ y $\alpha+\beta<-\alpha+\beta$. Luego,

$$|\alpha\beta|=-\alpha\beta=(-\alpha)\beta=|\alpha|\cdot|\beta|\quad;\quad |\alpha+\beta|<|-\alpha+\beta|=-\alpha+\beta=|\alpha|+|\beta|.$$

El caso $0<\alpha<0$ y $\beta<0$ es análogo al anterior. $\clubsuit$

Práctica 1.9 **Otras propiedades del valor absoluto**

$$|\alpha|=|-\alpha|\quad,\quad |\alpha-\beta|\geqslant|\beta|-|\alpha|.$$

Ejercicio 1.10 **Distancia definida en un cuerpo ordenado**

La aplicación $d:\mathbb{K}\times\mathbb{K}\longrightarrow\mathbb{K}^+\cup 0$ definida por $d(\alpha,\beta)=|\beta-\alpha|$ cumple las propiedades:

$$\begin{array}{ll}\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K} & d(\alpha,\beta)\geqslant 0.\\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{K} & d(\alpha,\beta)=0\iff\alpha=\beta.\\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{K} & d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha).\\ \forall\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{K} & d(\alpha,\gamma)\leqslant d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma).\end{array}$$

Solución

Al aplicar la definición de d y las propiedades del valor absoluto se tiene:

$$d(\alpha,\beta)=0\iff|\beta-\alpha|=0\iff\beta-\alpha=0\iff\beta=\alpha.$$

$$d(\alpha,\beta)=|\beta-\alpha|=|\alpha-\beta|=d(\alpha,\beta).$$

$$d(\alpha,\gamma)=|\beta-\gamma|=|\alpha-\beta+\beta-\gamma|\leqslant|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|=d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma).\quad\clubsuit$$

1.1. Números decimales

Cada número racional es una clase $[(a,b)]$ de pares de números enteros correspondiente al conjunto cociente $(\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})/\mathcal{R}$ mediante la relación de equivalencia definida sobre $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})$ de la forma

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff ad=bc \qquad ; \qquad [(a,b)]\in(\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})/\mathcal{R}=\mathbb{Q}.$$

Un número racional $[(a,b)]$ se suele escribir en forma de **fracción**, $\dfrac{a}{b}$, de números enteros. Si bien, cualquier número racional α puede ser representado por cada elementos de la clase y, por tanto, por distintas fracciones de la forma $\dfrac{a}{b}$, resulta que existe una única fracción $\dfrac{a'}{b'}$, con $b'\in\mathbb{Z}-0$, tal que $1=\text{mcd}(|a'|,|b'|)$. Este representante es denominado **fracción irreducible**.

Al proceso de hallar la fracción irreducible equivalente a una fracción dada se le denomina "simplificar la fracción". Por ejemplo, $\dfrac{35}{-42}=\dfrac{-5}{6}$ ya que $7=\text{mcd}(35,42)$ y $35=7\cdot 5$ y $42=7\cdot 6$.

Cuerpo de los números racionales

Las operaciones en el conjunto $\mathbb{Q}$, se definen de la manera siguiente:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad \text{y} \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, \qquad \forall\frac{a}{b},\frac{c}{d}\in\mathbb{Q},$$

donde $0=\dfrac{0}{1}$ es el elemento neutro de la suma y $1=\dfrac{1}{1}$ es el elemento neutro del producto.

En $\mathbb{Q}$ se consideran el subconjunto $\mathbb{Q}_+$ de los números racionales positivos o cero y el subconjunto $\mathbb{Q}_-$ de los números negativos o cero.

$$\mathbb{Q}_+=\left\{\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}\mid ab\geqslant 0\right\}=\mathbb{Q}^+\cup\{0\} \quad \text{y} \quad \mathbb{Q}_-=\left\{\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}\mid ab\leqslant 0\right\}=\mathbb{Q}^-\cup\{0\},$$

que cumplen:

- $\mathbb{Q}_+\cup\mathbb{Q}_-=\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}_+\cap\mathbb{Q}_-=\{0\}$.
- La suma y el producto son operaciones cerradas en $\mathbb{Q}_+$. Es decir, si $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}_+$, entonces $\alpha+\beta\in\mathbb{Q}_+$ y $\alpha\beta\in\mathbb{Q}_+$.

En $\mathbb{Q}$ se define la relación de orden de la forma siguiente:

$$\alpha \leqslant \beta \quad \text{si y sólo si} \quad \beta - \alpha \in \mathbb{Q}_+ \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q}.$$

Observación Esta relación de orden es de orden total

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \text{ se cumple } \alpha < \beta \quad \text{o} \quad \alpha = \beta \quad \text{o} \quad \alpha > \beta.$$

Este orden es compatible con la suma, es decir,

$$\alpha \leqslant \beta \text{ si y sólo si } \gamma + \alpha \leqslant \gamma + \beta \qquad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}.$$

Todo esto se recuerda diciendo que $(\mathbb{Q} \ + \ \cdot \ \leqslant)$ es un cuerpo ordenado.

Como en todo cuerpo ordenado, $\mathbb{Q}$ satisface las propiedades siguientes:

16. Si $\alpha \leqslant \beta$ y $\alpha' \leqslant \beta'$, entonces $\alpha + \alpha' \leqslant \beta + \beta'$.
17. Si $\alpha \leqslant \beta$, entonces $-\beta \leqslant -\alpha$.
18. Si $\alpha \leqslant \beta$ y $0 \leqslant \gamma$, entonces $\alpha\gamma \leqslant \beta\gamma$.
19. Si $\alpha \leqslant \beta$ y $\gamma \leqslant 0$, entonces $\beta\gamma \leqslant \alpha\gamma$.
20. Para todo $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha^2 \geqslant 0$.
21. Si $\alpha > 0$, entonces $\alpha^{-1} > 0$.
22. Si $0 < \alpha \leqslant \beta$, entonces $0 < \beta^{-1} \leqslant \alpha^{-1}$.
23. Si $\alpha \leqslant \beta < 0$, entonces $\beta^{-1} \leqslant \alpha^{-1} < 0$.

Observación En muchos ejercicios de este texto se presenta la necesidad de tratar con una inecuación. Las propiedades de la 18 a la 23 muestran la forma en la cual se transforma la desigualdades cuando se opera con ellas. Por ejemplo, de la propiedad 19 se tiene que si $\alpha \leqslant \beta$ entonces $-\beta \leqslant -\alpha$ y de la propiedad 22 que para dos números positivos tales que $\alpha \leqslant \beta$ entonces $\dfrac{1}{\beta} \leqslant \dfrac{1}{\alpha}$.

Otras propiedades importantes las presentan los siguientes resultados:

Propiedad arquimediana de $\mathbb{Q}$

24. Para todo $\alpha \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha > 0$, y para todo $\beta \in \mathbb{Q}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\alpha > \beta$.

Demostración
Se considera $\alpha = \dfrac{a}{b}$ con $b > 0$ y $\beta = \dfrac{c}{d}$ con $d > 0$, entonces tan sólo hay que determinar un número natural n tal que $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{bc}{ad} < n$, o lo que es lo mismo, $bc < nad$. Se tienen lo números enteros $ad > 0$ y bc, por tanto la propiedad arquimediana de $\mathbb{Z}$ nos asegura la existencia de ese n. ♣

Propiedad de orden divisible

25. El orden de $\mathbb{Q}$ es **divisible**, es decir, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, tales que $\alpha < \beta$, existe $\gamma \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha < \gamma < \beta$.

Demostración
Si $\alpha < \beta$, entonces $2\alpha < \alpha + \beta < 2\beta$. Luego, se tiene que $\alpha < \dfrac{\alpha+\beta}{2} < \beta$. ♣

Valor absoluto en $\mathbb{Q}$ Sea $\alpha \in \mathbb{Q}$, se define $|\alpha| = \begin{cases} -\alpha & \text{si} \quad \alpha < 0 \\ \alpha & \text{si} \quad \alpha \geqslant 0 \end{cases}$

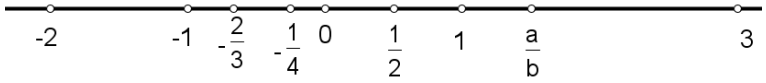

Figura 1.1: Representación de $\mathbb{Q}$ en una línea recta.

Distancia en $\mathbb{Q}$ $\quad \mathrm{d}(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q}.$

Ejercicio 1.11
La ecuación $x^2 = 2$ no tiene solución en $\mathbb{Q}$.
Solución
Supuesto que $\exists x \in \mathbb{Q}$, tal que $x^2 = 2$, se considera la fracción irreducible de $x = \dfrac{a}{b}$ con $\mathrm{mcd}\{a, b\} = 1$.

$$x^2 = 2 \iff \frac{a^2}{b^2} = 2 \iff a^2 = 2b^2 \Longrightarrow 2|a^2 \Longrightarrow 2|a,$$

es decir, 2 divide al número entero a.

$$2|a \iff 2^2|a^2 \Longrightarrow 2|b^2 \Longrightarrow 2|b.$$

Luego, $\mathrm{mcd}\{a, b\} = 2 \neq 1$; contradicción. Así pues, no es posible suponer que existe un x racional solución de esa ecuación. ♣

Práctica 1.12
Sean $n, p \in \mathbb{N}$ con $n > 2$ y p un número primo. Demostrar que no existe raíz racional alguna de la ecuación $x^n = p$.

Práctica 1.13 **Proyección natural de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$**

Demostrar que la aplicación p de $(\mathbb{Z}\ +\ \cdot\ \leqslant)$ a $(\mathbb{Q}\ +\ \cdot\ \leqslant)$ definida por $p(n) = \dfrac{n}{1}$ es un monomorfismo algebráico y de orden; homomorfismo inyectivo que conserva el orden.

$$p(km + n) = kp(m) + p(n)$$
Si $m \leqslant n$, entonces $p(m) \leqslant p(n)$.

Nota Se utiliza la notación entera n en lugar de la notación $\dfrac{n}{1}$ en este texto. Además, se entenderá a esta fracción como un número entero. Lo mismo con los números naturales.

Elementos de un conjunto ordenado

En el conjunto $\mathbb{K}$, con $\mathbb{K} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\ \text{y}\ \mathbb{R}\}$, está definida la relación de orden habitual, $\leqslant$, *menor o igual* que es una relación de orden total. Es decir, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{K}$ se cumple $a \leqslant b$ o $b \leqslant a$ ($a < b$ o $a = b$ o $a > b$).

Ese orden total nos permite disponer de un modelo gráfico del conjunto incluido en una línea recta. Es decir, $\mathbb{K}$ se interpreta como un conjunto de puntos en una línea recta, véase la figura 1.1. Este modelo sobre la recta nos permite hacer referencia a un número $a \in \mathbb{K}$ diciendo que se tiene un punto a de la recta $\mathbb{K}$.

Observación Una representación bidimensional posible podría ser la gráfica de la parábola cúbica $y = x^3$ donde el orden estaría definido por $x \leqslant x' \iff y(x) \leqslant y(x')$. Ahora bien, las operaciones algebraicas no tendrían una interpretación tan simple como en una recta.

Intervalos: Sean $a, b \in \mathbb{K}$ tales que $a \leqslant b$, se denomina:

- **Intervalo abierto** (a, b)**:** Es el conjunto $(a, b) = \{x \in \mathbb{K} \mid a < x < b\}$.
- **Intervalo cerrado** $[a, b]$**:** Es el conjunto $[a, b] = \{x \in \mathbb{K} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.
- **Intervalo semiabierto :** Es cada uno de los siguientes conjuntos:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{K} \mid a < x \leqslant b\} \quad \text{y} \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{K} \mid a \leqslant x < b\}.$$

Intervalos iniciales y finales: Sea $a \in \mathbb{K}$, se denomina:

- **Intervalo inicial abierto** $(\leftarrow, a) = \{x \in \mathbb{K} | x < a\}$.
- **Intervalo final abierto** $(a, \rightarrow) = \{x \in \mathbb{K} | a < x\}$.
- **Intervalo inicial cerrado** $(\leftarrow, a] = \{x \in \mathbb{K} | x \leqslant a\}$.

- **Intervalo final cerrado** $[a, \rightarrow) = \{x \in \mathbb{K} | a \leqslant x\}$.

Ejemplo 1.14 En el caso de $(\mathbb{R}, \leqslant)$, la forma habitual de representar los intervalos como segmentos en una recta. La expresión $a \leqslant b$ se traduce gráficamente en que *el punto a está a la izquierda del punto b* en la recta.

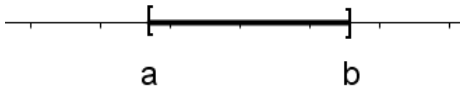

Figura 1.2: Intervalo cerrado $[a, b]$ en $\mathbb{R}$

En el caso de $(\mathbb{R}, \leqslant)$ los intervalos iniciales y finales se denominan **semirrectas** y se escriben de la forma $(-\infty, a)$, (a, ∞), $(-\infty, a]$ y$[a, \infty)$ respectivamente. En el caso de $\mathbb{Q}$ las representaciones son similares debido a que el orden de $\mathbb{Q}$ es dividido, sin embrago se sobreentiende que hay huecos invisibles. En general, para $\mathbb{Q}$ se escriben como $(a, b) \cap \mathbb{Q}$, $(-\infty, a) \cap \mathbb{Q}$, $(a, \infty) \cap \mathbb{Q}$ De forma análoga se escriben $(a, b) \cap \mathbb{Z}$, $(-\infty, a) \cap \mathbb{Z}$ y $(a, \infty) \cap \mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$, si bien en la recta tan sólo se marcan los multiplos del segmento unidad. ♣

Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{K}$, se denomina:

- **Cota superior del conjunto** A**:** Una cota superior de A es cualquier elemento $u \in \mathbb{K}$ que cumple que $\forall x \in A \quad x \leqslant u$.
- **Cota inferior del conjunto** A**:** Una cota inferior de A es cualquier elemento $b \in \mathbb{K}$ que cumple que $\forall x \in A \quad b \leqslant x$.
- A **conjunto acotado superiormente:** El conjunto A es acotado superiormente si existe una cota superior de A.
- A **conjunto acotado inferiormente:** El conjunto A es acotado inferiormente si existe una cota inferior de A.
- A **conjunto acotado:** El conjunto A es acotado si lo es tanto superiormente como inferiormente.

Observación Un conjunto A es acotado si y sólo si existen dos elementos $a, b \in \mathbb{K}$ tales que $A \subset [a, b]$. Un conjunto B no está acotado superiormente si y sólo si para todo $k \in \mathbb{K}$ existe $u \in B$ tal que $k \leqslant u$. Análogamente, un conjunto no es acotado inferiormente si y sólo si para todo $k \in \mathbb{K}$ existe $b \in B$ tal que $b \leqslant k$..

Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{K}$, se denomina:

- **Máximo del conjunto A:** Es un elemento $M \in A$ tal que $\forall x \in A \;\; x \leqslant M$. Se denota $M = \text{máx}(A)$.
- **Mínimo del conjunto A:** Es un elemento $m \in A$ tal que $\forall x \in A \;\; m \leqslant x$. Se denota $m = \text{mín}(A)$.
- **Supremo del conjunto A:** Es una cota superior $s \in \mathbb{K}$ tal que $s \leqslant u$ para toda cota superior u de A. Se denota $s = \sup(A)$.
- **Ínfimo del conjunto A:** Es una cota inferior $i \in \mathbb{K}$ tal que $d \leqslant i$ para toda cota inferior d de A. Se denota $i = \text{ínf}(A)$.

Observaciones: El ínfimo de un conjunto A es el máximo del conjunto de las cotas inferiores de A, y el supremo de A es el mínimo del conjunto de las cotas superiores de A.

De la definición se deduce directamente que si un conjunto posee máximo, entonces posee supremo y, entonces $\sup(A) = \text{máx}(A)$. Análogamente, si un conjunto posee mínimo, entonces posee ínfimo, e $\text{ínf}(A) = \text{mín}(A)$.

Observación El supremo o el ínfimo de un conjunto $A \subset \mathbb{K}$ puede existir o no. Ahora bien, La existencia de un supremo o un ínfimo de A no asegura la existencia de un máximo o un mínimo de A. .

Ejemplo 1.15
En el caso de $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ se tienen conjuntos acotados que no poseen ni ínfimos ni supremos. El conjunto A no tiene ni supremo ni ínfimo.

$$A = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 \leqslant 2\}.$$

Es acotado pues $A \subset [-3, 3]$. Supuesto que $\exists s = \sup(A) \in \mathbb{Q}$, entonces el conjunto $B = \{x^2 | x \in A\} \subset [-2, 2]$ cumple que $s^2 = \sup^2(B) = 2$. Lo que representa una contradicción pues la ecuación $x^2 = 2$ no tiene raíces racionales.
De forma análoga se muestra que no posee ínfimo. ♣

Aproximación decimal de un número racional

En el sistema decimal, cuando escribimos el número 71223 queremos indicar el número entero siguiente:

$$7 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3,$$

mientras que si escribimos 71223,145 indicamos el número racional:

$$7 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3 + 1\frac{1}{10} + 4\frac{1}{10^2} + 5\frac{1}{10^3},$$

que escrito en la forma de fracción es $\dfrac{71223145}{10^3}$.

Definición 1.16 Notación decimal exacta en base 10
Un **número decimal exacto** es un número racional que se puede expresar como una fracción de enteros donde el denominador es una potencia de 10. También se denota por **número decimal finito** o, simplemente, número decimal.

Ejemplo 1.17
Los números racionales $\dfrac{1}{5}$, $-\dfrac{3}{60}$ y 7 pueden ser escritos como $\dfrac{1}{5}=\dfrac{2}{10}$, $-\dfrac{1}{20}=-\dfrac{5}{10^2}$ y $7=\dfrac{7}{1}=\dfrac{7}{10^0}$. Luego, son números decimales exactos. Escribimos la forma decimal de las fracciones $\dfrac{1}{5}=0{,}2$, $-\dfrac{1}{20}=-0{,}05$ y $7=7{,}0$. ♣

Nota En programas de ordenador, calculadoras o en inglés la coma separadora de la parte entera de las cifras decimales se sustituye por un punto. Se suele emplear la escritura 7.2 en lugar de $7,2$ o $7'2$. Además, conviene recordar que los ordenadores operan, principalmente, con dos tipos de datos numéricos, *integer* para tratar con algunos números enteros con aritmética exacta y *float* para tratar con algunos números racionales con una aritmética no exacta denominada *punto flotante*.

Ejemplo 1.18 **Números racionales sin representación decimal finita**
No todos los números racionales se escriben como un número decimal exacto. Por ejemplo $\dfrac{1}{3}$ y $\dfrac{3}{7}$ no son números decimales exactos. Lo demostramos utilizando el método de reducción al absurdo.

Si fuera $\dfrac{1}{3}=\dfrac{a}{10^n}$ con $n\in\mathbb{N}$, se tendría que $10^n=3a$ y en consecuencia 3 sería un divisor de 10^n. Esto es falso. ♣

Cualquier número racional $\alpha=\dfrac{a}{b}\in\mathbb{Q}_+$, que no sea un número decimal exacto, se puede encuadrar entre dos números decimales exactos "consecutivos" a una distancia tan pequeña como se quiera. Supuesto que $\alpha>0$ (el caso negativo es similar), esto quiere decir que para todo $n\in\mathbb{N}$, existe un único $c\in\mathbb{N}$ que cumple:

$$\frac{c}{10^n}<\alpha<\frac{c+1}{10^n}.$$

Si la expresión $\frac{a}{b}$ del racional α es irreducible, esas desigualdades equivalen a:

$$bc \quad < \quad a\,10^n \quad < \quad b(c+1).$$

El número c es el cociente en la división entera de $a\,10^n$ entre b.

