CAPÍTULO I

Espacios topológicos

En este capítulo definiremos los espacios a estudiar, los espacios topológicos. Un espacio topológico es un conjunto X dotado de una noción de cercanía o proximidad entre sus puntos. Esta idea se materializa por medio de una topología τ, que es una elección de algunos de los subconjuntos de X, llamados abiertos, cuyos puntos son próximos entre sí.

1. Definición y ejemplos

Dado un conjunto X denotamos por $\mathcal{P}(X)$ el *conjunto de partes de* X, es decir, la colección de todos sus subconjuntos:

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}.$$

Definición I.1

Sea $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ una colección de abiertos de X. Diremos que τ es una *topología* en X si satisface las siguientes propiedades:

(1) $\varnothing$ y X son elementos de τ.

(2) Si $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una colección arbitraria de elementos de τ, entonces la unión de todos los elementos de la colección

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$$

es un elemento de τ.

(3) Si $U_1, \ldots, U_n$ son un número finito de elementos de τ, entonces la intersección
$$U_1 \cap \ldots \cap U_n$$
es un elemento de τ.

El par (X, τ) se denomina *espacio topológico* y los elementos de τ se denominan *abiertos* de X.

Observación I.2

De forma sintética, una topología es una colección de subconjuntos que contiene al vacío y al total, y que es cerrada para las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas.

Proposición I.3. *La condición (3) de la definición es equivalente a la siguiente condición expresada para una intersección de únicamente dos abiertos:*

(3*) *Si U y V son elementos de τ, entonces $U \cap V$ es un elemento de τ.*

Demostración. Es claro que si una intersección finita de abiertos es un abierto entonces la intersección de dos abiertos es un abierto.

Para probar el recíproco razonamos por inducción sobre el número n de abiertos que intersecamos en la condición (3). Por la hipótesis (3*) se tiene si U y V son abiertos entonces $U \cap V$ es abierto. Veamos ahora que si la propiedad es cierta para $n-1$ abiertos entonces es cierta para n abiertos. Consideremos los abiertos $U_1, \ldots, U_{n-1}, U_n$. Si llamamos $U := U_1 \cap \ldots \cap U_{n-1}$ y $V := U_n$ se tiene que
$$U_1 \cap \ldots \cap U_{n-1} \cap U_n = (U_1 \cap \ldots \cap U_{n-1}) \cap U_n = U \cap V.$$
El conjunto U es abierto por hipótesis de inducción, por tanto por (3*) la intersección con otro abierto V, $U_1 \cap \ldots \cap U_{n-1} \cap U_n = U \cap V$, es abierto como queríamos probar. $\square$

Ejemplo I.4

Sea X un conjunto arbitrario y $\tau_D = \mathcal{P}(X)$. La colección τ_D es una topología en X ya que contiene a todos los subconjuntos de X y, por tanto, contiene en particular al vacío y al total, es cerrada para las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas. La topología τ_D se denomina *topología discreta* y en esta topología todos los conjuntos son abiertos. Si un conjunto X está dotado de la topología discreta diremos que X es un *espacio discreto*.

Ejemplo I.5

Sea X un conjunto arbitrario y $\tau_I = \{\varnothing, X\}$. La colección τ_I, que solo posee estos dos elementos, es una topología en X ya que:

(1) $\varnothing, X \in \tau_I$.
(2) $\varnothing \cup X = X \in \tau_I$.
(3) $\varnothing \cap X = \varnothing \in \tau_I$.

Esta topología se denomina *topología indiscreta* o *trivial* y es la topología más simple que puede tener un conjunto. Si un conjunto X está dotado de la topología indiscreta diremos que X es un *espacio indiscreto*.