El número decimal exacto $\frac{c}{10^n}$ se denomina **aproximación decimal exacta de α de orden n por defecto**. El número decimal exacto $\frac{c+1}{10^n}$ es la **aproximación decimal exacta de α de orden n por exceso**. Además, respecto a la distancia

$$\mathrm{d}\left(\frac{c}{10^n}, \alpha\right) < \mathrm{d}\left(\frac{c}{10^n}, \frac{c+1}{10^n}\right) = \frac{1}{10^n}.$$

Dado $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, con $\frac{a}{b}$ irreducible, vamos hallando sus aproximaciones decimales por defecto, con cada vez más cifras decimales. Es decir, iteramos el proceso de ir añadiendo ceros al dividendo a y proseguimos la división entre b. En cada paso puede ocurrir dos cosas:

1. Si α es un número decimal exacto, todas las cifras decimales a partir de un orden n son cero.

2. Si α no es un número decimal exacto, vamos obteniendo los restos de la división entera de $a \cdot 10^n$ entre b. Como todos estos restos son números naturales estrictamente menores que b, sólo pueden tomar un número finito de valores y por tanto en un número finito de divisiones (a lo más "b") vuelve aparecer un mismo resto, momento a partir del cual el proceso se repite. Es decir, a partir de un rango, las cifras decimales de las aproximaciones por defecto se repiten periódicamente. En este caso se habla de **número decimal periódico**.

Si el conjunto de las cifras decimales que se repiten, el periodo, empieza inmediatamente después de la coma, se dice que es una expresión decimal **periódica pura**, si no diremos que es una expresión **decimal periódica mixta**. Si el periodo es 0 se trata de un número decimal exacto. A cada número racional se le asocia una expresión decimal finita (exacta) o ilimitada (periódica).

Definición 1.19 Notación decimal exacta en base 2
Un **número decimal binario exacto** es un número racional que se puede expresar como una fracción de enteros donde el denominador es una potencia de 2.

Ejemplo 1.20

Los números racionales $\frac{3}{2}$, $-\frac{11}{4}$ y 7 pueden ser escritos en notación decimal binaria

exacta como:

$$\frac{3}{2} \equiv \frac{11_{(b)}}{10_{(b)}} = 1{,}1_{(b)}, \quad -\frac{11}{4} \equiv -\frac{1011_{(b)}}{100_{(b)}} = -1{,}11_{(b)} \text{ y } \quad 7 = \frac{7}{1} \equiv \frac{111_{(b)}}{1_{(b)}} = 111{,}0_{(b)}$$

Los números $\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{3}$ sólo admiten una expresión decimal binaria periódica.

$$\frac{1}{5} = 0{,}2 \equiv \frac{1_{(b)}}{101_{(b)}} = 0{,}00110001100011...{}_{(b)}, \quad \frac{1}{3} = 0{,}3333... \equiv \frac{1_{(b)}}{11_{(b)}} = 0{,}010101_{(b)}. \clubsuit$$

Observación La expresión decimal finita o ilimitada de un número decimal depende de la base numérica en la que se le represente.

Un experimento inductivo

Un segmento unitario es dividido en dos partes de igual longitud. Sólo una de esas partes se vuelve a dividir en dos de la misma longitud. Si el proceso se reitera sucesivamente, se continúa haciendo este tipo de división con una de las partes obtenidas en el proceso de división anterior.

Se obtiene una sucesión P de segmentos disjuntos, salvo sus extremos, cuyas longitudes son representables por un número racional;

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 \equiv 0{,}1_{(b)}, \quad \frac{1}{4} = 0{,}25 \equiv 0{,}01_{(b)}, \quad \frac{1}{8} = 0{,}125 \equiv 0{,}001_{(b)}, \cdots$$

Elegido un subconjunto finito de segmentos de P y unidos los segmentos por los extremos, se construye un segmento rectilíneo cuya cierta longitud se expresa mediante una expresión decimal binaria finita. Por ejemplo, con los segmentos de longitud $0{,}01_b$, $0{,}001_b$ y $0{,}00001_b$ se construye un segmento de longitud $0{,}01101_b$.

Al elegir todo el conjunto P y unirlos sus segmentos, ¿se reconstruye el segmento inicial? Si es así, entonces su longitud se podría expresar mediante una expresión decimal binaria ilimitada, periódica, $0{,}1111\cdots_b$. Así pues, se tendría en términos de longitud que $1 \equiv 0{,}1111\cdots_b$.

El segmento construido con un subconjunto no finito de P que correspondiera a una expresión decimal binaria periódica, por ejemplo $0{,}001001001\cdots_b$, nos permite observar un segmento n-esimo es utilizado puesto que el correspondiente dígito n-esimo de la expresión decimal es 1. Este dígito es 0, si no se utiliza dicho segmento.

Si los ceros de una expresión decimal binaria ilimitada están distribuidos mediante un patrón fijo repetido una y otra vez dentro de esa expresión, entonces la longitud del segmento unión se expresa mediante un número racional.

A un segmento unión correspondiente a una expresión decimal binaria ilimitada no periódica, por ejemplo $0{,}101001000100001\cdots_b$, no se le puede asignar una longitud racional. Es ahora cuando se debe dar sentido, en términos de longitud, a las expresiones decimales binarias ilimitada no periódicas ampliando el concepto de número incluyendo a los denominados **números irracionales**.

En un número irracianal ocurre que la distribución de los dígitos 0 en la expresión decimal binaria ilimitada no siguen un patrón reiterado exacto como en las expresiones periódicas.

Observación Al utilizar base 2 podemos interpretar que un número decimal binario exacto, por ejemplo $0{,}00101_{(b)}$, puede ser expresado con una única expresión decimal binaria ilimitada como $0{,}0010011111\cdots_{(b)}$. Es decir, $0{,}00101_{(b)} \equiv 0{,}0010011111\cdots_{(b)}$. Esto es así puesto que la longitud de las piezas correspondientes a la expresión $0{,}0000011111_b$ es la misma longitud de la pieza de longitud $0{,}00001_b$, dado que esa cola de dígitos 1 se obtienen por sucesivas divisiones del segmento de longitud $0{,}000001_b$. Análogamente, se tiene en base 10 que $0{,}125 \equiv 0{,}1249999\cdots$.

> Un número real podría verse, bajo forma numérica decimal, como un número entero seguido de una infinidad de decimales. Es decir, un número real es un número racional o un irracional.

Ejemplo 1.21

El número $0{,}324324324324324\ldots$ es el número racional $\dfrac{324}{999}$.

El número $12{,}235414141414141\ldots$ es el número racional $\dfrac{1211306}{99000}$.

El número $1,414213562373095048801688724209698078569671875376 94\ldots$ es un número irracional que suele escribirse como $\sqrt{2}$.

El número $0{,}12345678910111213141516171819202 1\ldots$ es un número irracional. ♣

Práctica 1.22

Determine aquellos números que son racionales, y en su caso escriba la forma de fracción del número. $a = 120{,}1212112112112\ldots$,
$b = 22{,}11521515151515\ldots$, $c = 1,21416181101121141161\ldots$,
$d = 10{,}120340056000780000910000011120000001314\ldots$.

Práctica 1.23

Determine una expresión decimal de los números racionales en base 10 y en base 2.

$$a = \frac{15}{6}, \quad b = \frac{1}{20} \quad \text{y} \quad c = \frac{25}{48}.$$

Observación Partir de una definición de este tipo dado para construir los números reales plantea problemas incluso cuando se le hubiese dado un sentido preciso a las expresiones decimales (ilimitadas).

Un inconveniente es que la expresión decimal no es única, pues $0,999999999\ldots$ y $1,0000000000\ldots$ representan el mismo número real.

Otro inconveniente es que las operaciones entre expresiones decimales no siempre son tan fáciles de definir. Para conocer la quinta cifra decimal de una suma o de un producto de expresiones decimales ilimitadas habría que conocer todas las cifras decimales de los números considerados: un cambio en la milésima cifra decimal puede producir una alteración en todas las demás que se iría propagando de derecha a izquierda.

Nota De las formulaciones más precisas que se dieron a lo largo del siglo XIX del concepto de número real, la que más se aproximaba al concepto de expresión decimal, fue la que propuso Weierstrass, que expresaba el concepto mediante intervalos encajados. Dichos intervalos se iban formando con las aproximaciones decimales finitas por defecto y por exceso de la expresión decimal ilimitada.

Nota El conocimiento de que las medidas de la diagonal y del lado de un cuadrado son un par de números inconmensurables se debe a los matemáticos griegos. Es decir, la razón entre esas medidas no es un número racional. La escuela pitagórica se planteó si admitir únicamente las razones correspondientes a medidas conmensurables, los números racionales. Sólo existía una salida a esa dificultad: o se consideraba que la diagonal de un cuadrado no se entendía como medible, o se aceptaba la existencia de nuevos números imperfectos; los que serían definidos por expresiones decimales ilimitadas (no periódicas). Las cantidades incomensurables afectaba a la forma de entender resultados como los teoremas de Tales y de Pitagoras.

1.2. El cuerpo de los números reales

Una vez descritos los números racionales, $\mathbb{Q}$, y sus expresiones decimales ilimitadas, introducimos directamente los números reales, $\mathbb{R}$, haciendo uso de las propiedades que comparte con $\mathbb{Q}$, ya que los dos son cuerpos ordenados, y enunciado la propiedad que no comparten. Con la presentación de $\mathbb{R}$ de forma directa nos obliga a demostrar la existencia de este cuerpo ordenado y construir, al menos, un modelo de él.

Supondremos pues que existe un cuerpo $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ ordenado, extensión del cuerpo ordenado $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leqslant)$ y que cumple la propiedad del supremo. Es decir, $\mathbb{R}$ contiene a $\mathbb{Q}$ y cumple las veintiséis propiedades que cumple $\mathbb{Q}$ más el axioma del supremo.

Axioma del supremo

27. Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente tiene supremo.

Los elementos de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ se denominan **números irracionales**.

Observación El hecho de que haya expresiones decimales que no definen un número racional se traduce en que en $\mathbb{Q}$ no se cumple la propiedad del supremo. Es decir, existen en $\mathbb{Q}$ subconjuntos acotados superiormente que no admiten supremo. Por ejemplo, el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 < 5\}$ no posee supremo en $\mathbb{Q}$. Sin embargo, en $\mathbb{R}$ si tiene y se representa con $\sup(A) = \sqrt[3]{5}$.

Observación La compatibilidad del orden con las operaciones permite deducir de la propiedad del supremo la propiedad del ínfimo (véase el ejercicio 1.99).

Nota Si un conjunto A no es acotado superiormente se escribe $\sup(A) = \infty$. Análogamente, se escribe $\text{ínf}(A) = -\infty$ para indicar que A es un conjunto no acotado inferiormente. Evidentemente, estos símbolos $-\infty$ y ∞ son muy utilizados en el texto, sin embargo no representan a número real alguno.

Ejemplo 1.24 **El número e**

El conjunto: $A = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}$ es un conjunto acotado superiormente puesto que al desarrollar mediante el binomio de Newton cada elemento de A se obtiene:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Así se observa que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Al supremo de A, se denomina número $e = \sup\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n | n \in \mathbb{N}\right\}$. ♣

Ejercicio 1.25 **Unicidad del supremo y del ínfimo**

Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, demuestre los siguientes apartados:

1. Si existe el máximo, o el mínimo, del conjunto A, entonces éste es único.
2. Si existe el supremo, o el ínfimo, del conjunto A, entonces éste es único.
3. Si existe el supremo s del conjunto A y $s \in A$, entonces s es el máximo de A.
4. Si existe el ínfimo i del conjunto A e $i \in A$, entonces i es el mínimo de A.

Solución
1. Supuesto que existen $M, M' \in A$ tales que para cualquier $x \in A$ se cumple que $x \leqslant M$ y $x \leqslant M'$. En particular, se cumple que $M' \leqslant M$ y $M \leqslant M'$, luego se obtiene $M = M'$ directamente de la propiedad antisimétrica. Lo mismo ocurre con el mínimo.

2. Como el supremo de A es el mínimo de las cotas superiores, entonces es único al aplicar la primera propiedad. Similar razonamiento se hacer con el ínfimo. ♣

En $\mathbb{R}$ se definen:

- El **valor absoluto** de $a \in \mathbb{R}$: $|a| = \begin{cases} -a & \text{si} \quad a < 0 \\ a & \text{si} \quad a \geqslant 0 \end{cases}$,

  que cumple las propiedades:

  - $|a| \geqslant 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$. $|a| = 0$ si y sólo si $a = 0$.
  - $|ab| = |a|\,|b|$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
  - $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

- La **distancia entre dos números** $\mathrm{d}(a, b) = |a - b|$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

- La **parte entera de un número**: Para cualquier $a \in \mathbb{R}$. Se denomina **parte entera** de a al número entero $z \in \mathbb{Z}$ tal que

  $$z \leqslant a < z + 1 \ .$$

  Se denota por $E(a)$ o $[a]$.

Observación: $E(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Además, $E(2,5) = 2$ y $[-2,5] = -3$.

Ejemplo 1.26 **Aproximación decimal exacta de un número real**
Veamos como se obtiene la expresión decimal de un número real usando la parte entera del número. Se calcula el truncamiento, de cualquier orden $n \in \mathbb{N}$, de un número real a, o lo que es lo mismo, la **aproximación decimal exacta** de a de orden n **por defecto** y la **aproximación por exceso**.
Sean $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Se considera el número $10^n a$. Se tiene que

$$E(10^n a) \leqslant 10^n a < E(10^n a) + 1 \iff \frac{E(10^n a)}{10^n} \leqslant a < \frac{E(10^n a) + 1}{10^n}.$$

Los números $\dfrac{E(10^n a)}{10^n}$ y $\dfrac{E(10^n a)+1}{10^n}$ son dos números decimales exactos, de n cifras decimales, consecutivos que se denominan, respectivamente, aproximación decimal de a de orden n por defecto y por exceso. ♣

Observación Una aproximación decimal exacta, del orden 7 y por defecto, del número $\sqrt{2}$ es $1,4142135$, y del número e es $2,7182818$. Con $\sqrt{2}$ representamos al números irracional positivo que cumple la ecuación $x^2 = 2$, ya que esa ecuación no posee raíces racionales.

Sucesión de números racionales

Se considera el conjunto $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ de aplicaciones de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$. Cada una de estas aplicaciones es denominada **una sucesión de números racionales**. Además, como existe una biyección de $\mathbb{N}$ con cualquier subconjunto infinito A de $\mathbb{N}$, entonces, por extensión, se denomina sucesión a cualquier aplicación del conjunto $\mathbb{Q}^A$.

Ejemplo 1.27 **Notaciones de una sucesión numérica**

La sucesión $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $s(n) = \dfrac{n^2+3n+1}{n^2+5}$ suele ser descrita haciendo uso del conjunto imagen de la aplicación $\{s(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $\{s(n)\}$ indicando un término genérico $s(n) = \dfrac{n^2+3n+1}{n^2+5}$ o término general.

Otra formas son

$$\left\{\frac{n^2+3n+1}{n^2+5}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ o } \left\{\frac{n^2+3n+1}{n^2+5}\right\}, \text{ y } \left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+5}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ o } \left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+5}\right).$$

También se usan las notaciones $(s(n))_{n\in\mathbb{N}}$ o $(s(n))$, y $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o (s_n) para casos generales sin destacar si está definida para $\mathbb{N}$ o una parte infinita de $\mathbb{N}$. ♣

Nota Cuando se escribe la sucesión $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ se omite decir que está definida en $A = \{n \in \mathbb{N} | n > 0\}$. Este conjunto A se sobreentiende.
Lo mismo ocurre con la sucesión $\left(\dfrac{n^2-5n+1}{n^2-3n+2}\right)$ donde se excluyen implícitamente los casos de $n = 1$ y $n = 2$.

Nota La suma, $+$, y el producto, $\cdot$, de dos sucesiones está definida como la suma y producto de aplicaciones. Así como, el producto de una sucesión por un escalar $\lambda \in \mathbb{Q}$.

$$(c_n) = (a_n) + (b_n) \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = a_n + b_n.$$
$$(c_n) = (a_n)(b_n) \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = a_n b_n.$$
$$(c_n) = \lambda(a_n) \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \lambda a_n.$$

Práctica 1.28 **Estructura algebráica en $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$**
Demuestre que $\left(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \ + \ \cdot\right)$ tiene estructura de anillo con elemento unidad, y que $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ con la suma y el producto por un escalar es un $\mathbb{Q}$ espacio vectorial.

Ejemplo 1.29 **Representaciones gráficas de una sucesión numérica**
Una sucesión puede ser representada mediante el grafo constituido por el conjuntos de puntos $G = \{(n, a_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q} | n \in \mathbb{N}\}$ como se puede ver en la figura 1.3.

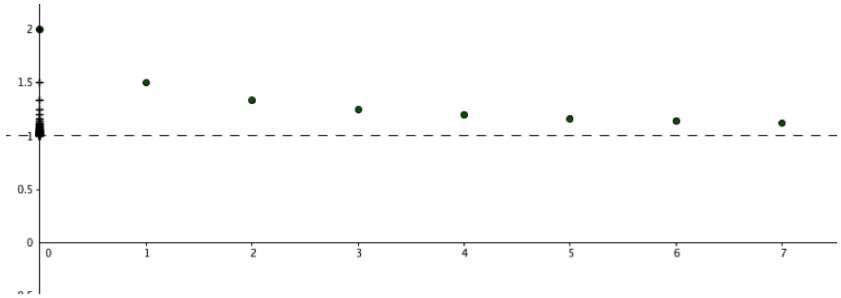

Figura 1.3: Dos representaciones de sucesión $(a_n) \subset \mathbb{Q}$.

También se puede representar como la proyección de esos puntos en el eje que representa a $\mathbb{Q}$ como puede verse en la figura 1.3. Sin embargo, la forma más usada para representar una sucesión es como muestra la figura 1.4.

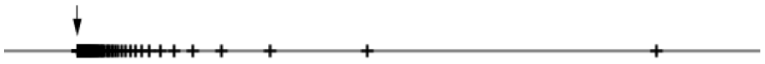

Figura 1.4: Representación de una sucesión en la recta $\mathbb{Q}$.

Ejemplo 1.30
La sucesión del experimento inductivo, muestra claramente la definición de la sucesión

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8}, \cdots \quad \text{de término general } \frac{1}{2^n},$$

que escrita en notación binaria decimal queda:

$0,1_b,\ 0,01_b,\ 0,001_b,\ 0,0001_b,\cdots$ donde el término general a_n queda escrito en binario con los $n-1$ primeros decimales que son 0, seguido del decimal 1.

Es claro que los términos de la sucesión son números positivos que cada vez están más cerca al número 0. Puesto que para cualquier número racional tan pequeño como se quiera, $\epsilon > 0$, existe un primer término de la sucesión n_0 tal que los siguientes términos están a una distancia de 0, $\left|\frac{1}{2^n} - 0\right|$ menor que el tomado ϵ.

$$\forall \epsilon \in \mathbb{Q},\ \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0, \text{ entonces } \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \epsilon. \quad \clubsuit$$

Ejemplo 1.31

Al calcular los valores numéricos de los términos de $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$, o al representarlos, se ve que los términos se aproximan sucesivamente cada vez más a 0. Esto suele denotarse con la expresión $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \to 0$ o $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$.

Ver una tendencia no basta, por tanto, hay que demostrar que eso es cierto. Por ejemplo, de la forma siguiente. Para cada distancia, tan pequeña como se quiera, que se tome, $\epsilon > 0$, se desea evaluar si hay un primer índice $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que la distancia que separa a 0 de cada uno los términos $\frac{(-1)^n}{n}$ con índice mayor que $n > n_\epsilon$ es menor que la distancia ϵ. Es decir, $\forall \epsilon \in \mathbb{Q}$, $\epsilon > 0$ se busca n_ϵ tal que $\forall n \in \mathbb{N};\ n > n_\epsilon$ se cumple que

$$d\left(\frac{(-1)^n}{n}, 0\right) = \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Para que se cumpla tal desigualdad basta elegir a $n_\epsilon = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$. $\clubsuit$

Observación Ocurre que para cada ϵ existe un $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ particular. En el resto del texto se denotará por n_0 a n_ϵ pero sobre entendiendo que ese n_0 puede ser distinto para cada ϵ.

Definición 1.32 Sucesión nula
Una sucesión $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ se dice que es nula, o que converge a 0, si y sólo si para todo $\epsilon \in \mathbb{Q},\ \epsilon > 0$, existe un subíndice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier subíndice $n > n_0$ se cumple que $|a_n| < \epsilon$.

De una sucesión nula (a_n) se dice que el límite de la sucesión es 0. Se escribe como $\lim_n a_n = 0$. Son muy comunes las expresiones $\lim a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Nota Se define sucesión nula en un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ de la misma forma, simplemente escribiendo $(a_n) \subset \mathbb{K}$ y $\epsilon \in \mathbb{K}$ en lugar de $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ y $\epsilon \in \mathbb{Q}$.

Ejercicio 1.33
Cualquier $\mathbb{Q}$-combinación lineal de dos sucesiones nulas es una sucesión nula.
(Resultado análogo en $\mathbb{K}$)
Solución Sea la sucesión $(c_n) = \lambda(a_n) + \mu(b_n)$ donde (a_n) y (b_n) son nulas, y $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$.

$$|c_n| = |\lambda a_n + \mu b_n| \leqslant |\lambda||a_n| + |\mu||b_n|.$$

Dado $\epsilon \in \mathbb{Q},\ \epsilon > 0$, se considera $n_0 = \text{máx}\{n_a, n_b\}$ donde se considera:

$$\text{Para } \frac{\epsilon}{2|\lambda|} \text{ existe } n_a \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_n| < \frac{\epsilon}{2|\lambda|}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_a.$$

$$\text{Para } \frac{\epsilon}{2|\mu|} \text{ existe } n_b \in \mathbb{N} \text{ tal que } |b_n| < \frac{\epsilon}{2|\mu|}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_b.$$

Así pues, $|c_n| \leqslant |\lambda||a_n| + |\mu||b_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Es decir la sucesión (c_n) es una sucesión nula. ♣

Práctica 1.34
Cualquier $\mathbb{Q}$-combinación lineal de sucesiones nulas es una sucesión nula.
(Resultado análogo en $\mathbb{K}$)

Práctica 1.35
Todo producto de dos sucesiones nulas es una sucesión nula.
(Resultado análogo en $\mathbb{K}$)

Práctica 1.36 **Estructura algebráica de las sucesiones nulas**
Sea $N_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de sucesiones nulas de números racionales. Demuestre que $(N_{\mathbb{Q}}\ +\ \cdot)$ tiene estructura de anillo sin elemento unidad y que $N_{\mathbb{Q}}$ con la suma y el producto por un escalar es un $\mathbb{Q}$ espacio vectorial.
(Resultado análogo en $\mathbb{K}$)

Ejemplo 1.37
La sucesión de término general $\frac{1}{n}$ es una sucesión nula, y la sucesión de término general $\frac{n+1}{n}$, es decir $1 + \frac{1}{n}$, no es una sucesión nula. ♣

Observación Se dice de una sucesión de números racionales (a_n) que converge al número racional k, si y sólo si la sucesión de término general $a_n - k$ es una sucesión nula.

Definición 1.38 Sucesión convergente
Una sucesión $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ se dice que converge al número $k \in \mathbb{Q}$ si y sólo si para todo $\epsilon \in \mathbb{Q},\ \epsilon > 0$, existe un subíndice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier subíndice $n > n_0$ se cumple que $|a_n - k| < \epsilon$.

De una sucesión (a_n) convergente al número k se dice que k es el **límite de la sucesión** (a_n) y se escribe $\lim_n a_n = k$, aunque también son muy comunes las expresiones $\lim a_n = k$, $\lim_{n\to\infty} a_n = k$.

Nota Se define sucesión convergente en un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ de la misma forma, simplemente escribiendo $(a_n) \subset \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{K}$ y $\epsilon \in \mathbb{K}$ en lugar de $(a_n) \subset \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{Q}$ y $\epsilon \in \mathbb{Q}$.

Ejercicio 1.39 **Una sucesión convergente es un conjunto acotado**

Sea $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ una sucesión convergente a $k \in \mathbb{Q}$, entonces existen dos números $m, M \in \mathbb{Q}$ tales que $m \leqslant a_n \leqslant M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(Resultado análogo en $\mathbb{K}$)

Solución

Para un número racional $\epsilon > 0$ existe un subíndice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera subíndices $n > n_0$ se cumple que $|a_n - k| < \epsilon$. Esto significa que a distancia de k mayor que ϵ hay menos de $n_0 - 1$ términos de la sucesión.

Se consideran

$m = \text{mín}\{a_1, \cdots, a_{n_0+1}, k-\epsilon, k+\epsilon\}$ y $M = \text{máx}\{a_1, \cdots, a_{n_0+1}, k-\epsilon, k+\epsilon\}$. ♣

Ejemplo 1.40

Hay sucesiones de números racionales que son convergentes en $\mathbb{Q}$, por ejemplo, $\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$ que converge a 1. También, hay sucesiones que no convergen en $\mathbb{Q}$ como $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$, (2^n) y $((-n)^n)$. ♣

Definición 1.41 **Límite de una sucesión**
Se dice que $k \in \mathbb{Q}$ es el límite de la sucesión $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ si y sólo si (a_n) converge a k. Es decir,
$k = \lim_n a_n \iff \forall \epsilon \in \mathbb{Q},\ \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}; n > n_0,\ |a_n - k| < \epsilon$.

Son muy comunes las expresiones del estilo $\lim a_n = k$, $\lim_{n\to\infty} a_n = k$ para indicar el límite de una sucesión.

Nota Se define límite en un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ de la misma forma, simplemente escribiendo $(a_n) \subset \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{K}$ y $\epsilon \in \mathbb{K}$ en lugar de $(a_n) \subset \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{Q}$ y $\epsilon \in \mathbb{Q}$.

Ejemplo 1.42 **Sucesión no convergente en $\mathbb{Q}$.**
Son sucesiones que no tienen límite en $\mathbb{Q}$. La sucesión de término general $a_n = (-1)^n$ no converge pues cumple que $|a_{n+1} - a_n| = 2,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Si existiese $\lim_n a_n = k$ ocurriría que para cada número racional $\epsilon > 0$ y para algún $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N},\ n > n_\epsilon,\ |a_n - k| < \epsilon$ Ahora bien,

$$2 = |a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - k + k - a_n| \leqslant |a_{n+1} - k| + |a_{n+1} - k| < 2\epsilon,$$

lo cual es una contradicción.

La sucesión $b_n = 2^n$ no converge pues cumple $|a_{n+1} - a_n| = 2^n > 2$.

Cualquier sucesión (c_n) que cumpla que $|c_{n+1} - c_n| < |c_{n+2} - c_{n+1}|$ no es convergente, pues basta observar que

$$|c_{n+1} - c_n| < |c_{n+2} - c_{n+1}| = |c_{n+2} - k + k - c_{n+1}| \leqslant |c_{n+2} - k| + |k - c_{n+1}|. \quad \clubsuit$$

Práctica 1.43
Si una sucesión (c_n) cumple que $|c_m - c_n| < |c_c - a_q|$ para cualesquiera $m, n, q, p \in \mathbb{N}$ tal que $n < m < q < p$, entonces (c_n) no es convergente.
(Resultado análogo en $\mathbb{K}$)

Ejercicio 1.44 **El límite de una sucesión convergente es único**
Si se supone que una sucesión $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ converge a un número $k \in \mathbb{Q}$ y a otro número $h \in \mathbb{Q}$ tales que $h \neq k$, entones se considera el número $\epsilon = \dfrac{|h-k|}{2}$.

Como $\lim_n a_n = k$, entonces existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - k| < \epsilon,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_k$.
Como $\lim_n a_n = h$, entonces existe $n_h \in \mathbb{N}$ tal que $|a_m - k| < \epsilon,\ \forall m \in \mathbb{N},\ m > n_h$.

Si se toma $n_0 = \text{máx}\{n_k, n_h\}$, entonces se cumple para cada $n > n_0$

$$|h-k| = |h-a_n+a_n-k| \leqslant |h-a_n| + |a_n-k| < \epsilon+\epsilon = |h-k|,$$

lo cual es una contradición. ♣ (Resultado análogo en $\mathbb{K}$)

Definición 1.45 Sucesión de Cauchy
Una sucesión $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ se dice que es de Cauchy si y sólo si para cualquier $\epsilon \in \mathbb{Q},\ \epsilon > 0$, existe un subíndice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera dos subíndices $p > n_0,\ q > n_0$ se cumple que $|a_p - a_q| < \epsilon$.

Nota Se define sucesión de Cauchy en un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ de la misma forma, simplemente escribiendo $(a_n) \subset \mathbb{K}$ y $\epsilon \in \mathbb{K}$ en lugar de $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ y $\epsilon \in \mathbb{Q}$.

Ejercicio 1.46 **Una sucesión de Cauchy es un conjunto acotado**
Sea (a_n) una sucesión de Cauchy, entonces existen dos números $m, M \in \mathbb{Q}$ tales que $m \leqslant a_n \leqslant M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. (Resultado análogo en $\mathbb{K}$)
Solución
Para un número racional $\epsilon > 0$ existe un subíndice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera subíndices $p > n_0,\ q > n_0$ se cumple que $|a_p - a_q| < \epsilon$. Esto significa que a distancia de a_p mayor que ϵ hay menos de $p+1$ términos de la sucesión, supuestos $p < q$.

Se consideran
$m = \text{mín}\{a_1, \cdots, a_{p+1}, a_p - \epsilon, a_p + \epsilon\}$ y $M = \text{máx}\{a_1, \cdots, a_{p+1}, a_p - \epsilon, a_p + \epsilon\}$ ♣

Ejercicio 1.47 **Una sucesión convergente en $\mathbb{Q}$ es de Cauchy**
Si (a_n) es tal que $\lim\limits_n a_n = a \in \mathbb{Q}$, entonces (a_n) es una sucesión de Cauchy,
(Resultado análogo en $\mathbb{K}$)
Solución
Sea $\epsilon \in \mathbb{Q},\ \epsilon > 0$. Como (a_n) converge a k, entonces si para $\dfrac{\epsilon}{2}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N},\ n > n_0$, se cumple $|a_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Para ϵ, se considera el índice n_0 anterior y para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N},\ p > n_0$ y $q > n_0$ se tiene

$$|a_p - a_q| = |a_p - a + a - a_q| \leqslant |a_p - a| + |a - a_q| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \quad ♣$$

Ejemplo 1.48 **Una sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$ no convergente en $\mathbb{Q}$**
Basta considerar una expresión decimal ilimitada, no periódica, es decir, que no le corresponda a un número racional como $0,123456789101112131415....$ Para construir

una sucesión de números racionales, $a_1 = 0{,}1$, $a_2 = 0,12$, $a_3 = 0,123$ y sucesivamente, siendo el término general a_n es el número racional obtenido al quedarse con los n primeros decimales de esa expresión ilimitada.

Es claro por su construcción que esta sucesión es de Cauchy. Sin embargo no existe ningún número racional al que converge la sucesión. ♣

Ejercicio 1.49 **Suma de una sucesión de Cauchy y una convergente**
Si $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ es una sucesión converge hacia $a \in \mathbb{Q}$ y $(b_n) \subset \mathbb{Q}$ es una sucesión de Cauchy, entonces la sucesión $(a_n) + (b_n)$ es de Cauchy. (Resultado análogo en $\mathbb{K}$)
Solución
Para cada número $\epsilon \in \mathbb{Q},\ \epsilon > 0$.

De $\lim_n a_n = a$ se tiene que para $\dfrac{\epsilon}{3}$ existe $n_a \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N},\ n > n_a$ se cumple $|a_n - k| < \dfrac{\epsilon}{3}$

De (b_n) es de Cauchy se tiene que para $\dfrac{\epsilon}{3}$ existe $n_b \in \mathbb{N}$ tal que para cada $p, q \in \mathbb{N},\ p > n_b,$
$q > n_b$, se cumple $|b_p - b_q| < \dfrac{\epsilon}{3}$.

Al considerar $n_0 = \text{máx}\{n_a, n_b\}$, para $p > n_0$ y $q > n_0$ se tiene:

$$|a_p + b_p - (a_q + b_q)| = |a_p - a + a - a_q + b_p - b_q| \leqslant |a_p - a| + |a - a_q| + |b_p - b_q| = 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

Luego, $(a_n) + (b_n)$ es una sucesión de Cauchy. ♣

Práctica 1.50 **Suma de sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$**
Demuestre que si (a_n) y (b_n) son sucesiones de Cauchy, entonces la sucesión suma $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$ es una sucesión de Cauchy. (Resultado análogo en $\mathbb{K}$)

Práctica 1.51 **Producto de sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$**
Demuestre que si (a_n) y (b_n) son sucesiones de Cauchy, entonces la sucesión producto $(a_n)\dot{(}b_n) = (a_n b_n)$ es una sucesión de Cauchy. (Resultado análogo en $\mathbb{K}$)

Ejercicio 1.52 **Producto de una sucesión de Cauchy y una nula**
Si $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ es una sucesión de Cauchy y $(b_n) \subset \mathbb{Q}$ es una sucesión nula, entonces la sucesión $(a_n) \cdot (b_n)$ es nula. (Resultado análogo en $\mathbb{K}$)
Solución
Al ser (a_n) una sucesión de Cauchy, entonces es una sucesión acotada. Así pues, existe un número $r \in \mathbb{Q}$ tal que se cumple $|a_n| < r$ para todo n.

Al considerar $\epsilon \in \mathbb{Q},\ \epsilon > 0$, como (b_n) es de nula se tiene que para $\dfrac{\epsilon}{r}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N},\ \ n > n_0,\ q > n_b$, se cumple $|b_n| < \dfrac{\epsilon}{r}$.
Como $|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < r\dfrac{\epsilon}{r} = \epsilon$. Entonces $(a_n) \cdot (b_n)$ es una sucesión nula. ♣

Un modelo de números reales

Las sucesiones de Cauchy de números racionales pueden no ser convergente a un número racional, esto se suele expresar diciendo que $(\mathbb{Q}\ +\ \cdot)$ no es un cuerpo completo.

Definición 1.53 Cuerpo completo
Un cuerpo $(\mathbb{K}\ +\ \cdot)$ se dice completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy de elementos de $\mathbb{K}$ es una sucesión convergente en $\mathbb{K}$.

Se consideran el conjunto $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ de todas las sucesiones de Cauchy de $\mathbb{Q}$ y la relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ definida de la forma:

$$(a_n)\mathcal{R}(b_n) \iff \lim_n (a_n - b_n) = 0.$$

Si se considerar el conjunto $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}}$ de todas las sucesiones nulas de $\mathbb{Q}$, la relación $\mathcal{R}$ se puede describir de la forma

$$(a_n)\mathcal{R}(b_n) \iff (a_n) - (b_n) \in \mathcal{N}_{\mathbb{Q}} \iff (a_n - b_n) \in \mathcal{N}_{\mathbb{Q}}.$$

Esta relación es de equivalencia, puesto que cumple las propiedades:

1. Propiedad Reflexiva: $\forall (a_n) \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ se tiene $(a_n) - (a_n) = (0)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \lim_n 0 = 0$.

2. Propiedad Simétrica: Si $(a_n), (b_n) \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ tales que $(a_n)\mathcal{R}(b_n) \Rightarrow \lim_n (a_n - b_n) = 0$.
   Ahora bien, se tiene que $\lim_n (b_n - a_n) = \lim_n (-(a_n - b_n)) = 0 \Rightarrow (b_n)\mathcal{R}(a_n)$, puesto que cualquier combinación de sucesiones nulas es una sucesión nula.

3. Propiedad Transitiva: Si $(a_n), (b_n), (c_n) \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ tales que $(a_n)\mathcal{R}(b_n)$ y $(b_n)\mathcal{R}(c_n)$, entonces $\lim_n (a_n - b_n) = 0$ y $\lim_n (b_n - c_n) = 0$. Ahora bien, se tiene que

   $$\lim_n (a_n - c_n) = \lim_n (a_n - b_n + b_n - c_n) = \lim_n \big((a_n - b_n) + (b_n - c_n)\big) = 0.$$

   Luego, $(a_n)\mathcal{R}(c_n)$, puesto que cualquier combinación de sucesiones nulas es una sucesión nula.

Para cualquier $k \in \mathbb{Q}$, se considera la sucesión $(k)_{n\in\mathbb{N}}$ que pertenece a una clase del conjunto cociente $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}/\mathcal{R}$ que denominamos $[k] = \{(a_n) \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}} | \lim_n a_n = k\}$. Además, en este caso se identifica la clase con el número racional, es decir

$$\text{Si } k \in \mathbb{Q}, \text{ entonces } k \equiv [k] = [(a_n)] \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}, \quad \lim_n a_n = k.$$

Cada una del resto de clases de $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}/\mathcal{R}$ que no corresponden a ningún $k \in \mathbb{Q}$, es lo que denominamos un número irracional. Decir que i es un número irracional, es decir,

$$i \equiv [i] = [(a_n)] \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}, \quad \forall k \in \mathbb{Q} \quad \lim_n a_n \neq k,$$

además, en este caso se dice $\lim_n a_n = i$.

Nota $k \equiv [(k)] = (k)_{n\in\mathbb{N}} + \mathcal{N}_{\mathbb{Q}}$.

Definición 1.54 **Número real**
El conjunto $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}/\mathcal{R}$ es un modelo del conjunto de números reales. Es decir, existe una biyección entre el conjunto $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}/\mathcal{R}$ y $\mathbb{R}$.

Observación En muchos textos se considera que el conjunto $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}/\mathcal{R}$ es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. En este texto es indiferente tratar con $\mathbb{R}$ o con $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}/\mathcal{R}$, entendiendo que todo número real, ya sean racionales o irracionales, es el límite de una sucesión de números racionales.

Estructura algebraica de $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}/\mathcal{R} = \mathbb{R}^*$

En este texto se optó por la introducción del cuerpo de $\mathbb{R}$ como una extensión del cuerpo de $\mathbb{Q}$, y se ha construido el conjunto $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}/\mathcal{R}$ como modelo de $\mathbb{R}$. Queda pues definir las operaciones $+$ y $\cdot$, y la relación de orden $\leqslant$ en ese conjunto en $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}/\mathcal{R}$ para comprobar que los cuerpos ordenados $(\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}/\mathcal{R} \ + \ \cdot \ \leqslant)$ y $(\mathbb{R} \ + \ \cdot \ \leqslant)$ son isomorfos.

Nota En esta subsección denotamos a $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}/\mathcal{R}$ por $\mathbb{R}^*$. Además, dados dos elementos $a, b \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}/\mathcal{R} = \mathbb{R}^*$ escribiremos $a = [(a_n)]$ y $b = [(b_n)]$ para poder definir $a + b$ y $a \cdot b$ o, simplemente, ab en términos de clases.