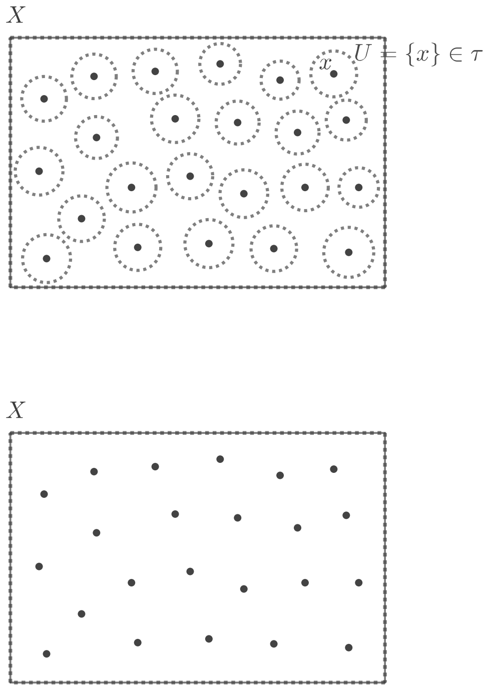

Figura I.1. Topología discreta e indiscreta en un conjunto X. En la topología discreta hay un abierto que contiene únicamente a cada punto y todos los puntos están separados unos de otros por medio de los abiertos. En la topología indiscreta hay un único abierto que contiene a todos los puntos juntos.

Observación I.6

Cualquier topología τ en un conjunto X es un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ situado entre las dos topologías extremas, la discreta $\tau_D = \mathcal{P}(X)$ que contiene a todos los subconjuntos posibles y la indiscreta $\tau_I = \{\varnothing, X\}$ que contiene al mínimo número de abiertos posible:

$$\tau_I \subset \tau \subset \tau_D.$$

Ejemplo I.7

Sea X un conjunto arbitrario y $\tau_{CF} = \{U \subset X \mid X\backslash U \text{ es finito}\} \cup \{\varnothing\}$. La colección τ_{CF} es una topología en X. En efecto, veamos que τ_{CF} satisface las condiciones (1), (2) y (3*):

(1) $X \in \tau_{CF}$ ya que $X\backslash X = \varnothing$ que es un conjunto finito puesto que no contiene ningún elemento. Por otro lado, $\varnothing \in \tau_{CF}$ por definición.

(2) Sea $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia arbitraria de elementos de τ_{CF} y supongamos que todos los $U_\lambda \neq \varnothing$ para evitar casos triviales. Veamos que $X\backslash \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ es finito. Por una parte

$$X\backslash \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(X\backslash U_\lambda).$$

Entonces, dado que $U_\lambda \in \tau_{CF}$ y $U_\lambda \neq \varnothing$ para cada $\lambda \in \Lambda$ se tiene que $X\backslash U_\lambda$ es finito para cada $\lambda \in \Lambda$ y, como la intersección de conjuntos finitos es un conjunto finito, se sigue que $X\backslash \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ es finito y, por consiguiente, $\cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ es un elemento de τ_{CF}.

(3*) Sean U y V dos elementos de τ_{CF}. De nuevo suponemos U y V son no vacíos ya que en otro caso la intersección es trivialmente vacía. Veamos que $X\backslash(U \cap V)$ es finito. Obsérvese que

$$X\backslash(U \cap V) = (X\backslash U) \cup (X\backslash V),$$

Entonces, dado que $U, V \in \tau_{CF}$ y son no vacíos se tiene que $X\backslash U$ y $X\backslash V$ son finitos y, como la unión de dos conjuntos finitos es un conjunto finito, se sigue $X\backslash(U \cap V)$ es finito y, por tanto, $U \cup V$ es un elemento de τ_{CF}.

La topología τ_{CF} se denomina *topología cofinita* o *topología de los complementos finitos*.

A continuación veremos algunos ejemplos de topologías en espacios finitos.

Ejemplo I.8

Sea $X = \{0\}$ un conjunto unipuntual, entonces X solamente admite la topología trivial dado que $\mathcal{P}(X) = \{\varnothing, X\}$.

Ejemplo I.9

Consideremos el conjunto $X = \{0, 1\}$. En dicho conjunto podemos considerar cuatro topologías:

1. $\tau_I = \{\varnothing, \{0, 1\}\}$.
2. $\tau_S = \{\varnothing, \{0\}, \{0, 1\}\}$.
3. $\tau_{S'} = \{\varnothing, \{1\}, \{0, 1\}\}$.
4. $\tau_D = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

Es inmediato comprobar que las colecciones τ_S y $\tau_{S'}$ son topologías en X. En efecto, el vacío y el total son elementos de ambas colecciones y las dos son cerradas para las uniones e intersecciones. El espacio X dotado de la topología τ_S se denomina *espacio de Sierpinski* y lo denotaremos por $\mathcal{S} = (\{0, 1\}, \tau_S)$.

Por otro lado, las topologías τ_S y $\tau_{S'}$ son esencialmente “la misma” ya que la aplicación $f : X \longrightarrow X$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

es una biyección de X que induce una biyección entre los abiertos de τ_S y los de $\tau_{S'}$ (véase Figura I.2). Veremos más adelante que esta f es un ejemplo de equivalencia topológica a la que llamaremos *homeomorfismo*.

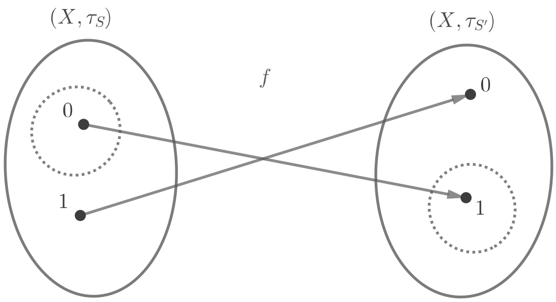

Figura I.2. La biyección en $X = \{0, 1\}$ induce una biyección entre las topologías τ_S y $\tau_{S'}$, ya que lleva el abierto $\{0\}$ a $\{1\}$ (y, obviamente, el vacío al vacío y el total al total). Por tanto es un homeomorfismo entre dos espacios de Sierpinski.

A continuación veremos algunos ejemplos de topologías en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Esto es otra muestra de que un mismo conjunto puede admitir distintas topologías.

Ejemplo I.10

En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se considera la colección

$$\tau_u = \{U \subset \mathbb{R} \mid \text{ para cada } x \in U \text{ existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset U\}.$$

Veamos que τ_u es una topología en $\mathbb{R}$ viendo que satisface las condiciones (1), (2) y (3$*$).

(1) $\varnothing \in \tau_u$ ya que al no poseer puntos la condición se cumple trivialmente. El total $\mathbb{R}$ también es un elemento de τ_u ya que si $x \in \mathbb{R}$ y escogemos $\varepsilon = 1$ se tiene que $(x-1, x+1) \subset \mathbb{R}$.

(2) Sea $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una colección arbitraria de elementos de τ_u. Entonces, dado $x \in \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, existe un $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x \in U_{\lambda_0}$. Como $U_{\lambda_0} \in \tau_u$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset U_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Como consecuencia, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ es un elemento de τ_u.

(3*) Sean $U, V \in \tau_u$ y sea $x \in U \cap V$. Puesto que $x \in U$ existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1 \subset U)$. Del mismo modo, dado que $x \in V$ existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $(x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \subset V$. Como consecuencia, si escogemos $\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ se tiene que

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \subset U$$
$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \subset V,$$

por lo tanto, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset U \cap V$.

Entonces τ_u es una topología en $\mathbb{R}$ que se denomina *topología usual* o *topología euclídea*. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ dotado con la topología usual τ_u se denomina *recta real*.

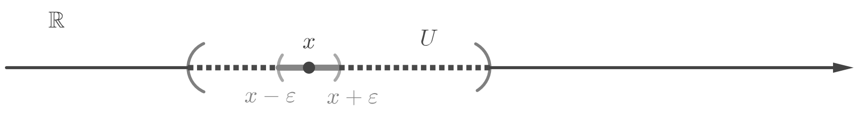

Figura I.3. Abiertos de la recta real con la topología usual τ_u.

Ejemplo I.11

En el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se considera la colección

$$\tau_K = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Veamos que τ_K verifica las condiciones (1), (2) y (3$*$) y por tanto es una topología en $\mathbb{R}$.

(1) $\emptyset$ y $\mathbb{R}$ son elementos de τ_K por definición.

(2) Sea $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una colección de elementos de τ_K. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\emptyset \neq U_\lambda \subsetneq \mathbb{R}$ para todo $\lambda \in \Lambda$ ya que los elementos vacíos no aportan nada a la unión y si alguno es el total la propiedad se verifica trivialmente. Como consecuencia cada U_λ es de la forma $U_\lambda = (a_\lambda, +\infty)$ con $a_\lambda \in \mathbb{R}$. Comprobemos que

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda, +\infty) = \begin{cases} (\text{ínf}_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda, +\infty) & \text{si } \{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \text{ está acotado inferiormente} \\ \mathbb{R} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y, por tanto, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ pertenece a τ_K.