Definición 1.55 **Suma y producto en $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}/\mathcal{R} = \mathbb{R}^*$**

$$+ : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^* \qquad a + b = [(a_n)] + [(b_n)] = [(a_n + b_m)]$$

$$\cdot : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^* \qquad a \cdot b = [(a_n)] \cdot [(b_n)] = [(a_n \cdot b_m)]$$

Aunque en esas definiciones se han tomado las sucesión de números racionales (a_n) y (b_n) como representantes de las clases $a = [(a_n)]$ y $b = [(b_n)]$, resulta que si se

hubieran tomados otros representantes distintos (a'_n) y (b'_n) resulta que

$$(a'_n) = (a_n) + (p_n) \quad \text{y} \quad (b'_n) = (b_n) + (q_n),$$

donde las sucesiones (p_n) y (q_n) son nulas. Así pues se tiene:

$$\begin{aligned} a+b &= [(a'_n)]+[(b'_n)] = [(a'_n+b'_n)] = [(a_n+p_n+b'_n+q_n)] = [(a_n+b_n+p_n+q_n)] = \\ &= [(a_n + b_n) + (p_n + q_n)] = [(a_n)] + [(b_n)], \end{aligned}$$

puesto que $(p_n + q_n)$ es una sucesión nula (ver 1.33).

$$\begin{aligned} a \cdot b &= [(a'_n)] \cdot [(b'_n)] = [(a'_n b'_n)] = [((a_n + p_n)(b'_n + q_n))] = \\ &= [(a_n b_n + b_n p_n + a_n q_n + p_n q_n)] = [(a_n b_n) + (b_n p_n) + (a_n q_n) + (p_n q_n)] = \\ &= [(a_n b_n)] + [(b_n p_n)] + [(a_n q_n)] + [(p_n q_n)] = [(a_n)] + [(b_n)], \end{aligned}$$

puesto que $(a_n q_n), (b_n p_n)$ son sucesiones nulas (ver ejercicio 1.52), y $[(p_n q_n)]$ es nula (ver ejercicio 1.35).

Ejemplo 1.56 **Elemento neutro y simétrico de la suma de $\mathbb{R}^*$**

Para la suma, el elemento neutro es $0 = [(0)_{n\in\mathbb{N}}]$, puesto que

$$a + 0 = [(a_n)] + [(0)_{n\in\mathbb{N}}] = [(a_n + 0)] = [(a_n)] = a$$

$0 + a = a$ se comprueba de forma análoga.

Para $a \in \mathbb{R}^*$ al elemento opuesto es x tal que $a + x = x + a = 0$.

$$a+x = [(a_n)]+[(x_n)] = [(a_n+x_n)] = (0)_{n\mathbb{N}} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_n+x_n = 0 \iff x_n = -a_n.$$

Así pues, el elemento opuesto de a es $[(-a_n)]$, denotado por $-a$. ♣

Práctica 1.57 **Propiedades la suma de $\mathbb{R}^*$**

Demostrar que la suma en $\mathbb{R}^*$ cumple la propiedad asociativa y la conmutativa.

Observación $(\mathbb{R}^* +)$ es un grupo conmutativo o grupo abeliano.

Ejemplo 1.58 **Elemento neutro y simétrico del producto de $\mathbb{R}^*$**

Para la suma, el elemento neutro es $1 = [(1)_{n\in\mathbb{N}}]$, puesto que

$$a \cdot 1 = [(a_n)] \cdot [(1)_{n\in\mathbb{N}}] = [(a_n \cdot 1)] = [(a_n)] = a$$

$1 \cdot a = a$ se comprueba de forma análoga.

Para $a \in \mathbb{R}^* - \{0\}$, el elemento inverso es x tal que $a \cdot x = x \cdot a = 1$. En la clase $a = [(a_n)]$ se puede elegir una sucesión tal $a_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$a \cdot x = [(a_n)] \cdot [(x_n)] = [(a_n x_n)] = (1)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_n x_n = 1 \iff x_n = \frac{1}{a_n}.$$

Así pues, el elemento opuesto de a es $\left[\left(\frac{1}{a_n}\right)\right]$, denotado por $\frac{1}{a}$. ♣

Observación Si en una sucesión hay un conjunto finito de términos nulos y el resto es positivo, podemos interpretar que la sucesión de los números inversos está bien definida, sin tener en cuenta esos términos nulos.

Práctica 1.59 **Propiedades del producto de $\mathbb{R}^*$**
Demostrar que el producto en $\mathbb{R}^*$ cumple la propiedad asociativa y la conmutativa.

Observación $(\mathbb{R}^* - \{0\}\ \cdot)$ es un grupo conmutativo o abeliano.

Práctica 1.60 **Propiedad distributiva en $\mathbb{R}^*$**
Demostrar que las suma y el producto en $\mathbb{R}^*$ cumplen la propiedad distributiva.

Observación $(\mathbb{R}^* + \cdot)$ es un cuerpo.

Subcuerpo $\mathbb{Q}^* \subset \mathbb{R}^*$ isomorfo a $\mathbb{Q}$
La aplicación $h : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ definida por $h(\alpha) = [(\alpha)_{n\in\mathbb{N}}]$ es una aplicación lineal inyectiva entre los cuerpos $(\mathbb{Q} + \cdot)$ y $(\mathbb{R}^* + \cdot)$. $\mathbb{Q}^* = h(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}^*$.

Observación Como $(\alpha)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ es una sucesión convergente a $\alpha \in \mathbb{Q}$, entonces es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$. Además $h(\alpha) \in \mathbb{R}^*$.

Nota El isomorfismo entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}^*$ nos permite identificar a los dos conjuntos, y utilizar la expresión *número racional* tanto para un número $a \in \mathbb{Q}$ como para la clase de $a = [(a)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{Q}^*$, donde $(a)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de término general constante.

Práctica 1.61
Demostrar que la aplicación h del cuadro anterior es un monomorfismo (aplicación lineal inyectiva) entre cuerpos. Es decir: $h(\alpha+\beta) = h(\alpha)+h(\beta)$ y $h(\alpha\beta) = h(\alpha)h(\beta)$

Orden en $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}/\mathcal{R}$

Sea $a = [(a_n)] \in \mathbb{R}^*$. Si existe $(b_n) \in a$ tal que $\lim_n b_n = 0$, entonces

$$a = [(a_n)] = [(b_n)] = 0.$$

Sea $a \in \mathbb{R}^*,\ a = [(a_n)]$ y un número racional $\epsilon > 0$. Como (a_n) es una sucesión de Cauchy, entonces para ϵ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p, q \in \mathbb{N},\ p > n_0, q > n_0$, se cumple $|a_p - a_q| < \epsilon$.

Si $a \neq 0$ entonces (a_n) no es una sucesión nula. Luego, existe algún $m \in \mathbb{N},\ m > n_0$ que cumple $|a_m| = |a_m - 0| \geqslant 2\epsilon$. Así pues, o $a_m \geqslant 2\epsilon$ o $a_m \leqslant -2\epsilon$.

Para todo $n > n_0$, como $m > n_0$ se cumple que $|a_n - a_m| < \epsilon$, es decir

$$-\epsilon < a_n - a_m < \epsilon \rightarrow a_m - \epsilon < a_n < a_m + \epsilon.$$

Si $a_m \geqslant 2\epsilon$, entonces $2\epsilon - \epsilon < a_m - \epsilon < a_n \rightarrow \epsilon < a_n$
Si $a_m \leqslant -2\epsilon$, entonces $a_n < a_m + \epsilon < -2\epsilon + \epsilon \rightarrow a_n < -\epsilon$.

En cualquier caso, para $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N},\ n > n_0$, se cumple $|a_n| > \epsilon$.

Ejemplo 1.62

Supuesto que existe $(b_n) \in a = [(a_n)] \in \mathbb{R}^*$ que cumple que existe un número racional $\epsilon > 0$ y un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N},\ n > n_0$, con $b_n > \epsilon$, entonces la sucesión (c_n) definida por

$$c_n = 1 \text{ si } n \leqslant n_0 \quad \text{y} \quad c_n = b_n \text{ si } n > n_0,$$

que es de Cauchy y cumple que $c_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Además,

$$a = [(a_n)] = [(b_n)] = [(c_n)]. \quad \clubsuit$$

Observación Este ejercicio indica que hay clases de $\mathbb{R}^*$ que contienen a una sucesión con todos sus términos números positivos. Aunque, baste comprobar que a partir de un término todos sean mayor que un determinado número positivo.

Se dispone del siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{*^+} &= \{a \in \mathbb{R}^* | \exists (a_n) \in a,\ \text{no nula y}\ \ a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\} = \\ &= \{a \in \mathbb{R}^* | \exists (a_n) \in a, \exists \epsilon \in \mathbb{Q},\ \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ a_n > \epsilon,\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0\}.\end{aligned}$$

Hay que observar que una clase $a \neq 0$ no contiene ninguna sucesión nula. Además, este conjunto cumple las propiedades:

1. $0 \notin \mathbb{R}^*$, puesto que 0 es la clase de sucesiones nulas.

2. Para cualquier $a \in \mathbb{R}^*$ se cumple que o $a \in \mathbb{R}^{*^+}$ o $a = 0$ o $-a \in \mathbb{R}^{*^+}$.

   Si la clase a contiene una sucesión nula, entonces $a = 0$.

   Si $a \neq 0$, entonces existe $(a_n) \in a$ tal que para $\epsilon \in \mathbb{Q},\ \epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ se cumple que o $a_n > \epsilon$ o $a_n < -\epsilon$ para cualquier $n \in \mathbb{N},\ n > n_0$. Así pues, o $a \in \mathbb{R}^{*^+}$ o $-a \in \mathbb{R}^{*^+}$.

3. Para cualquier $a, b \in \mathbb{R}^{*^+}$ se cumple $a + b \in \mathbb{R}^{*^+}$ y $ab \in \mathbb{R}^{*^+}$.

   Basta considerar para $(a_n) \in a,\ \epsilon_1 > 0,\ n_a,\ n > n_a,\ a_n > \epsilon_1$ y para

   $(b_n) \in b,\ \epsilon_2 > 0,\ n_b,\ n > n_b,\ b_n > \epsilon_2$.

Al elegir $n_0 = \text{máx}\{n_a, n_b\}$ se tiene $a_n + b_n > \epsilon_1 + \epsilon_2$ y $a_n b_n > \epsilon_1 \epsilon_2$.

Para $\epsilon > 0$ se tiene n_0 en el caso de la suma si $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dfrac{\epsilon}{2}$. Para el caso del producto $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \sqrt{\epsilon}$.

Observación La existencia del conjunto $\mathbb{R}^{*^+}$ permite definir un orden compatible con las operaciones en $\mathbb{R}^*$ (ver el ejemplo 1.3).

Definición 1.63 **Orden en $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}/\mathcal{R} = \mathbb{R}^*$**
La relación en $\mathbb{R}^*$ definida por

$$a \leqslant b \iff a = b \quad \text{o} \quad b - a \in \mathbb{R}^{*^+}$$

es una relación de orden total compatible con las operaciones.
$(\mathbb{R}^* \ + \ \cdot \ \leqslant)$ es un cuerpo ordenado.

Ejercicio 1.64 **El orden en $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}/\mathcal{R} = \mathbb{R}^*$en un orden dividido**
Si $a, b \in \mathbb{R}^*$ tales que $a < b$, entonces existe $c \in \mathbb{R}^*$ tal que $a < c < b$.
Solución
Basta considerar $c = \dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{2}b$, puesto que

$$a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a < \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b < \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b = b. \quad \clubsuit$$

Proposición 1.65
Si $a, b \in \mathbb{R}^*$ tales que $a < b$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ tal que $a < \alpha < b$.

Demostración
Si $a = [(a_n)] < b = [(b_n)]$, entonces $0 < [(b_n - a_n)]$. Así pues, tomado $\epsilon \in \mathbb{Q},\ \epsilon > 0$, entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \in \mathbb{N},\ n > n_1$ se tiene $b_n - a_n > \epsilon$.

Al considerar $\dfrac{\epsilon}{4}$, se considera:

$n_2 \in \mathbb{N},\ n_2 > n_1$ tal que $\forall n, m \in \mathbb{N},\ n > n_1$ se cumple $|a_n - a_m| < \dfrac{\epsilon}{4}$.

$n_3 \in \mathbb{N},\ n_3 > n_1$ tal que $\forall n, m \in \mathbb{N},\ n > n_1$ se cumple $|b_n - b_m| < \dfrac{\epsilon}{4}$.

Se denota $n_0 = \text{máx}\{n_2, n_3\} > n_1$ y se elige $m_0 \in \mathbb{N},\ m_0 > n_0$. En particular para m_0 y cualquier $n > n_0$ se cumple

$$a_{m_0} - \frac{\epsilon}{4} < a_n < a_{m_0} + \frac{\epsilon}{4} \quad \text{y} \quad b_{m_0} - \frac{\epsilon}{4} < b_n < b_{m_0} + \frac{\epsilon}{4}$$

Se considera $\alpha = \dfrac{1}{2}(b_{m_0} + a_{m_0})$ y su clase $\alpha = [(\alpha)_{n\in\mathbb{N}}]$.

$$\alpha - a_n > \alpha - a_{m_0} - \frac{\epsilon}{4} = \frac{1}{2}(b_{m_0} + a_{m_0}) - a_{m_0} - \frac{\epsilon}{4} = \frac{1}{2}(b_{m_0} - a_{m_0}) - \frac{\epsilon}{4} > \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{4}.$$

$$b_n - \alpha > b_{m_0} - \frac{\epsilon}{4} - \alpha = b_n - \frac{1}{2}(b_{m_0} + a_{m_0}) - \frac{\epsilon}{4} = \frac{1}{2}(b_{m_0} - a_{m_0}) - \frac{\epsilon}{4} > \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{4}.$$

Esto significa que $a_n < \alpha < b_n, \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \Rightarrow [(a_n)] < [(\alpha)_{n\in\mathbb{N}}] < [(b_n)]$. ♣

Nota El concepto de convergencia en $\mathbb{R}^*$ es similar a la convergencia en $\mathbb{Q}$, salvo que en este caso se considera $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^*,\ \epsilon > 0$, en lugar de $\forall \epsilon \in \mathbb{Q},\ \epsilon > 0$.

Proposición 1.66
Si $(a_n) \in \mathbb{Q}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$, entonces existe $a \in \mathbb{R}^*$ tal que (a_n) converge a a en $\mathbb{R}^*$. Además, $a = [(a_n)]$. Para $\epsilon \in \mathbb{Q}$ se tiene $\epsilon \in \mathbb{R}^+$; $\epsilon \equiv [(\epsilon)_{n\in\mathbb{N}})]$.

Demostración
Para cualquier $\epsilon \in \mathbb{R}^*, \epsilon > 0$, se considera $\epsilon' \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < \epsilon' < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Al ser (a_n) de Cauchy en $\mathbb{Q}$, entonces $(a_n) \in [(a_n)]$ que denominamos a. Se ha de comprobar que para ϵ existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ existe una clase $a \in \mathbb{R}^*$ tal que para cada subíndice $n > n_\epsilon$ se cumple $|a_n - a| < \epsilon$.

Como (a_n) una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$, se tiene que pare ese ϵ' existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo par de subíndice $n > n_0$ y $m > n_0$ se cumple $|a_n - a_m| < \epsilon'$. Es decir,

$$-\epsilon' < a_n - a_m < \epsilon'.$$

Fijado un subíndice $k > n_0$ se tiene que $-\epsilon' < a_k - a_m < \epsilon'$ para todo $m > n_0$.
Se consideran las clases $a_k = [(a_k)_{n\in\mathbb{N}}]$ y $2\epsilon' = [(2\epsilon')_{n\in\mathbb{N}}]$.

$$a - a_k = [(a_n)] - [(a_k)_{n\in\mathbb{N}}] = [(a_n - a_k)] < [(2\epsilon')_{n\in\mathbb{N}}] = 2\epsilon'.$$

$$a_k - a = [(a_k)_{n\in\mathbb{N}}] - [(a_n)] = [(a_k - a_n)] < [(2\epsilon')_{n\in\mathbb{N}}] = 2\epsilon'.$$

Luego, $|a_k - a| < \epsilon$ donde $a_k, a, \epsilon \in \mathbb{R}^*$. Además, esto ocurre para cualquier $k > n_0$. Así pues, para ϵ se elige $n_\epsilon = n_0$ que es el subíndice correspondiente a $\epsilon' \in \mathbb{Q}$. Es decir, $\lim\limits_{n} a_n = a$. ♣

Observación Toda sucesión de Cauchy de $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ es una sucesión $(a_n) = ((a_n)_{k\in\mathbb{N}})$ de Cauchy en $\mathbb{R}^*$ al considerar $a_k = [(a_k)_{n\in\mathbb{N}}]$ para cada k, dado que cada $(a_n)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathbb{Q}$.

Nota El concepto de sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^*$ es similar al de sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$. La diferencia estriba en que en este caso se considera $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^*,\ \epsilon > 0$, en lugar de $\forall \epsilon \in \mathbb{Q},\ \epsilon > 0$, donde utilizamos el número racional ϵ y la clase $\epsilon \equiv [(\epsilon)_{k\in\mathbb{N}}]$.

Para que $\mathbb{R}^*$ sea un modelo de $\mathbb{R}$ ha de comprobarse que toda sucesión de Cauchy de $\mathbb{R}^*$ es convergente, Es decir, que se trata de un cuerpo completo.

Proposición 1.67 $\mathbb{R}^*$ **es un cuerpo completo**
Si $(a_n) \in \mathbb{R}^*$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^*$, entonces existe $a \in \mathbb{R}^*$ tal que (a_n) converge a a en $\mathbb{R}^*$. Es decir, $\lim_n a_n = a$.

Demostración
Para cada subíndice n, se elige una sucesión $(b_k) \subset \mathbb{Q}$ tal que $a_n = [(b_k)]$ y un elemento de esta sucesión que denominamos $b_n \in \mathbb{Q}$ que cumple $b_n < a_n < b_n + \dfrac{1}{n}$.
Para cada $\epsilon' \in \mathbb{R}^*,\ \epsilon' > 0$, se considera $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n, m \in \mathbb{N},\ n > n_1$ y $m > n_1$, se cumple que $|a_n - a_m| < \dfrac{\epsilon'}{3}$. Además, se puede elegir ese subíndice n_1 de forma que $\dfrac{1}{n_1} < \dfrac{\epsilon'}{3}$
Como

$$|b_n - b_m| \leqslant |b_n - a_n| + |a_n - a_m| + |a_n - b_m| < \frac{1}{n} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{1}{m} < \frac{\epsilon'}{3} + \frac{\epsilon'}{3} + \frac{\epsilon'}{3} = \epsilon',$$

entonces $(b_n) \in \mathbb{Q}$ es una sucesión de Cauchy. Luego, existe $a \in \mathbb{R}^*$ tal que $a = [(b_n)]$.
Queda comprobar que $\lim_n a_n = a$. Para cualquier $\epsilon \in \mathbb{R}^*,\ \epsilon > 0$ se considera $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N},\ n > n_0$ se cumple $|b_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Además, se puede elegir ese subíndice tal que $\dfrac{1}{n_0} < \dfrac{\epsilon}{2}$
Dado que

$$|a_n - a| = |a_n - b_n + b_n - a| \leqslant |a_n - b_n| + |b_n - a| < \frac{1}{n} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

Luego, (a_n) converge a a. ♣

Proposición 1.68 $\mathbb{R}^*$ **es un cuerpo ordenado completo arquimediano**
Si $a \in {\mathbb{R}^*}^+,\ a = [(a_n)]$ y $b \in \mathbb{R}^*,\ b = [(b_n)]$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $ma > b$, es decir $[(m)_{n\in\mathbb{N}}][(a_n)] > [(b_n)]$.

Demostración
Inicialmente suponemos que $a = 1$. Como la sucesión $(b_n) \subset \mathbb{Q}$ converge a b, para $\epsilon = 1$ existe un subíndice n_0 tal que para todo subíndice $n > n_0$ se cumple $|b - b_n| < 1$, es decir, $b_n - 1 < b < b_n + 1$

Fijado un determinado n existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $m_1 > b_n + 1$, puesto que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado arquimediano. Luego, se considera $m_1 = [(m_1)_{n|in\mathbb{N}}]$ para que se cumpla $m_1 > b$.