En efecto, supongamos en primer lugar que $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ no está acotado inferiormente y sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $a_{\lambda_0} < x$ y, por tanto, $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda, +\infty)$. Como consecuencia $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda, +\infty) = \mathbb{R}$.

Supongamos ahora que $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ está acotado inferiormente y sea $a = \text{ínf}\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Si $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda, +\infty)$ entonces existe un $\lambda_1 \in \Lambda$ tal que $a_{\lambda_1} < x$ y, puesto que $a \leqslant a_{\lambda_1}$, se sigue que $x \in (a, +\infty)$. Por otro lado, supongamos que $x \in (a, +\infty)$ y sea $\varepsilon = (x-a)/2$. Por la caracterización del ínfimo se tiene que existe $\lambda_2 \in \Lambda$ tal que $a \leqslant a_{\lambda_2} < a + \varepsilon < x$ y, por tanto, $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda, +\infty)$. Por consiguiente $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda, +\infty) = (a, +\infty)$.

(3*) Sean $(a, +\infty)$ y $(b, +\infty)$ dos elementos de τ_K. Entonces,

$$(a, +\infty) \cap (b, +\infty) = (\text{máx}\{a, b\}, +\infty),$$

que es un elemento de τ_K.

El conjunto de los números reales dotado de la topología τ_K se denomina *recta de Kolmogoroff* y se denota $\mathbb{R}_K$.

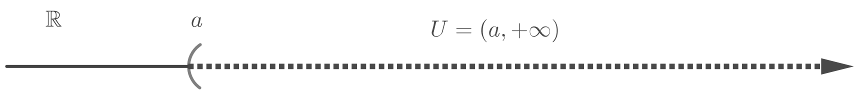

Figura I.4. Abiertos de $\mathbb{R}$ con la topología de Kolmogoroff τ_K.

Dos topologías en un mismo conjunto se pueden comparar si todos los abiertos de una de las topologías están en la otra.

Definición I.12

Sean τ y τ' dos topologías en un conjunto X. Diremos que τ' es *más fina* que τ (o que τ es *más gruesa* o *menos fina* que τ') si $\tau \subset \tau'$, e Y diremos que τ' es *estrictamente más fina* si $\tau \subsetneq \tau'$, es decir, si todo abierto de τ es también abierto de τ' y existe al menos un abierto de τ' que no lo es de τ. Diremos que τ y τ' son *comparables* si $\tau \subset \tau'$ o $\tau' \subset \tau$.

Observación I.13

Intuitivamente τ' es más fina que τ si tiene todos los abiertos de τ y algunos más. Una topología más fina distingue "de forma más fina"los puntos y sus alrededores.

En un conjunto X, la topología discreta τ_D es la topología más fina que podemos tomar. En efecto, si τ es otra topología en X se tiene que $\tau \subset \mathcal{P}(X) = \tau_D$ y, por tanto, τ_D es más fina que τ. Por otra parte, la topología indiscreta τ_I es la topología menos fina que podemos definir en X. En efecto, dada otra topología τ en X, la condición (1) de la Definición I.1 garantiza que $\tau_I = \{\emptyset, X\} \subset \tau$ y, por tanto, τ es más fina que τ_I. En resumen, cualquier topología está entre una de las dos representadas en la Figura I.1, la discreta y la indiscreta.

Ejemplo I.14

En el conjunto de los números reales se tiene que la topología usual es estrictamente más fina que la topología de Kolmogoroff, es decir,

$$\tau_K \subsetneq \tau_u.$$

En efecto, ya que los conjuntos de la forma $(a, +\infty)$ son abiertos usuales, se tiene que $\tau_K \subset \tau_u$. Sin embargo el abierto usual $(0, 1)$ no es un abierto de Kolmogoroff y, por tanto, $\tau_u \nsubseteq \tau_K$.

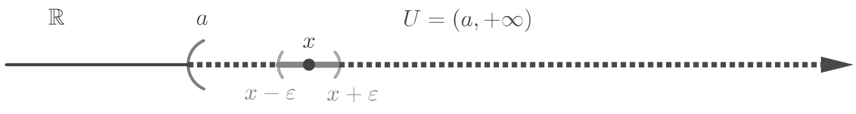

Figura I.5. Para cualquier punto x de un abierto $(a, +\infty)$ de la topología de Kolmogoroff τ_K podemos meter un intervalo de la forma $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ tal que $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, +\infty)$. Por tanto $\tau_K \subsetneq \tau_u$.

2. Base de una topología

En esta sección se introduce el concepto de *base* de una topología. De manera análoga a como ocurre en álgebra lineal, una base será un conjunto de elementos a partir de los cuales se puede recuperar toda la estructura, es decir, la topología. La idea es que buscamos elegir "unos pocos" abiertos de tal modo que con ellos podamos "recuperar" todos los abiertos de la topología.

Definición I.15

Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que un subconjunto $\mathcal{B}_\tau \subset \tau$ es una *base* de τ si dado un abierto $U \in \tau$ y un punto $x \in U$ existe un elemento $B_x \in \mathcal{B}_\tau$ tal que $x \in B_x \subset U$.

Si $\mathcal{B}_\tau$ es una base de τ llamaremos *abiertos básicos* a los elementos de $\mathcal{B}_\tau$.

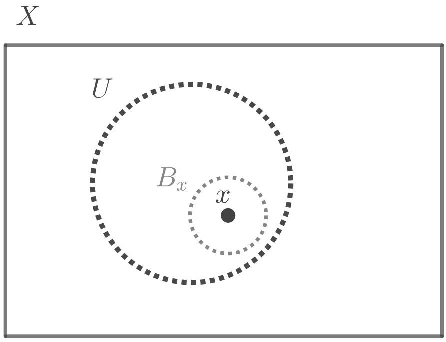

Figura I.6. Dado un punto $x \in X$ y un abierto U que lo contiene, existe un abierto básico B_x tal que $x \in B_x \subset U$.

Proposición I.16. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base de τ. Son equivalentes:*

(1) *$U \subset X$ es abierto.*
(2) *Para cada $x \in U$ existe un abierto básico $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset U$.*
(3) *U es unión de abiertos básicos.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Se cumple por la propia definición de base.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea U un abierto. Por (2) se tiene que para cada punto $x \in U$ existe un abierto básico $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset U$. Entonces,

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x.$$

(3) $\Rightarrow$ (1). Si U es unión de abiertos básicos se tiene que, en particular, U es unión de abiertos y, por tanto, abierto. □

Observación I.17

Del resultado anterior se deduce que si τ es una topología y $\mathcal{B}_\tau$ es una base de τ, la topología τ se puede describir como

$$\tau = \{U \subset X \mid \text{para todo } x \in U \text{ existe } B_x \in \mathcal{B}_\tau \text{ tal que } x \in B_x \subset U\}.$$

Observación I.18

Todo espacio topológico (X, τ) tiene al menos una base puesto que la propia topología τ es una base. A diferencia de álgebra lineal, una base no es un conjunto minimal que genere la topología, sino que llamaremos base a cualquier familia que la genere. Obviamente, estaremos interesados en bases lo más pequeñas posibles tales que consigan generar toda la topología por sí solas.

Ejemplo I.19

Sea (X, τ_D) un espacio discreto. Entonces el conjunto

$$\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$$

es una base de la topología discreta τ_D. En efecto, sea $U \subset X$ un abierto y $x \in U$. Entonces, si escogemos $B_x = \{x\}$ se tiene que $x \in B_x \subset U$.

Ejemplo I.20

Sea $\mathbb{R}_K$ la recta de Kolmogoroff. Entonces, el conjunto

$$\mathcal{B} = \{(q, +\infty) \mid q \in \mathbb{Q}\}$$

es una base de τ_K. Dado un abierto $(a, +\infty)$ de $\mathbb{R}_K$ y $x \in (a, +\infty)$, la densidad de los números racionales en los reales garantiza que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $a < q < x$. Como consecuencia, si escogemos $B_x = (q, +\infty)$ se tiene que $x \in B_x \subset (a, +\infty)$.

El siguiente teorema caracteriza las familias de subconjuntos que son base de alguna topología.

Teorema I.21. *Sean X un conjunto y $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de X. Entonces, existe una topología $\tau_{\mathcal{B}}$ que tiene a $\mathcal{B}$ como base si y solo si*

(1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.