Si $a > 0$, existe un número $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} = \left[\left(\frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right] < a$. Luego,

$$b < m_1 k \frac{1}{k} < m_1 k a < ma,$$

donde $m = [(m_1)_{n|in\mathbb{N}}][(k)_{n|in\mathbb{N}}]$. ♣

Como $\mathbb{R}$ se introdujo de forma axiomática y se ha construido $\mathbb{R}^*$, para poder identificar ambos conjuntos, queda comprobar que $(\mathbb{R}^* \ + \ \cdot \ \leqslant)$ y $(\mathbb{R} \ + \ \cdot \ \leqslant)$ son cuerpos ordenados isomorfos.

Ejemplo 1.69 **Expresión decimal del número $\sqrt{2}$.**
Con el número $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ se puede construir una sucesión $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ de Cauchy tal que $[(a_n)] = \sqrt{2}$, es decir que $\lim_n a_n = \sqrt{2}$

Se define $a_0 = E(\sqrt{2})$, $a_1 = \frac{E(10\sqrt{2})}{10}, \cdots, a_n = \frac{E(10^n\sqrt{2})}{10^n}, \cdots$ donde $E(x)$ representa la parte entera de x.

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,4,\ a_2 = 1,41,\ a_3 = 1,414,\ a_4 = 1,4142,\ a_5 = 1,41421,$$
$$a_6 = 1,414213,\ a_7 = 1,4142135,\ a_8 = 1,41421356,\ a_9 = 1,414213562, \cdots$$

La sucesión es de números racionales por la forma en la que está definida. Además, es una sucesión de Cauchy puesto que si $m > n$ entonces $|a_n - a_m| < \frac{1}{10^n}$, al igual que es una sucesión convergente a $\sqrt{2}$ puesto que $|a_n - \sqrt{2}| < \frac{1}{10^n}$.

A la vista de esta sucesión, se suele escribir $\sqrt{2} = 1,41421356\ldots$ como una expresión decimal ilimitada. ♣

Observación Aunque hay muchas sucesiones de números racionales que convergen a $\sqrt{2}$ se tiene que la expresión decimal ilimitada de $\sqrt{2}$ es única.

Práctica 1.70 **Expresión decimal de un número real.**
Demuestre que para cualquier $a \in \mathbb{R}$, la sucesión de números racionales de término general $a_n = \frac{E(10^n a)}{10^n}$ tiene límite a.

Ejemplo 1.71
Con el número $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ se puede construir una sucesión de dígitos $(d_n) \subset \mathbb{N}$ de forma inductiva $d_0 = E(\sqrt{2})$, $d_1 = E(10\sqrt{2}) - 10d_0, \cdots, d_n = E(10^n\sqrt{2}) - 10^n d_{n-1}, \cdots$ donde $E(x)$ representa la parte entera de x.

$$d_0 = 1,\ d_1 = 4,\ d_2 = 1,\ d_3 = 4,\ d_4 = 2,\ d_5 = 1,\ d_6 = 3,\ d_7 = 5,\ d_8 = 6, \cdots$$

Se define la sucesión de término general $a_n = \sum_{k=0}^{n} d_k 10^{-k}$ que coincide con la sucesión del ejemplo 1.69. Así pues, $\lim a_n = \sqrt{2}$.

Como el límite de $(a_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} d_k 10^{-k} \right)$ suele expresarse como $\sum_{k=0}^{\infty} d_k 10^{-k}$, se escribe $\sum_{k=0}^{\infty} d_k 10^{-k} = \sqrt{2}$. ♣

Cuerpo $\mathbb{R}^*$ isomorfo a $\mathbb{R}$
La aplicación $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ definida de la forma $h(a) = [(a_n)]$ donde

$$a_n = \frac{E(10^n a)}{10^n}$$

es un isomorfismo (aplicación lineal biyectiva) entre cuerpos ordenados.
Siendo $E(x)$ la parte entera de x,

La aplicación h es biyectiva claramente por la forma en la que se ha definido. Decir que la aplicación h es lineal (homomorfismo) significa que se cumplen las igualdades

$$h(a+b) = h(a) + h(b), \quad \text{y} \quad h(ab) = h(a)h(b).$$

Sean $h(a) = [(a_n)]$ y $h(b) = [(b_n)]$, es decir $h(a) + h(b) = [(a_n + b_n)]$.

Veamos $h(a+b) = [(a_n + b_n)]$. Para $\epsilon > 0$, entonces existe dos subíndices n_1 y n_2 tales que

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n > n_1 \quad \text{y} \quad |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n > n_2.$$

Al elegir $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$ se tiene para todo subíndice $n > n_0$ que

$$|(a_n + b_n) - (a+b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

$h(a)h(b) = [(a_n b_n)]$. Veamos $h(ab) = [(a_n b_n)]$.

Como las sucesiones $(a_n - a)$ y $(b_n - b)$ son nulas en $\mathbb{R}$ y las sucesiones (a_n) y (b_n) son acotadas, entonces las sucesiones $\big(a_n(b_n - b)\big)$ y $\big(b_n(a_n - a)\big)$ son sucesiones nulas.

Para $\epsilon > 0$, entonces existe dos subíndices n_3 y n_4 tales que

$$|a_n(b_n - b)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n > n_3, \quad \text{y} \quad |b(a_n - a)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n > n_4.$$

Al elegir $n_0 = \text{máx}\{n_3, n_4\}$ se tiene para todo subíndice $n > n_0$ que

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b_n| \leqslant$$
$$\leqslant |a_n(b_n - b)| + |(a_n - a)b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

La aplicación h conserva el orden. Es decir, si $a < b$ entonces $h(a) < h(b)$. Esto es así puesto que la sucesión $(b_n) - (a_n) = (b_n - a_n)$ convergen a $b - a > 0$. Luego, debe existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N},\ n > n_0$, se cumple $b_n - a_n > 0$. Es decir, desde el subíndice n_0 se tiene que $a_n < b_n$.

Como $h(a) = [(a_n)] = [(a_n)_{n>n_0}]$ y $h(b) = [(b_n)] = [(b_n)_{n>n_0}]$, entonces

$$h(a) < h(b). \quad \clubsuit$$

Nota El isomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^*$ nos permite identificar a los dos conjuntos, y utilizar la expresión *número real* tanto para un número $a \in \mathbb{R}$ como para la clase de $a = [(a_n)] \in \mathbb{R}^*$, donde (a_n) es una sucesión de Cauchy de números racionales. Es decir, $\lim_n a_n = a$.

Observación Al escribir un número natural o entero, en general, se dispone de una única grafía completa para estos números. Para los números racionales existe distintas formas de escritura según el par de números enteros que se utilicen, pero la grafía de fracción irreducible que es única y completa, sin embargo para los números reales no existe grafía única destacable. Para un número real se puede optar por una expresión decimal ilimitada que por su naturaleza, no es completa, o se puede optar por indicarlo como el límite de una sucesión de Cauchy de números racionales. En este caso, resulta que la clase de sucesiones de Cauchy puede ser representada por cualquier sucesión de la clase y no hay una destacable antes las demás.

1.3. Topología de $\mathbb{R}$

Los intervalos abiertos, cerrados y semiabiertos, o semicerrados, de $\mathbb{R}$ se escriben exactamente igual que lo escrito en la sección 1.1 para un conjunto ordenado arbitrario. Los intervalos iniciales y finales de $\mathbb{R}$ se denominan **semirrectas** y al escribirlos se sustituyen los símbolos $\leftarrow$ y $\rightarrow$ por $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente. Se recuerda todos los tipos de intervalos posibles:

$(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ y $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$,

siendo $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Se entiende que $[a, a] = \{a\}$ y $(a, a) = \varnothing$.

Dados dos números reales $a < b$, entonces se dice que la medida de longitud del intervalo $I = [a, b]$ es el número $|b - a|$. Es decir, $\text{long}(I) = |b - a|$. Además,

$$\text{long}\big([a,b]\big) = \text{long}\big((a,b)\big) = \text{long}\big([a,b)\big) = \text{long}\big((a,b]\big).$$

De un conjunto acotado superiormente $A \subset \mathbb{R}$ se dice que $\sup(A) < \infty$ puesto que $\sup(A) \in \mathbb{R}$. Es decir, existe una semirrecta que lo contiene $A \subset (-\infty, \sup(A)]$. Análogamente, de conjunto acotado inferiormente se dice que $\text{ínf}(A) > -\infty$ puesto que $\text{ínf}(A) \in \mathbb{R}$. Es decir, existe una semirrecta que lo contiene $A \subset [\text{ínf}(A), +\infty)$.

Si A no es acotado superiormente se dice que $\sup(A) = \infty$. Si no es acotado inferiormente se dice $\text{ínf}(A) = -\infty$.

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es acotado si es acotado superiormente, $\sup(A) < \infty$, y es acotado inferiormente, $\text{ínf}(A) > -\infty$. Es decir, existe un intervalo que lo contiene $A \subset [\text{ínf}(A), \sup(A)]$.

Observación No es raro utilizar la expresión *intervalo acotado* para los intervalos, y la expresión *intervalo no acotado* para semirrectas.

Propiedades de los intervalos de $\mathbb{R}$

- Todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, o semirrecta, es un **conjunto convexo**. Es decir, para cualesquiera $a, b \in I$ se cumple que $[a,b] \subset I$ (véase el ejercicio 1.73).

- Cualquier intervalo $I \subset \mathbb{R}$, o semirrecta, contiene números racionales y números irracionales. Más concretamente, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, se tiene:

  $$(a,b) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing \quad \text{y} \quad (a,b) \cap \big(\mathbb{R} - \mathbb{Q}\big) \neq \varnothing.$$

  Es decir, el conjunto $\mathbb{Q}$ y el conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ son **conjuntos densos** en $\mathbb{R}$ (véase el ejercicio 1.103).

- **Propiedad de los intervalos encajados o postulado de Cantor**. (véase ejercicio 1.106)

  En $\mathbb{R}$, cualquier sucesión de intervalos cerrados,

  $$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots [a_n, b_n] \supset \cdots$$

  siendo $a_n \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se satisfacen las siguientes propiedades:

  1. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \varnothing$.
  2. Si la longitud $\text{long}[a_n, b_n] = b_n - a_n$ del intervalo $[a_n, b_n]$ tiende a cero cuando n crece, entonces existe un único punto $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$.

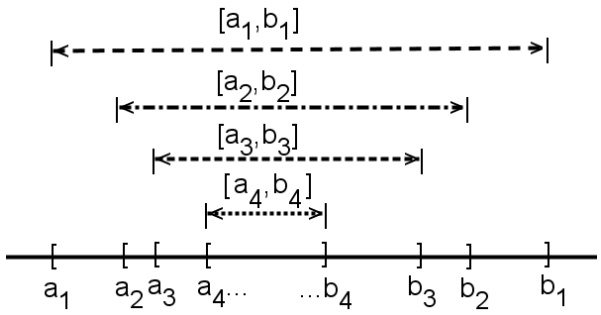

Figura 1.5: Representación de una familia de intervalos encajados

Ejemplo 1.72 **Suma de números reales en forma decimal**
El número $a = 1{,}01001000100001\ldots$ no es decimal periódico y el número $b = 1{,}0101010101\ldots$ es decimal periódico. Se tiene las siguientes secuencias de desigualdades

$1 \leqslant a \leqslant 2$	$1 \leqslant b \leqslant 2$	$2 \leqslant a+b \leqslant 4$
$1{,}0 \leqslant a \leqslant 1{,}1$	$1{,}0 \leqslant b \leqslant 1{,}1$	$2{,}0 \leqslant a+b \leqslant 2{,}2$
$1{,}01 \leqslant a \leqslant 1{,}02$	$1{,}01 \leqslant b \leqslant 1{,}02$	$2{,}02 \leqslant a+b \leqslant 2{,}04$
$1{,}010 \leqslant a \leqslant 1{,}011$	$1{,}010 \leqslant b \leqslant 1{,}011$	$2{,}020 \leqslant a+b \leqslant 2{,}022$
$1{,}0100 \leqslant a \leqslant 1{,}0101$	$1{,}0100 \leqslant b \leqslant 1{,}0101$	$2{,}0200 \leqslant a+b \leqslant 2{,}0201$
$1{,}01000 \leqslant a \leqslant 1{,}01001$	$1{,}01010 \leqslant b \leqslant 1{,}01011$	$2{,}02010 \leqslant a+b \leqslant 2{,}02012$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

que definen una sucesión de intervalos encajados para cada uno de los números a, b y $a+b$. La propiedad de los intervalos encajados indica que la intersección de cada sucesión de intervalos es el número real correspondiente. De esta forma cada número real está asociado a una única expresión decimal ilimitada. ♣

Observación En la figura 1.1 se ha representado todos los números racionales sobre una recta. Es decir, a cada número racional le corresponde un punto sobre esa recta. Dados dos números racionales α y β tales que $\alpha < \beta$ se tiene que $\alpha < \dfrac{\alpha+\beta}{2} < \beta$. Al poder reiterar el proceso del valor medio indefinidamente se puede tener la idea de que los números racionales rellenan toda la recta. Sin embargo a todo punto de la recta no le corresponde un número racional. Esto es debido a que en $\mathbb{Q}$ no se cumple la propiedad de los intervalos encajados. Esta propiedad se satisface en los números reales y esto permite representar a dichos números como todos los puntos de un recta. Además, una vez escogidos los puntos que representan a los números 0 y 1, el 1 usualmente a la derecha del 0, cada punto de la recta representa un único número real e inversamente cada número real está representado por un punto de la recta. Esta recta de puntos es denominada **recta real**.

Nota La posibilidad de representar los números reales como una recta nos permitirá decir "...elegido un punto de $\mathbb{R}$..." en lugar de decir "...elegido un número de $\mathbb{R}$..." Desde este momento no se hará distinción entre punto de la recta real y número real.

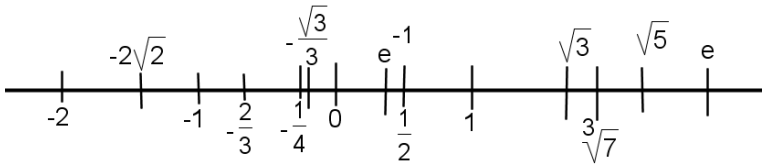

Figura 1.6: La recta real

Ejercicio 1.73 **Caracterización de un intervalo**

Sea $J \subset \mathbb{R}$. J es un intervalo o una semirrecta, si y sólo si para cualesquiera $x, y \in J$ se cumple $[x, y] \subset J$.

Demostración

Si J es un intervalo o una semirrecta, entonces se cumple $[x, y] \subset J,\ \forall x, y \in J$. Veamos el recíproco. Se determinan $a = \text{ínf}(J)$ y $b = \sup(J)$.

Para cualquier z, $a < z < b$, por definición de supremo e ínfimo, se eligen

$$z_1 \in \left(a, \frac{b+z}{2}\right) \cap J \quad \text{y} \quad z_2 \in \left(\frac{a+z}{2}, b\right) \cap J.$$

De $a \leqslant z_1 \leqslant z \leqslant z_2 \leqslant b$ y la propiedad $[x, y] \subset J,\ \forall x, y \in J$, se cumple $[z_1, z_2] \subset J$. Por tanto, $z \in J$ y $(a, b) \subset J$. Además, (a, b) puede ser $(-\infty, \infty), (-\infty, k_1), (k_1, k_2)$ o (k_2, ∞) dependiendo lo que sean ínf(J) y $\sup(J)$. ♣

Práctica 1.74 **Unión de intervalos**

Demuestre que la unión de dos intervalos abiertos no disjuntos es un intervalo abierto.

Práctica 1.75 **Intersección de intervalos**

Estudie los casos es los que la intersección de dos intervalos no disjuntos es un intervalo

Observación Se debe entender como intervalo abierto, (a, b) cuando sólo se utilice la palabra intervalo.

Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados de $\mathbb{R}$

En la relación entre puntos y subconjuntos de $\mathbb{R}$ juega un papel principal el concepto de entorno.

Un **entorno abierto centrado** del punto $a \in \mathbb{R}$ es cualquier intervalo abierto de la forma $U_{a,r} = (a-r, a+r)$ donde $r \in \mathbb{R}$ y $r > 0$. Es decir,

$$U_{a,r} = \{x \in \mathbb{R} \mid -r < x - a < r\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\}.$$

Al número r se le denomina *radio* y al punto a se le llama *centro* del entorno centrado $U_{a,r}$ que también se denota con $U(a,r)$.

Nota El lector puede encontrar en este y otros libros expresiones como "... para $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-a| < \epsilon$...". Esta expresión o algunas similares debe ser entendida en términos de entornos, así pues, esto significa "...para $x \in U_{a,\epsilon}$..."

Para un punto $a \in \mathbb{R}$ cualquier intervalo abierto de extremos distintos de a que lo contiene es un **entorno abierto** del punto $a \in \mathbb{R}$. Es decir, $U_a = (c,d)$ es un entorno abierto de a si y sólo si $c < a < d$.

Práctica 1.76 **Unión cualesquiera e intersección finita de entornos de un número**
Sean $a \in \mathbb{R}$ y $\{U_a^d\}_{d \in K}$ donde K es un conjunto de subíndices. Estudie si los conjunto

$$\bigcup_{d \in K} U_a^d \quad \text{y} \quad \bigcap_{d \in F \subset K} U_a^d, \ F \text{ es finito},$$

son entornos de a.

Se definen los **entornos cerrados**, centrado o no, de forma análoga a la definición de entornos abiertos.

$$\overline{U}_{a,r} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| \leqslant r\} \quad \text{y} \quad \overline{U}_a = [c,d] \text{ tal que } c < a < d.$$

Observación Con frecuencia se utiliza el término entorno para referirse a cualquier entorno abierto centrado y, en caso contrario, se indica el tipo de entorno del que se trata. Además, dado un entorno abierto $U_a = (c,d)$ el entorno abierto centrado mayor posible contenido en U_a es $U_{a,r} = (a-r, a+r)$ siendo $r = \text{mín}\{c-a, d-a\}$.

Dado un entorno abierto U_a, al conjunto $U_a - \{a\}$ se le denomina **entorno reducido** o **perforado** abierto de a, y se escribe como U_a^*. En general, los entorno reducidos se eligen centrados, así pues

$$U_{a,r}^* = U_{a,r} - \{a\} = (a-r, a) \cup (a, a+r) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |a-x| < r\}.$$

A continuación se definen los conjuntos que constituyen la topología usual de $\mathbb{R}$ y se estudian sus propiedades más importantes.

Punto interior de un conjunto: Sean $A \in \mathbb{R}$ y $i \in A$. i es un punto interior de A si y sólo si existe un entorno abierto de i contenido en A. Es decir,

$$i \text{ punto interior de } A \iff \exists U_i \text{ que } U_i \subset A.$$

Al conjunto de puntos interiores de A se denota $\text{int}(A)$, que se lee *interior* de A. Es claro que $\text{int}(A) \subset A$.