(2) *Para cada dos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que existe $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ con $x \in B_3$ y $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

Demostración. Supongamos que existe una topología $\tau_{\mathcal{B}}$ que tiene a $\mathcal{B}$ como base. Puesto que X es abierto y todo abierto es unión de abiertos básicos por la Proposición I.16 se sigue (1). Y como B_1 y B_2 son abiertos básicos, su intersección $B_1 \cap B_2$ es un abierto y, usando la Definición I.15, se verifica (2).

Para probar el recíproco supongamos que se verifican las condiciones (1) y (2) y veamos que la colección

$$\tau_{\mathcal{B}} = \{U \subset X \mid \text{para todo } x \in U \text{ existe } B_x \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B_x \subset U\}$$

es una topología en X:

- X es un elemento de $\tau_{\mathcal{B}}$ por (1) y $\varnothing$ también lo es por la propia definición de $\tau_{\mathcal{B}}$.
- Sea $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia arbitraria de subconjuntos de $\tau_{\mathcal{B}}$. Entonces, para cada $\lambda \in \Lambda$, U_λ se puede describir como
$$U_\lambda = \bigcup_{x \in U_\lambda} B_x^\lambda.$$
por definición de $\tau_{\mathcal{B}}$. Como consecuencia
$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigcup_{x \in U_\lambda} B_x^\lambda \right) = \bigcup_{\omega \in \Omega} B_\omega$$
es un elemento de $\tau_{\mathcal{B}}$, ya que cada punto x está en algún B_ω de la unión.
- Sean U y V elementos de $\tau_{\mathcal{B}}$ y sea $x \in U \cap V$. Por definición de $\tau_{\mathcal{B}}$ existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que
$$x \in B_1 \subset U \text{ y } x \in B_2 \subset V.$$
Por tanto, $x \in B_1 \cap B_2 \subset U \cap V$ y, por la condición (2), se sigue que existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U \cap V$ Como consecuencia $U \cap V$ es un elemento de $\tau_{\mathcal{B}}$.

Por tanto, como $\tau_{\mathcal{B}}$ satisface las condiciones de la Definición I.1, es una topología. □

Definición I.22

La topología $\tau_{\mathcal{B}}$ del Teorema I.21 se denomina *topología generada por* $\mathcal{B}$.

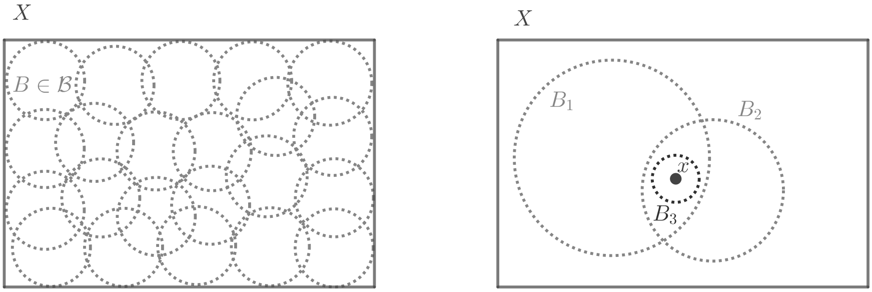

Figura I.7. Condiciones (1) y (2) del Teorema I.21 para que una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos sea base de alguna topología.

Ejemplo I.23

En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, la familia

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

es base para alguna topología. En efecto,

(1) $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-n, n)$.

(2) Sean $B_1 = (a_1, b_1)$ y $B_2 = (a_2, b_2)$ tales que $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. En este caso

$$B_1 \cap B_2 = \left(\max_{i\in\{1,2\}}\{a_i\}, \min_{i\in\{1,2\}}\{b_i\}\right) \in \mathcal{B}.$$

La topología generada en $\mathbb{R}$ por la base $\mathcal{B}$ es

$$\tau_{\mathcal{B}} = \{U \subset \mathbb{R} \mid \text{ para cada } x \in U, \text{ existen } a, b \in \mathbb{R} \text{ tales que } x \in (a, b) \subset U\}.$$

Es inmediato comprobar que la topología $\tau_{\mathcal{B}}$ coincide con la topología usual τ_u de $\mathbb{R}$.