Conjunto abierto: Sea $A \subset \mathbb{R}$. A es abierto si todos sus puntos son interiores. Es decir

$$A \text{ conjunto abierto} \iff A = \text{int}(A).$$

De los conjuntos abiertos se destacan las siguientes propiedades:

- $\varnothing$ y $\mathbb{R}$ son conjuntos abiertos.
- La unión de una colección de conjuntos abiertos (finita o no) es un conjunto abierto.
- La intersección finita de una colección de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Ejercicio 1.77 **Unión de conjuntos abiertos**
Cualquier unión de conjuntos abierto es un conjunto abierto.
Solución
Sean $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto de subíndices, $\{A_d\}_{d\in K}$ un conjunto de conjuntos abiertos y $A = \bigcup_{d\in K} A_d$. Se tiene

$$a \in A \Rightarrow \exists d_0 \in K,\ a \in A_{d_0} \Rightarrow \exists U_a \subset A_{d_0} \subset A \Rightarrow a \in \text{int}(A). \quad \clubsuit$$

Ejercicio 1.78 **Intersección finita de conjuntos abiertos**
Cualquier intersección finita de conjuntos abierto es un conjunto abierto.
Solución
Sean $K \subset \mathbb{N}$ un conjunto finito de subíndices, $\{A_i\}_{i\in K}$ un conjunto de conjuntos abiertos y $A = \bigcap_{i\in K} A_i$. Se tiene

$$a \in A \Rightarrow a \in A_i, \forall i \in K \Rightarrow \exists U_a^i \in A_i,\ \forall\, i \in K \Rightarrow \exists U_a = \bigcap_{i\in K} U_a^i \subset A \Rightarrow a \in \text{int}(A). \quad \clubsuit$$

Ejemplo 1.79
Cualquier intervalo abierto o semirrecta abierta es un conjunto abierto.

El conjunto $A = \mathbb{R} - \mathbb{N}$ es un conjunto abierto puesto que

$$A = (-\infty, 0) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} (n-1, n).$$

$B = (-15, 15) - [2, 3]$ es un conjunto abierto pues $B = (-15, 2) \cup (3, 15)$. ♣

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ abierto queda caracterizado por el siguiente resultado.

Proposición 1.80
Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$. A es un conjunto abierto si y sólo si es unión finita o numerable de una colección de intervalos abiertos disjuntos.

Demostración
Cada intervalo abierto es un conjunto abierto, y por tanto la unión de intervalos abiertos es un conjunto abierto.

Al ser A un conjunto abierto, se tiene que para todo $x \in A$ existe un entorno $U_x = (y, z) \subset A$. Se consideran

$$a_x = \text{ínf}\{y \in \mathbb{R} | (y, x) \subset A\} \notin A \quad \text{y} \quad b_x = \sup\{z \in \mathbb{R} | (x, z) \subset A\} \notin A.$$

El intervalo $I_x = (a_x, b_x)$ está contenido en A. Veamos que la existencia de un número $t \in I_x$ tal que $t \notin A$ no es posible. Si $a_x < t < x$ se contradice la definición de a_x como ínfimo de extremos inferiores de intervalos $(y, x) \subset A$. Análogamente, $x < t < b_x$ contradice la definición de b_x como supremo extremos superiores de intervalos $(x, z) \subset A$.

$$\bigcup_{x\in A} I_x \subset A.$$

Para $p, q \in A$, $I_p = (a_p, b_p)$ $I_q = (a_q, b_q)$, se tiene que $I_p \cap I_q = \varnothing$ y que los números $a_p, b_p, a_q, b_q \notin A$. De suponer que existe $r \in I_p \cap I_q$, se tiene $b_p < a_q$ y $a_q < b_p$.

Como $b_p < a_q$ y $b_p \notin A$, por tanto, $b_p \notin (a_q, b_q)$, entonces $a_p \leqslant a_q$.
Como $a_q < b_p$ y $a_q \notin A$, por tanto, $a_q \notin (a_p, b_p)$, entonces $a_q \leqslant a_p$.

Luego, $a_p = a_q$. Análogamente se obtiene que $b_p = b_q$. Esto es una contradicción, por tanto, los intervalos I_x son disjuntos entre si. Es decir, los intervalos del conjunto $\{I_x\}$ son disjuntos. Renombramos a este conjunto como $\{I_d\}_{d\in K}$ siendo K un conjuntos de subíndices.

$$\bigcup_{d\in K} I_d = A.$$

Para determinar el tamaño de K, se elige un número racional α_d de cada intervalo de $\{I_d\}_{d\in K}$ y se define la aplicación $h : K \longrightarrow \mathbb{Q}$ como $h(d) = \alpha_d$. Es claro que esta aplicación es biyectiva. Por lo tanto, K o es un conjunto finito o es numerable. ♣

Nota Conviene recordar que una colección de elementos se dice numerable si existe una biyección entre la colección y $\mathbb{N}$. Es decir, si la colección tiene tantos elementos como $\mathbb{N}$.

Práctica 1.81
Estudie si $\mathbb{R} - (a_n)$ es un conjunto abierto o no, dependiendo de la sucesión (a_n).

Práctica 1.82
Sea una sucesión (a_n) tal que $\lim_n a_n = a \in \mathbb{R}$. Sean los conjuntos de intervalos abiertos $A = \{(a - a_n, a + a_n) | n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{(-a - a_n, a + a_n) | n \in \mathbb{N}\}$. Estudie, dependiendo de la sucesión, si los conjuntos

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (a - a_n, a + a_n) \quad \text{y} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-a - a_n, a + a_n)$$

son conjuntos abiertos o no.

Conjunto cerrado: Sea $C \subset \mathbb{R}$. C es un conjunto cerrado si su complementario $\complement C$ es un conjunto abierto. Es decir

$$C \text{ conjunto cerrado} \iff \complement C \text{ conjunto abierto .}$$

Observación El complementario de un conjunto $B \subset \mathbb{R}$ es el conjunto
$$\complement B = \mathbb{R} - B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin B\}.$$

De los conjuntos cerrados se destacan las siguientes propiedades:

- $\varnothing$ y $\mathbb{R}$ son conjuntos cerrados.
- La intersección (finita o no) de una colección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
- La unión finita de una colección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Ejercicio 1.83 **Intersección de conjuntos cerrados**
Cualquier intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
Solución
Sean $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto de subíndices, $\{C_d\}_{d\in K}$ un conjunto de conjuntos cerrados y $C = \bigcap_{d\in K} C_d$.

Si $x \notin C$ entonces existe $d \in K$ tal que $x \notin C_d$ y $x \in \complement C_d$. Al ser $\complement C_d$ un conjunto abierto, existe $U_x \in \complement C_d$. Además, $U_x \cap C_d = \varnothing \Rightarrow U_x \cap C = \varnothing \Rightarrow U_x \subset \complement C$.

Luego, $\complement C$ es un conjunto abierto. Por tanto, C es un conjunto cerrado. ♣

Ejercicio 1.84 **Unión finita de conjuntos cerrados**

Cualquier unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Solución

Sean $K \subset \mathbb{N}$ un conjunto finito de subíndices, $\{C_i\}_{i\in K}$ un conjunto de conjuntos cerrados y $C = \bigcup_{i\in K} C_i$. Al aplicar las leyes de Morgan,

$$\complement C = \complement\left(\bigcup_{i\in K} C_i\right) = \bigcap_{i\in K} \complement C_i,$$

es un conjunto abierto por ser intersección finita de conjuntos abiertos. Luego C es cerrado. ♣

Ejemplo 1.85 Un intervalo cerrado o una semirrecta cerrada es un conjunto cerrado.

Dado $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $C = \{a\}$ es un conjunto cerrado puesto que al aplicar la propiedad de los intervalos encajados se tiene que $\{a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} \left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right]$.

El conjunto $\mathbb{Z}$ es un conjunto cerrado pues $\mathbb{Z} = \mathbb{R} - A$ siendo A el conjunto abierto

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} \{(-n, -n+1) \cup (n-1, n)\}. \quad ♣$$

Práctica 1.86 Demuestre que cualquier conjunto $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} \left[-a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right]$, donde $a \in \mathbb{R}$, es un conjunto cerrado.

Punto exterior a un conjunto: Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $e \in \mathbb{R} - A$. e es punto exterior de A si y sólo si existe un entorno U_e sin puntos comunes con A. Es decir,

$$e \text{ punto exterior} \iff \exists U_e \text{ tal que } U_e \cap A = \varnothing \iff e \in \operatorname{int}(\complement A).$$

Al conjunto de puntos exteriores de A se le designa $\operatorname{ext}(A)$ y se lee *exterior* de A.

Punto frontera de un conjunto: Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $f \in \mathbb{R}$. f es punto frontera de A si, y sólo si cualquier entorno de f, U_f, posee puntos comunes con A y con $\complement A$. Es decir,

$$f \text{ punto frontera} \iff \forall U_f \text{ se cumple que } U_f \cap A \neq \varnothing \text{ y } U_f \cap \complement A \neq \varnothing.$$

Al conjunto de puntos frontera de A se le designa front(A) y se lee *frontera* de A.

Observación Dado $A \subset \mathbb{R}$, los conjuntos int(A), ext(A) y front(A) son conjuntos disjuntos dos a dos. Además, $\mathbb{R} = \text{int}(A) \cup \text{ ext}(A) \cup \text{ front}(A)$. Es decir, que todo punto de $\mathbb{R}$ es interior, exterior o frontera de un conjunto A.

Los conjuntos int(A) y ext(A) son conjuntos abiertos, y el conjunto front(A) es un conjunto cerrado.

Si $A = \varnothing$, entonces int$(A) = \varnothing$. Para cada $x \in \text{int}(A)$, entonces $U_x \subset A$. Ahora bien, para cualquier $y \in U_x$ se cumple U_x es un entorno de y. Por lo tanto, y es un punto interior de A y $U_x \subset \text{int}(A)$. Es decir, int$(A)$ es un conjunto abierto.

El conjunto ext$(A) = \text{int}(\mathbb{R} - A)$ es abierto. Además, front$(A) = \mathbb{R} - \big(\text{int}(A) \cup \text{ext}(A)\big)$ es cerrado por ser el complementario de un abierto. ♣

Ejemplo 1.87

Del conjunto $A = \{0\} \cup [1, 2) \cup (4, 5] \cup \{7\}$ se tiene

$\text{int}(A) = (1, 2) \cup (4, 5)$,

$\text{ext}(A) = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (2, 4) \cup (5, 7) \cup (7, \infty)$

y

$\text{front}(A) = \{0, 1, 2, 4, 5, 7\}$.

Del conjunto $\mathbb{N}$ se tiene que int$(\mathbb{N}) = \varnothing$, ext$(\mathbb{N}) = \mathbb{R} - \mathbb{N}$ y front$(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.

Del conjunto $B = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ se tiene que int$(B) = \varnothing$, ext$(B) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ y front$(B) = [0, 1]$. ♣

Práctica 1.88

Determine del conjunto $A = \{-1\} \cup (1, 3] \cup (5, 6] \cup \{7\}$ los conjuntos int(A), ext(A) y front(A).

Práctica 1.89

Determine de los conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y del conjunto $\mathbb{I}$ de los números irracionales, los conjuntos interior, exterior y frontera.

Observación Los puntos interiores pertenecen al conjunto, los exteriores pertenecen al complementario y los frontera pueden ser del conjunto o de su complementario.

Punto aislado de un conjunto: Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $a \in A$. a es punto aislado de A si, y sólo existe un entorno perforado de a que no contienen puntos de A. Es decir,

a punto aislado de $A \iff \exists U_a^*$ tal que $U_a^* \cap A = \varnothing \iff \exists U_a$ tal que $U_a \cap A = \{a\}$.

Al conjunto de los puntos aislados de A se le designa por $\text{aisl}(A)$ y se lee *conjunto aislado* de A.

Punto de acumulación de un conjunto: Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. a es un punto de acumulación de A si y sólo si cada entorno perforado de a contiene puntos de A. Es decir,

$$a \text{ punto de acumulación de } A \iff \forall U_a^* \text{ se cumple que } U_a^* \cap A \neq \varnothing.$$

Al conjunto de los puntos de acumulación de A se le designa por A' o por $\text{acum}(A)$ y se lee *conjunto derivado* de A o de *acumulación* de A.

Observación En todo entorno de un punto de acumulación de un conjunto A hay elementos del conjunto A (de hecho hay una infinidad).

Una caracterización de los conjuntos cerrados es: (véase ejercicio 1.112)

$$A \subset \mathbb{R}.\ A \text{ es cerrado} \iff \text{acum}(A) \subset A.$$

Punto adherente de un conjunto: Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. a es un punto adherente de A si y sólo si cada entorno de a contiene elementos de A. Es decir,

$$a \text{ punto adherente de } A \iff \forall U_a \text{ se cumple que } U_a \cap A \neq \varnothing.$$

Al conjunto de puntos adherentes de A lo designaremos por $\overline{A}$ o por $\text{adh}(A)$, y se lee *clausura, adherencia* o *cierre* de A. Es claro que $A \subset \overline{A}$.

Práctica 1.90 **Adherencia de un conjunto**
Demuestre que $\text{adh}(A) = \text{int}(A) \cup \text{front}(A)$ para todo $A \subset \mathbb{R}$.

Proposición 1.91 Clausura de un conjunto
El conjunto $\text{adh}(A)$ es el menor conjunto cerrado que contiene al conjunto A. Es decir, no existe $C \subset \mathbb{R}$ conjunto cerrado, $A \subset C$ tal que $C \subset \text{adh}(A)$.

Demostración
El conjunto $\text{adh}(A) = \text{int}(A) \cup \text{front}(A) = \mathbb{R} - \text{ext}(A)$ es cerrado por ser el complementario de un abierto.

Sea un conjunto cerrado $C \supset A$, veamos que $\text{adh}(A) \subset C$. Como $\mathbb{R} - C$ es abierto, entonces para cada $x \in \mathbb{R} - C$ existe un entorno $U_x \subset \mathbb{R} - C \subset \mathbb{R} - A$. Además,

$U_x \cap A = \varnothing$ por lo cual $x \notin \text{adh}(A)$ y $x \in \mathbb{R} - \text{adh}(A)$. Es decir,

$$\mathbb{R} - C \subset \mathbb{R} - \text{adh}(A) \Rightarrow \text{adh}(A) \subset C. \quad \clubsuit$$

$$A \subset \mathbb{R}.\ \ A \text{ conjunto cerrado} \iff A = \overline{A}.$$

Ejemplo 1.92
De los conjuntos del ejemplo 1.87 $A = \{0\} \cup [1,2) \cup (4,5] \cup \{7\}$ se tiene $\text{acum}(A) = [1,2] \cup [4,5]$, $\text{aisl}(A) = \{0,7\}$ y $\overline{A} = \text{adh}(A) = \{0\} \cup [1,2] \cup [4,5] \cup \{7\}$.

De $\mathbb{N}$ se tiene que $\text{acum}(\mathbb{N}) = \varnothing$, $\text{aisl}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ y $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$.

De $B = \mathbb{Q} \cap (0,1)$ se tiene que $\text{acum}(B) = [0,1]$, $\text{aisl}(B) = \varnothing$ y $\overline{B} = [0,1]$. $\clubsuit$

Práctica 1.93
Determine del conjunto de la práctica 1.88 $A = \{-1\} \cup (1,3] \cup (5,6] \cup \{7\}$ los conjuntos $\text{acum}(A)$, $\text{aisl}(A)$ y $\overline{A}$.

Práctica 1.94
Determine de los conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y del conjunto $\mathbb{I}$ de los números irracionales, los conjuntos de acumuación, de puntos aislados y adherencia.

Topología usual de $\mathbb{R}$

En general, dotar de una **topología** $\mathcal{T}$ a un conjunto E es dar una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de E que cumple las propiedades:

- $\varnothing, E \in \mathcal{T}$.
- La unión de cualquier colección de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$. Es decir, para toda colección $\{A_p\}_{p\in\mathcal{F}}$, con $A_p \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcup_{p\in\mathcal{F}} A_p \in \mathcal{T}$.
- Toda intersección finita de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$. Es decir, para toda colección $\{A_i\}_{i\in\{1,\cdots,n\}}$ con $A_i \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcap_{i\in\{1,\cdots,n\}} A_i \in \mathcal{T}$.

Al par $(E, \mathcal{T})$ se le denomina **espacio topológico** y a los elementos de $\mathcal{T}$ se les denomina conjuntos abiertos de E.

Observación En un mismo conjunto E puede definirse varias topologías.
A $\mathbb{R}$ se le ha dotado de la familia de los conjuntos abiertos que forman una topología al cumplir las tres propiedades anteriores denominada **topología usual** de $\mathbb{R}$.

Conjuntos compactos de $\mathbb{R}$

Además de los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados, de los que intervalos abiertos e intervalos cerrados son un ejemplo particular, existen otros conjuntos de gran importancia en el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral.

Recubrimiento de un conjunto: Sean $A \subset \mathbb{R}$ y una familia $\mathcal{R}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$. $\mathcal{R}$ es un recubrimiento del conjunto A si y sólo si $A \subset \bigcup_{B\in\mathcal{R}} B$. Es decir,

$$\mathcal{R} \text{ recubrimiento de } A \iff \forall x \in A \ \ \exists B \in \mathcal{R} \text{ tal que } x \in B.$$

Un recubrimiento se dice **recubrimiento abierto** si está constituido por conjuntos abiertos. Análogamente, se dice **recubrimiento cerrado** si lo constituyen conjuntos cerrados.

Conjunto compacto: Sea $K \subset \mathbb{R}$. K es un conjunto compacto si y sólo si para cualquier recubrimiento abierto $\mathcal{R}$ de K se puede extraer un subrecubrimiento finito $\mathcal{R}'$ de K. Es decir,

$$K \text{ conjunto compacto} \iff \forall \mathcal{R} \text{ recubrimiento abierto } \exists \mathcal{R}' = \{A_1, \cdots, A_n\} \subset \mathcal{R} \text{ tal que } K \subset \bigcup_{i\in\{1,\cdots,n\}} A_i.$$

Ejemplo 1.95
Es claro que $\varnothing$ y $\{a\}$ son compactos.

Las semirrectas $(-\infty, a]$ y $[b, \infty)$ no son compactas, puesto que de los recubrimientos respectivos $\mathcal{R} = \{(a-n-1, a-n+1) n \in \mathbb{N}\}$ y $\mathcal{R} = \{(b+n-1, b+n+2); n \in \mathbb{N}\}$ no se puede extraer un subrecubrimiento finito.

$\mathbb{R}$ no es compacto, pues $\mathcal{R} = \{(-n-1, -n+1) \cup (n, n+2); n \in \mathbb{N}\}$ es un recubrimiento abierto y no se puede extraer un subrecubrimiento finito de $\mathcal{R}$.

Un intervalo (a, b) no es un conjunto compacto pues del recibrimiento

$$\mathcal{R} = \left\{ \left(a + \frac{1}{n}, b \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

no se puede extraer un subrecubrimiento finito. ♣

Ejercicio 1.96 **Unión finita de compactos**
La unión finita de conjuntos compactos es un conjunto compacto.
Solución
Sean $K_1, \cdots, K_n$ conjuntos compactos. Al considerar un recubrimiento $\mathcal{R}$ sobre el conjunto $K = \bigcup_{1=1}^{n} K_i$, ocurre que $\mathcal{R}$ un recubrimiento sobre cada compacto K_i y existe un subrecubrimiento finito $\mathcal{R}_i$ de K_i. Entonces, $\bigcup_{1=1}^{n} \mathcal{R}_i$ es un recubrimiento finito de K. ♣

Práctica 1.97 **Intersección de compactos**
La intersección de conjuntos compactos es un conjunto compacto.

Otros conjuntos compactos son :

- Un conjunto cerrado contenido en un compacto es un conjunto compacto. Véase el ejercicio 1.108.
- Un intervalo cerrado $[a, b]$ es un conjunto compacto. Véase el ejercicio 1.110.

La caracterización de los conjuntos compactos en $\mathbb{R}$ es el conocido teorema de Heine-Borel. Véase el ejercicio 1.111.

$$C \subset \mathbb{R} \text{ conjunto compacto } \iff C \text{ cerrado y acotado.}$$

Unas condiciones que aseguran la existencia de puntos de acumulación las presenta el siguiente resultado conocido como teorema de Bolzano-Weierstrass.

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no finito y acotado, entonces $\text{acum}(A) \neq \varnothing$.

Véase el ejercicio 1.107

1.4. Complementos al tema

Para que la lectura de las anteriores fuera más fluida se han saltado algunas demostraciones de proposiciones y teoremas importantes en la materia. Es en esta sección donde se muestra las demostraciones y se añaden otros resultados teóricos como ejercicios que debieran ser resueltos sin establecer una ordenación sistemática de dichos resultados.

Ejercicio 1.98 **Raíz cuadrada de un número**

Demuestre que cada número real positivo tiene una única raíz cuadrada positiva.

Solución

Sea $d \geqslant 0$. Buscamos las soluciones de la ecuación $x^2 = d$. Desde luego si $x_0 \in \mathbb{R}$ es solución de la ecuación anterior, también es solución $-x_0$, por lo que buscaremos sólo las soluciones positivas. Podemos además suponer que $d > 0$ pues la ecuación $x^2 = 0$ tiene solución única $x = 0$. Sea el conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0 \ \text{ y } \ x^2 \leqslant d\ \}.$$

El conjunto A es no vacío pues $0 \in A$. Además, A es un conjunto acotado superiormente por $\max(1, d)$ y cualquier número real positivo b tal que $b^2 \geqslant d$ es cota superior de A, ya que en caso contrario existe $a \in A$ tal que $b < a$ y al ser ambos positivos se deduciría que $d \leqslant b^2 < a^2 \leqslant d$. Por el axioma del supremo existe $\alpha = \sup(A) \in \mathbb{R}$. Veamos, por reducción al absurdo, que $\alpha^2 = d$.

Si $\alpha^2 > d$, se considera $\varepsilon = \dfrac{\alpha^2 - d}{2\alpha} > 0$. Se tiene:

$$(\alpha - \varepsilon)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2 > \alpha^2 - 2\alpha\varepsilon = \alpha^2 - (\alpha^2 - d) = d.$$

Por tanto $\alpha - \varepsilon$ es cota superior de A, que contradice la hipótesis $\alpha = \sup(A)$.

Si $\alpha^2 < d$ se toma $\varepsilon = \min\left(\alpha, \dfrac{d - \alpha^2}{3\alpha}\right) > 0$. Se tiene:

$$(\alpha + \varepsilon)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2 \leqslant \alpha^2 + 2\alpha\varepsilon + \alpha\varepsilon = \alpha^2 + 3\alpha\varepsilon \leqslant \alpha^2 - (\alpha^2 - d) = d.$$

Por tanto, $\alpha + \varepsilon \in A$, que contradice el hecho de ser α cota superior de A.

La unicidad de la raíz positiva se deduce de que si $\beta \geqslant 0$ es tal que $\beta^2 = d$, entonces por un lado $\beta \in A$, y por tanto $\beta \leqslant \alpha$ pues α era cota superior de A. Por otro lado, β es cota superior de A y por tanto $\alpha \leqslant \beta$ pues α era el supremo de A. ♣

Ejercicio 1.99 **Axioma del ínfimo**

Demuestre que todo subconjunto de $\mathbb{R}$, no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimo.

Solución

Basta observar que si A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente, entonces $B = -A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\}$ es un conjunto no vacío acotado superiormente. Por el axioma del supremo, existe $\sup(B) \in \mathbb{R}$. Claramente se cumple que $\inf(A) = -\sup(B)$. ♣

Ejercicio 1.100 **Parte entera de un número real**

Sea $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que existe un único número entero $z \in \mathbb{Z}$ tal que

$$z \leqslant x < z + 1\ .$$

Solución
Supongamos primero que $x \geqslant 0$. Sea el conjunto:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant x\}.$$

i) $A \neq \varnothing$ pues $0 \in A$.

ii) A está acotado superiormente en $\mathbb{R}$, por x.

Por el axioma del supremo, existe $z = \sup(A) \in \mathbb{R}$. Veamos que $z \in A$. En efecto:

Como $z-1$ no es cota superior de A, existe $p \in A$ tal que $z-1 < p \leqslant z$. De $z-1 < p$, se deduce que $z < p+1$ y en consecuencia, cualquier entero estrictamente superior a p es superior a z y por tanto, no es elemento de A. Luego p es el máximo de A y se concluye que $p = z$. Por tanto $z \in A$ y en particular $z \in \mathbb{N}$ y $z \leqslant x$. Como además $z+1 \notin A$, se deduce que $x < z+1$.

Supongamos ahora que $x < 0$.

Si $x \in \mathbb{Z}$, tomamos $z = x$, y se cumple $z \leqslant x < z+1$.

Si $x \notin \mathbb{Z}$, entonces $-x \geqslant 0$ y sea $q \in \mathbb{N}$ tal que $q \leqslant -x < q+1$. Se toma $z = -q-1 \in \mathbb{Z}$.

Como $-q-1 < x \leqslant -q$, se tiene que $z < x \leqslant z+1$. Como $x \notin \mathbb{Z}$, resulta que $z < x < z+1$ y en consecuencia, $z \leqslant x < z+1$.

La unicidad del entero z se deduce de lo siguiente: Sea z tal que $z \leqslant x < z+1$. Si $p \in \mathbb{Z}$ es tal que $p < z$, entonces $p+1 \leqslant z \leqslant x$ y por tanto, p no cumple que $p \leqslant x < p+1$. Si $p \in \mathbb{Z}$ es tal que $p > z$, entonces $p \geqslant z+1 > x$ y por tanto, p no cumple que $p \leqslant x < p+1$. ♣

Ejercicio 1.101 **Propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$**
Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 0$, para todo $y \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.
Solución
Si $y \leqslant 0$, basta tomar $n = 1$. Si $y > 0$, se toma $n = E\left(\frac{y}{x}\right) + 1$. De $\frac{y}{x} < n$ se obtiene que $nx > y$. ♣

Ejercicio 1.102 **Los intervalos son conjuntos convexos**
Demuestre que un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si y sólo si cualesquiera que sean los números x, y de I tales que $x < y$ se cumple que $[x, y] \subset I$.
Solución
Si I es un intervalo, claramente se satisface la propiedad del enunciado.

Recíprocamente, sea I un conjunto no vacío tal que cualesquiera que sean los puntos x, y de I tales que $x < y$ se cumple que $[x, y] \subset I$. Sean $a = \text{ínf}(I)$ y $b = \sup(I)$,

donde a y $b \in \mathbb{R}$, salvo en los casos donde I no está acotado inferiormente, en ese caso $a = -\infty$, o I no está acotado superiormente, y en ese caso $b = +\infty$.

Veamos que $(a, b) \subset I$, probando que si $z \in (a, b)$ entonces $z \in I$.

i) Si $a < z$ y $a = -\infty$, entonces I no está acotado inferiormente y por tanto z no es cota inferior de I. En consecuencia, existe $x \in I$ tal que $x < z$.

ii) Si $a < z$ y $a \neq -\infty$, como a es la mayor de las cotas inferiores de I, z no es cota inferior de I. En consecuencia, existe $x \in I$ tal que $x < z$.

En ambos casos hemos probado que si $a < z$, existe $x \in I$ tal que $x < z$.

De manera análoga se prueba que si $z < b$, entonces existe $y \in I$ tal que $z < y$.

En definitiva, si $z \in (a, b)$, existen x e $y \in I$ tales que $x < z < y$, y por la propiedad que satisface I, resulta que $z \in I$. ♣

Ejercicio 1.103 **$\mathbb{Q}$ es un conjunto denso en $\mathbb{R}$**

Compruebe que cualesquiera que sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, se tiene:

$$(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing \quad \text{y} \quad (a, b) \cap \big(\mathbb{R} - \mathbb{Q}\big) \neq \varnothing.$$

Solución

Hay que demostrar que el intervalo (a, b) contiene números racionales e irracionales. Sean x e y dos elementos de (a, b). Si uno de ellos es racional y el otro irracional, no hay nada que probar.

Si los dos son racionales y $x < y$, entonces $z = x + \dfrac{(y - x)\sqrt{2}}{2}$ es irracional y cumple $x < z < y$.

Luego, entre dos números racionales siempre hay un número irracional.

Si los dos son irracionales y $x < y$, sea $n = E\left(\dfrac{1}{y - x} + 1\right)$. Como $n > \dfrac{1}{y - x}$ resulta que:

$$1 < n(y - x).$$

Sea ahora $m = E(nx)$. Se tiene:

$$m \leqslant nx < m + 1 \leqslant nx + 1 < nx + n(y - x) = ny,$$

es decir, $nx < m + 1 < ny$. Luego, $x < \dfrac{m + 1}{n} < y$. Por tanto, $\dfrac{m + 1}{n}$ es un número racional entre x e y.

En consecuencia, entre dos irracionales siempre hay un número racional. ♣

Ejercicio 1.104 **El número real como límite de una sucesión de números racionales**

Demuestre que para cualquier $r \in \mathbb{R}$ existen dos sucesiones de números racionales, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tales que $a_n \leqslant r \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\mathrm{d}(a_n, b_n) < \dfrac{1}{n}$.

Solución

Se considera la familia de intervalos $I_n = \left\{\left(x - \frac{1}{2n}, x + \frac{1}{2n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se elige un $a_n \in \left(x - \frac{1}{2n}, x\right) \cap \mathbb{Q}$ y un $b_n \in \left(x, x + \frac{1}{2n}\right) \cap \mathbb{Q}$. Esto se puede hacer pues $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}*}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}*}$ son dos sucesiones adecuadas pues para todo $n \in \mathbb{N}^*$ se cumple:

$$|x - a_n| < \frac{1}{2n} \quad \text{y} \quad |x - b_n| < \frac{1}{2n} \implies |a_n - b_n| \leqslant |a_n - x| + |x - b_n| < \frac{1}{n}.$$

Es claro que esas dos sucesiones no son únicas. ♣

Práctica 1.105 **El número real como límite de una sucesión de números irracionales**

Demuestre que para cualquier $r \in \mathbb{R}$ existen dos sucesiones; una de números racionales, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y otra de números irracionales $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tales que $a_n \leqslant r \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\mathrm{d}(a_n, b_n) < \dfrac{1}{n}$. ♣

Ejercicio 1.106 **Propiedad de los intervalos encajados**

Demuestre que en $\mathbb{R}$ cualquier sucesión de intervalos cerrados,

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots [a_n, b_n] \supset \cdots$$

siendo $a_n \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, satisface las siguientes propiedades:

1. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \varnothing$.
2. Si la longitud $b_n - a_n$ del intervalo $[a_n, b_n]$ tiende a cero cuando $n \to \infty$, entonces existe un único punto $\alpha \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$.

Solución

El conjunto $A = \{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ es un conjunto acotado superiormente, ya que $a_n \leqslant b_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, existe $\alpha = \sup(A)$.

Análogamente, el conjunto $B = \{\, b_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ es un conjunto acotado inferiormente, ya que $a_0 \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, existe $\beta = \text{ínf}(B)$.

Para todo $n, m \in \mathbb{N}$ se cumple que $a_n \leqslant b_m$, por lo que $\alpha \leqslant \beta$. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $[\alpha, \beta] \subset [a_n, b_n]$, luego

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n],$$

y por consiguiente, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \varnothing$.

Finalmente, si existen $x \neq y$ tales que $x, y \in [a_n, b_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $b_n - a_n \geqslant l = |x - y| > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto, $b_n - a_n$ no tiende a 0 cuando n tiende a infinito. Así pues, el único elemento de esta intersección es $\alpha = \beta$. ♣

Ejercicio 1.107 **Caracterización de los conjuntos cerrados**

Demuestre que un conjunto C es cerrado si y sólo si $\text{acum}(C) \subset C$.

Solución

($\Longrightarrow$) Supongamos que existe $a \in \text{acum}(C)$ y $a \notin C$.

Al ser C un conjunto cerrado $\mathbb{R} - C$ es un conjunto abierto, y todos sus puntos son interiores.

Como $a \in (\mathbb{R} - C)$, existe un entorno $U_a \subset (\mathbb{R} - C)$, lo cual es una contradicción con ser a un punto de acumulación de C.

($\Longleftarrow$) Supuesto que C no es cerrado. El conjunto $\mathbb{R} - C$ no es abierto, por tanto posee algún punto que no es interior. Es decir, existe $a \in (\mathbb{R} - C) \cap \text{front}(\mathbb{R} - C)$, por tanto cualquier entorno U_a cumple que $U_a \cap (\mathbb{R} - C) \neq \varnothing$ y $U_a \cap C \neq \varnothing$.

Luego, a es un punto de acumulación de C, lo cual está en contradicción con $\text{acum}(C) \subset C$. ♣

Ejercicio 1.108 **Subconjunto cerrado de un conjunto compacto**

Sean C un conjunto cerrado y K un conjunto compacto. Demuestre que si $C \subset K$ entonces C es un conjunto compacto.

Solución

Sea un recubrimiento abierto $\mathcal{R}_C$ de C. Al ser C un conjunto cerrado el conjunto $\mathbb{R} - C$ es abierto.

Se construye el recubrimiento abierto $\mathcal{R}_K = \mathcal{R}_C \cup \{\mathbb{R} - C\}$ de K. Al ser K un conjunto compacto se puede extraer una subrecubrimiento finito $\mathcal{R}'_K$.

Como $C \subset K$ el recubrimiento finito anterior es un recubrimiento finito de C. Como $C \cap (\mathbb{R} - C) = \varnothing$ se tiene que $\mathcal{R}'_C = \mathcal{R}'_K - \{\mathbb{R} - C\}$ es un subrecubrimiento finito de C extraído del recubrimiento $\mathcal{R}_C$. ♣

Ejercicio 1.109 ¿Es C un conjunto compacto?

$$C = \{-1, 1\} \cup \left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Solución
Como $\text{aisl}(C) = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\text{acum}(C) = \{-1, 1\}$, entonces $C = \overline{C}$. Además, C es un conjunto acotado, $C \subset [-2, 3]$.

Se tiene que C es un conjunto cerrado contenido en $[-2, 3]$ que es un conjunto compacto, entonces C es compacto. ♣

Ejercicio 1.110 **Un intervalo cerrado es un conjunto compacto**
Demuestre que un intervalo cerrado $[a, b]$ es un conjunto compacto en $\mathbb{R}$.
Solución
Sea $\mathcal{R}$ un recubrimiento abierto de $[a, b]$. Se define el conjunto S de los puntos $x \in [a, b]$ tal que el intervalo $[a, x]$ es recubrible con un subrecubrimiento finito de $\mathcal{R}$.

Es claro que $S \neq \varnothing$ pues $a \in S$. Además, S es un conjunto acotado pues $S \subset [a, b]$, por tanto, existe su supremo; $c = \sup(S)$. Como $s \leqslant b$ para todo $s \in S$, se tiene que $c \leqslant b$. Es decir, $c \in [a, b]$. Luego existe un conjunto abierto $A \in \mathcal{R}$ que contiene a c. Al ser c un punto interior de A existe un entorno $U_{c,r} \subset A$.

Elegido un $d \in S$ tal que $|d - c| < r$ se tiene para $[a, d]$ un subrecubrimiento finito extraído de $\mathcal{R}$. Así pues $[a, c] = [a, d] \cup [d, c] \subset [a, d] \cup A$ posee un subrecubrimiento finito. Es decir, $c \in S$.

Si se supone que $c < b$ se toma $r' = \text{mín}\left\{\frac{r}{2}, \frac{|b-c|}{2}\right\}$, entonces

$$\left[a, c + \frac{r'}{2}\right] = [a, d] \cup [d, c] \cup \left[c, c + \frac{r'}{2}\right] \subset [a, d] \cup [d, c] \cup [c - r, c + r] \subset [a, d] \cup A.$$

Por tanto, $c + \frac{r'}{2} \in S$ que es una contradicción con ser $c = \sup(S)$. Luego $c = b$. ♣

Ejercicio 1.111 **Teorema de Heine-Borel**
Dado $K \subset \mathbb{R}$, demuestre que K es un conjunto compacto si y sólo si K es un conjunto cerrado y acotado.
Solución
($\Longrightarrow$) Se considera el recubrimiento abierto $\mathcal{R} = \{(-n, n); n \in (\mathbb{N} - \{0\})\}$. Al ser K compacto se puede extraer un subrecubrimiento finito

$$\mathcal{R} = \{(-n_1, n_1), \cdots, (-n_k, n_k)\}.$$

Sea $m = \text{máx}\{n_1, \cdots, n_k\}$, entonces $K \subset (-m, m)$. Por tanto, K es un conjunto acotado.

Supongamos que K no es cerrado. Es decir, existe $a \in \overline{K}$ tal $a \notin K$. Para cada $x \in K$ se consideran los entornos $U_{a,\frac{|x-a|}{2}}$ y $U_{x,\frac{|x-a|}{2}}$ que son disjuntos.

Se tiene el recubrimiento abierto de K $\mathcal{R} = \{U_{x,\frac{|x-a|}{2}}; x \in K\}$. Al ser K compacto se puede extraer un subrecubrimiento finito $\mathcal{R}' = \left\{U_{x_i,\frac{|x_i-a|}{2}}; i \in \{1, \cdots, k\}\right\}$.

Se construye el entorno de a, $U_a = \bigcap_{i\in\{1,\cdots,k\}} U_{a,\frac{|x_i-a|}{2}}$. Resulta que

$$U_a \cap \bigcup_{i\in\{1,\cdots,k\}} U_{a,\frac{|x_i-a|}{2}} = \varnothing \Longrightarrow U_a \cap K = \varnothing,$$

lo cual es una contradicción con $a \in \overline{K}$.

($\Longleftarrow$) Si K es acotado entonces existe un intervalo cerrado $[a, b]$ que contiene a K.

Por el contenido del ejercicio 1.110 se tiene que $[a, b]$ es un conjunto compacto. Si K es cerrado y $[a, b]$ es compacto, por el contenido del ejercicio 1.108, K es un conjunto compacto. ♣.

Ejercicio 1.112 **Teorema de Bolzano-Weierstrass**
Sea un conjunto infinito $A \in \mathbb{R}$. Demuestre que si A es un conjunto acotado, entonces A tiene, al menos, un punto de acumulación.

Solución
Supongamos que A no tiene puntos de acumulación. Entonces $\overline{A}$ está constituido por puntos aislados, y como $A \subset \overline{A}$ resulta que A está constituido por puntos aislado, por tanto $A = \overline{A}$. Es decir, A es cerrado.

Al ser A cerrado y acotado, se tiene que es compacto, por el teorema de Heine-Borel. Para cada $x \in A$ se considera un entorno abierto U_x tal que $U_x^* \cap A = \varnothing$.

Estos entornos constituyen un recubrimiento abierto de A, por tanto se puede extraer un subrecubrimiento finito. Por tanto, A es un conjunto finito, lo cual contradice que A fuese un conjunto no finito. ♣

1.5. Comentarios

Disponer de una extensión algebráica de un cuerpo es relativamente fácil. Por ejemplo, una extensión del cuerpo $(\mathbb{Q} \ + \ \cdot\ )$ es el cuerpo constituido por los elementos del conjunto

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}\ ] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

dotado de las operaciones

$(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2}) = (a+c)+(b+d)\sqrt{2}$ y $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd)+(bc+ad)\sqrt{2}$.

Aunque pueda parecer algo ingénuo, la cuestión es que no es tan fácil extender un cuerpo con un elemento $\mathbf{p}$ de una naturaleza distinta de la del cuerpo que se extiende, puesto que para poder dar sentido a

$$(a + b\mathbf{p})(c + d\mathbf{p}) = ac + (ad + bc)\mathbf{p} + bd\mathbf{p}^2$$

hay incorporar a $\mathbf{p}^2$ y todas las sucesivas potencias de $\mathbf{p}$.

En el caso de $\mathbb{Q}[\sqrt{k}\,], k \in \mathbb{N}\ k > 1$ y en el de $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$ se tiene

$$(\sqrt{k}\,)^2 = k \quad y \quad i^2 = -1.$$

Otra cuestión nada ingenua es disponer de un cuerpo ordenado que sea la extensión de otro cuerpo ordenado, como es el caso de $\mathbb{R}$ con $\mathbb{Q}$.

El proceso seguido para definir el modelo $\mathbb{R}^*$ del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ puede ser generalizado.

Compleción de un cuerpo ordenado

Sea $(\mathbb{K}\ +\ \cdot\ \leqslant)$ un cuerpo ordenado. Se definen las aplicaciones:

$$h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K} \text{ definida } h(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \sum_1^n 1 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

$$g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{K} \text{ definida } g(n) = \begin{cases} -\sum_1^n 1 & \text{si } n < 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ \sum_1^n 1 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{K} \text{ definida } f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{g(m)}{g(n)} = g(m)\big(g(n)\big)^{-1}$$

Las tres aplicaciones son lineales e inyectivas, y conservan el orden.

- $\mathbb{N}$ es isomorfo a $\mathbb{N}_{\mathbb{K}} = h(\mathbb{N}) \subset \mathbb{K}$ que suele ser denominado semianillo de números naturales de $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{Z}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}} = g(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{K}$ que suele ser denominado anillo de números enteros de $\mathbb{K}$.

- $\mathbb{Q}$ es isomorfo a $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}} = f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{K}$ que suele ser denominado cuerpo de números racionales de $\mathbb{K}$.

El proceso seguido con el cuerpo $(\mathbb{Q}\ +\ \cdot\ \leqslant)$ para construir el modelo $\mathbb{R}^*$ del cuerpo $\mathbb{R}$ puede ser empleado con el cuerpo $(\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}\ +\ \cdot\ \leqslant)$ un cuerpo ordenado completo $\mathbb{K}^*$ de forma que el cuerpo $\mathbb{K}$ puede identificarse con un subcuerpo de $\mathbb{K}^*$.

Hay que considerar que en un cuerpo ordenado $(\mathbb{K}\ +\ \cdot\ \leqslant)$ esta definido el valor absoluto y distancia entre dos escalares de forma similar al cuerpo $(\mathbb{Q}\ +\ \cdot\ \leqslant)$.

Análogamente, se definen los conceptos relativos a sucesiones:

- $(a_n) \subset \mathbb{K}$ nula: $\forall \epsilon \in \mathbb{K},\ \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0, \quad |a_n| < \epsilon$.
- $(a_n) \subset \mathbb{K}$ convergente a $a \in \mathbb{K}$: $\forall \epsilon \in \mathbb{K},\ \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0, \quad |a_n - a| < \epsilon.$$
- $\lim\limits_n a_n = a \in \mathbb{K}$: $\forall \epsilon \in \mathbb{K},\ \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0, \quad |a_n - a| < \epsilon$.
- $(a_n) \subset \mathbb{K}$ de Cauchy: $\forall \epsilon \in \mathbb{K},\ \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ n > n_0,\ m > n_0, \quad |a_n - a_m| < \epsilon.$$

También, se puede definir el conjunto $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}}$ de todas las sucesiones de Cauchy de $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ y la relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}}$ de equivalencia definida de la forma:

$$(a_n)\mathcal{R}(b_n) \iff \lim_n (a_n - b_n) = 0 \iff (a_n) - (b_n) \in \mathcal{N}_{\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}},$$

donde $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}}$ es el conjunto de todas las sucesiones nulas de $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$.

Se considera el conjunto cociente $\mathbb{K}^* = \mathcal{C}_{\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}}/\mathcal{R}$ que tiene con $\mathbb{K}$ el mismo papel que el conjunto $\mathbb{R}^*$ tiene con $\mathbb{R}$. Con lo cual se definen la suma, el producto y el orden en $\mathbb{K}^*$ de forma similar a como se hace en $\mathbb{R}^*$. Además, la misma demostración empleada para ver que $\mathbb{R}^*$ es un cuerpo ordenado completo se puede utilizar para $\mathbb{K}^*$ con sólo variar la pertenencia de los números ϵ considerados.

Cualquier número real a es el límite de una sucesión (a_n) de números racionales. Esta característica de $\mathbb{R}$ caracteriza a un cuerpo ordenado arquimediano.

Caracterización de cuerpo ordenado arquimediano
Un cuerpo ordenado $(\mathbb{K}\ +\ \cdot\ \leqslant)$ es arquimediano si y sólo si

$$\forall a \in \mathbb{K},\ \exists (a_n) \subset \mathbb{Q}_{\mathbb{K}} \text{ tal que } \lim_n a_n = a.$$

Además, un cuerpo ordenado arquimediano y completo es único salvo isomorfismos.

Unicidad de cuerpo ordenado arquimediano y completo
Todo cuerpo ordenado $(\mathbb{K}\ +\ \cdot\ \leqslant)$ arquimediano y completo es isomorfo al cuerpo de los números reales $(\mathbb{R}\ +\ \cdot\ \leqslant)$.

Recta real

La representación más común de $\mathbb{R}$ hace ver al conjunto como una línea recta del plano. El principal problema de esta representación es saber el punto de la recta que le corresponde a cada número real. Es fácil asignar el punto correspondiente al número 0. Basta elegir un punto cualquiera que llamamos (punto) 0. Si un número real es a positivo, $a > 0$, se le asigna un punto a la derecha del punto 0, y si es negativo, $a < 0$, uno a la izquierda del 0.

Una vez elegido un segmento rectilíneo del plano, como segmento patrón o unidad, si un extremo del segmento se sitúa sobre 0 entonces a su derecha, en la recta **R**, queda determinado el punto que le corresponde al número 1. Al repetir este proceso con el punto 1 en lugar del 0, se obtiene el punto correspondiente al número 2. De forma análoga se obtienen los puntos correspondientes a los números 3, 4, 5, ...

Si en lugar de la derecha se elige la izquierda, se obtienen los puntos correspondientes a los números -1, -2, -3, ...

El resto de números reales se deben corresponder con puntos de esa recta de forma que si dos números reales, a y b, cumplen que $a < b$, entonces el punto del número b está situado a la derecha del punto del número a. Además, si llamamos a y b a esos puntos de la recta, entonces para cualquier $x \in \mathbb{R}$ tal que $a < x < b$, se cumple que el punto correspondiente a x está en el interior del segmento de extremos el punto a y el punto b de la recta.

Para representar sobre la recta real un número racional se procede utilizando la división en partes iguales del segmento patrón, es decir, el de extremos 0 y 1 y que escribimos $[0, 1]$. Por ejemplo, si se desea dividir el segmento $[0, 1]$ en cinco partes iguales se traza otra recta que pase por el punto 0, y se sitúan sobre ella cinco veces un mismo segmento, de la longitud que se desee, de manera que se puedan marcar los segmentos

$$\overline{0A}, \quad \overline{AB}, \quad \overline{BC} \quad \overline{CD} \quad \text{y} \quad \overline{DE}.$$

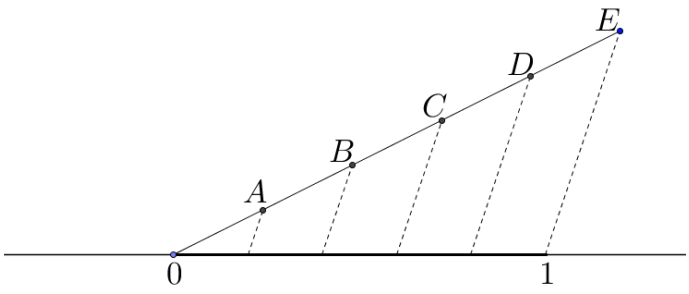

Figura 1.7: Determinación del número $\frac{1}{5}$ sobre la recta $\mathbb{R}$.

Al construir el segmento de extremos E y 1 y todos los segmentos paralelos a este último segmento $\overline{E1}$ que pasan por el resto de puntos A, B, C y D, se obtienen los puntos de corte de cada segmento con el segmento patrón que representan a los correspondientes números

$$\frac{1}{5}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{3}{5}, \quad \text{y} \quad \frac{4}{5}.$$

Además, se dispone de cinco subsegmentos de $[0,1]$ de igual longitud

$$\left[0, \frac{1}{5}\right], \quad \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right], \quad \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right], \quad \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right], \quad \text{y} \quad \left[\frac{4}{5}, 1\right].$$

En general, se suelen emplean particiones en 10, en 100, en 1000, ..., o cualquier otra potencia de 10, de forma similar al proceso de establecer la medida de longitud de un segmento mediante una regla graduada, partiendo de que al segmento patrón se le asigna longitud 1. En claro que se pueden obtener por el mismo procedimiento los segmentos correspondientes a la subdivisión en n partes iguales para determinar la longitud $\frac{1}{n}$, y por acumulación de segmentos de longitud $\frac{d}{n}$ con $1 \leqslant d \leqslant n$.

Al resto de números racionales, una vez expresados como fracción de números enteros, se les pueden asignar puntos de la recta, de forma análoga utilizando el teorema de Tales. De esta forma, cualquier número racional se puede expresar como un número decimal finito o periódico, empleando los necesarios segmentos unidad y los necesarios segmentos de longitud $\frac{1}{n}$.

Observación Se puede intuir la complejidad de saber exactamente qué punto le corresponde a cada número real irracional.

Nota Dados dos números $a, b \in \mathbb{R}$, es decir, dos puntos de la recta real a y b, al segmento $\overline{ab}$ se le representa por $[a, b]$.

Definir un subconjunto de $\mathbb{R}$ indicando la propiedad que cumplen sus elemento es bastante común. A veces esta propiedad es una ecuación o una inecuación, por ello, se precisa resolver ecuaciones e inecuaciones.

Ejercicios propuestos

1. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Demuestre las siguientes afirmaciones:

   a) Todo punto de acumulación de A es punto adherente de A.

   b) El recíproco de la afirmación anterior es falsa. (Busque un ejemplo donde el recíproco no sea cierto.)

   c) Todo punto aislado de A es un punto frontera de A.

   d) El recíproco de la afirmación anterior es falsa. (Busque un ejemplo donde el recíproco no sea cierto.)

2. Demuestre que $\text{front}A = \text{adh}A \cap \text{adh}\complement A$.

3. Estudie los puntos interiores y los puntos frontera y la adherencia de los conjuntos siguientes.

   a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 - 2x \geqslant x - 3\}$. *b*) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x^2 - 3x - 4|\}$.
   c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 2| + |x - 3| \leqslant 3\}$. *d*) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x^2 - 1| \leqslant 3\}$.
   e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 < 3x - 2\}$. *f*) $F = \{x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \mid 0 < |x^2 - 1| \geqslant 8\}$.

4. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Se definen los conjuntos

   $x_0 + A = \{z \in \mathbb{R} \mid z = x_0 + x; x \in A\}$, $A + B = \{z \in \mathbb{R} \mid z = x + y; x \in A, y \in B\}$.

   Compruebe si son ciertas las afirmaciones siguientes:

   a) Si A es un conjunto abierto entonces $x_0 + A$ es un conjunto abierto.

   b) Si A y B son conjuntos abiertos entonces $A + B$ es un conjunto abierto.

   c) Si A es un conjunto abierto entonces $A + B$ es un conjunto abierto.

   d) Si A es un conjunto cerrado entonces $x_0 + A$ es un conjunto cerrado.

   e) Si A y B son conjuntos cerrado entonces $A + B$ es un conjunto cerrado.

5. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Se definen los conjuntos

   $x_0 A = \{z \in \mathbb{R} \mid z = x_0 x; x \in A\}$, $AB = \{z \in \mathbb{R} \mid z = xy; x \in A, y \in B\}$.

   Compruebe si son ciertas las afirmaciones siguientes:

   a) Si A es un conjunto abierto entonces $x_0 A$ es un conjunto abierto.

   b) Si A y B son conjuntos abiertos entonces AB es un conjunto abierto.

   c) Si A es un conjunto abierto entonces AB es un conjunto abierto.

   d) Si A es un conjunto cerrado entonces $x_0 A$ es un conjunto cerrado.

   e) Si A y B son conjuntos cerrado entonces AB es un conjunto cerrado.

6. Estudie la adherencia de los siguientes conjuntos

   a) $A = (-2, 0)$, $B = (0, 3)$ y $C = \left\{ \dfrac{(-1)^n}{n} \middle| n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$.

   b) $A \cup B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $A \cup C$ y $\overline{B} \cap \overline{C}$.

7. Dadas las familias de conjuntos determine la unión y la intersección de todos los conjuntos.

   a) $\mathcal{F}_1 = \{(n, \infty) \mid n \in \mathbb{N}\}$ y $\mathcal{F}_2 = \{(-\infty, n) \cup (n, \infty) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

   b) $\mathcal{F}_3 = \left\{ \left(1, \dfrac{n+1}{n}\right) \middle| n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$ y $\mathcal{F}_4 = \left\{ \left(\dfrac{n-1}{n}, \dfrac{n+1}{n}\right) \middle| n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$.

8. Determine el supremo y el ínfimo de cada uno de los conjuntos de los ejercicios propuestos 3, 5 y 6.

9. Estudie si los siguientes conjuntos son compactos. En el caso de que no lo sean describa un recubrimiento de conjuntos abiertos del que no se pueda extraer un subrecubrimiento finito.

   a) $(-\infty, 0]$. *b)* $[0, 3)$. *c)* $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

   d) $\overline{(1, 3)} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 1| \leqslant 0\}$. *e)* $(-1, 1)$. *f)* $[1, 2] \cup [4, 5]$.

10. Demuestre que la unión de una colección finita de conjuntos compactos es un conjunto compacto.

11. Demuestre sin utilizar el teorema de Heine-Borel que un conjunto que contenga a una semirrecta no puede ser un conjunto compacto.

12. Dados K_1 y K_2 dos conjuntos compactos disjuntos ($K_1 \cap K_2 = \varnothing$). Demuestre que existe dos abiertos A_1 y A_2 disjuntos tales que $K_1 \subset A_1$ y $K_2 \subset A_2$.

13. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Se definen los conjuntos
    $x_0 + A = \{z \in \mathbb{R} \mid z = x_0 + x; x \in A\}$, $A + B = \{z \in \mathbb{R} \mid z = x + y; x \in A, y \in B\}$.
    Compruebe si son ciertas las afirmaciones siguientes:

    a) Si A es un conjunto compacto entonces $x_0 + A$ es un conjunto compacto.

    b) Si A es un conjunto compacto y B es un conjunto finito entonces $A + B$ es un conjunto compacto.

    c) Si A y B son conjuntos compactos entonces $A + B$ es un conjunto compacto.

14. ¿Existe una familia de compactos encajados cuya intersección sea vacía?

Ejercicios de autoevaluación

Preguntas: Cada cuestión se responde con **1** (Si) o **0** (no).
Recomendación: Busque un ejemplo, o un contraejemplo, que avale su respuesta.

1. ¿El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ tiene estructura de cuerpo con la suma y el producto de números reales?
2. ¿Sólo el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ tienen la propiedad arquimediana?
3. ¿El máximo de intervalo $(a, b) \subset \mathbb{Q}$ es b?
4. ¿Cualquier número racional se puede escribir con una expresión decimal finita o periódica?
5. ¿$\sqrt{a^2} = |a|$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$?
6. ¿Los números irracionales tienen una expresión decimal ilimitada no periódica?
7. ¿El conjunto $(a, b) \cup (c, d)$, con $a < b < c < d$ es un conjunto abierto y su supremo es d?
8. ¿El conjunto $[a, c) \cup (b, d]$, con $a < b < c < d$ es un conjunto cerrado y su mínimo es a?
9. Cualquier conjunto finito de $\mathbb{R}$ es un conjunto cerrado.
10. ¿Es un conjunto cerrado una sucesión de números reales?
11. ¿Cualquier sucesión de números reales contenida en el intervalo (a, b) posee supremo?
12. ¿Un conjunto acotado es aquel que está contenido en algún intervalo?

Solución: Para saber la respuesta a las preguntas concatene la escritura binaria, con cuatro dígitos, de los números **11, 15, 9**.

Observación: Cada ejercicio puede tener desde 0 hasta 4 respuestas ciertas.

1. Presumiblemente, el número de expresión decimal $13,012013abcdef...$, donde a, b, c, d, e, f son dígitos, es un número real irracional.

   a) Si $a = d = 0, b = e = 1, c = 2, f = 3$ o $a = b = c = d = e = f = 0$.

   b) Si $a = 0, b = 1, c = 3, d = 0, e = 1, f = 3$.

   c) Si $a = d = 0, b = e = 1, c = 4, f = 5$ o $a = b = c = d = e = 0, f = 5$.

   d) Si $a = b = 0, c = d = 1, e = f = 2$ o $a = b = c = 0, d = e = f = 1$. **(12)**

2. El número racional $\dfrac{1000}{111}$ tiene una expresión decimal.

   a) Periódica pura de periodo 09.

   b) Finita.

   c) Periódica mixta de periodo 08.

   d) Periódica pura de periodo 009. **(8)**

3. Dado un conjunto A tal que $[1, 2] \subset A \subset \mathbb{R}$.

   a) $A = \text{int}(A)$; conjunto abierto.

   b) $A = \overline{A}$; conjunto cerrado.

   c) $\varnothing \neq \text{int}(A) \subset A$; contiene un abierto no vacío.

   d) $\overline{A} \cap \text{int}(A) \neq \varnothing$. **(12)**

4. Sea $A = \{1\} \cup [2, 3) \cup (3, 4] \cup \{5\}$.

   a) $\text{int}(A) = (2, 4)$.

   b) $\text{front}(A) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   c) $\overline{A} \subset [1, 5]$.

   d) $\overline{A} \cap \text{int}(A) = (2, 3) \cup (3, 4)$. **(14)**

5. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 4x + 3 \geqslant 0\}$.

   a) A no es un conjunto acotado.

   b) $A \subset (0, \infty)$.

   c) $(\mathbb{R} - A) \subset (-1, 1)$

   d) Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $(-\infty, k) \subset A$. **(9)**

6. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} | \exists n \in \mathbb{N}, x = (-1)^n n^2 - 1\}$.

   a) A es un conjunto acotado.

b) A es un conjunto cerrado.

c) $\text{front}(A)$ es un conjunto acotado.

d) $\text{int}(A) = \varnothing$. **(10)**

7. Sea $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \exists n \in \mathbb{N} - \{0\}, x = (-1)^n \frac{1}{n^2} \right\}$.

   a) A es un conjunto acotado.

   b) A es un conjunto cerrado.

   c) $\text{front}(A) = A$.

   d) $\text{int}(A) = \varnothing$. **(9)**

8. Sea A el conjunto de soluciones de la inecuación $x^2 - 4 \leqslant 0$.

   a) A es un intervalo.

   b) A es un conjunto acotado.

   c) A es un conjunto compacto.

   d) A no es ni abierto ni cerrado. **(7)**

9. Sea la familia de intervalos $\mathcal{F} = \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n^3} \right)_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} \right\}$.

   a) La intersección de todos los intervalos es $[1, 2]$.

   b) $\mathcal{F}$ es una de intervalos abiertos que cada uno contiene a los siguientes.

   c) La intersección de todos los intervalos es $(1, 2)$.

   d) $\mathcal{F}$ es una familia de intervalos compactos que cada uno contiene a los siguientes. **(3)**

10. Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que $A \cap B \neq \varnothing$.

    a) $\text{int}(A \cup B) \neq \varnothing$.

    b) $\text{int}(A) \cap B = \varnothing$.

    c) $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$.

    d) $\text{int}(A \cap B) \neq \varnothing$. **(4)**