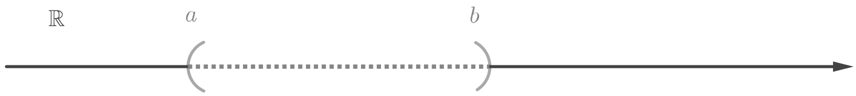

Figura I.8. Abiertos básicos de $\mathbb{R}$ con la topología usual.

Ejemplo I.24

Consideremos el producto cartesiano $\mathbb{R}^n$ de n copias del conjunto de los números reales. En $\mathbb{R}^n$ consideramos la *distancia euclídea* $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Dados $x \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, se define la *bola abierta de centro* x y *radio* r como el subconjunto

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r\}.$$

La colección de las bolas en $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{B} = \{B(x, r) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ r > 0\}$$

es una base para una topología en $\mathbb{R}^n$ que se denomina *topología usual* y se denota por τ_u. El conjunto $\mathbb{R}^n$ dotado de esta topología se denomina *espacio euclídeo n-dimensional*. En particular, la recta real $(\mathbb{R}, \tau_u)$ anteriormente definida es el espacio euclídeo 1-dimensional.

En efecto,

(1) $\mathbb{R}^n = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} B(x, 1)$.

(2) Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Supongamos que $B_1 = B(x_1, r_1)$ y $B_2 = B(x_2, r_2)$ y sea $x \in B_1 \cap B_2$. Tenemos que ver que existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset B_1 \cap B_2$. Basta escoger (ver Figura I.9):

$$0 < r < \text{mín}\{r_1 - d(x, x_1), r_2 - d(x, x_2)\}.$$

En efecto, si $y \in B(x, r)$ entonces para $i = 1, 2$ se tiene

$$d(y, x_i) \leqslant d(y, x) + d(x, x_i) < r + d(x, x_i) < r_i.$$

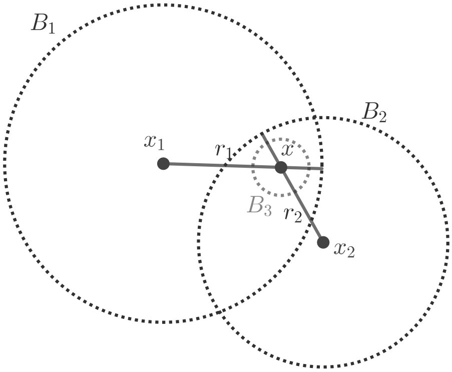

Figura I.9. Elección del abierto básico $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ en el Ejemplo I.24 del espacio euclídeo n-dimensional $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo I.25

En el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se considera la colección

$$\mathcal{B}_S = \{\, [a,b) \mid a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$$

es una base para una topología en $\mathbb{R}$, que denotaremos por τ_S. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ dotado de la topología τ_S se denomina *recta de Sorgenfrey* y se denotará por $\mathbb{R}_S$.

En efecto,

(1) $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n,n)$.

(2) Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_S$ tales que $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$. Entonces $B_1 = [a_1,b_1)$, $B_2 = [a_2,b_2)$ y

$$B_1 \cap B_2 = \left[\max_{i\in\{1,2\}}\{a_i\},\ \min_{i\in\{1,2\}}\{b_i\}\right) \in \mathcal{B}_S.$$

Figura I.10. Abiertos básicos de la recta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$.

La siguiente proposición establece que podemos comparar dos topologías mirando simplemente a sus bases.

Proposición I.26. *Sean τ y τ' dos topologías en un conjunto X. Supongamos que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases de τ y τ', respectivamente. Son equivalentes:*

(1) *τ' es más fina que τ.*

(2) *Para cada $x \in X$ y cada $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$, existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$.*

Demostración. Si τ' es más fina que τ se tiene que, dado $x \in X$ y $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$ entonces $B \in \tau'$. Puesto que $\mathcal{B}'$ es una base de τ' existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$ y se sigue (2).

Para probar el recíproco tenemos que ver que, dado $U \in \tau$ entonces $U \in \tau'$. Como $\mathcal{B}$ es una base de τ se tiene que para cada punto $x \in U$ existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset U$. Aplicando (2) se sigue que para cada $x \in U$ existe $B'_x \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B'_x \subset B_x \subset U$ y, como consecuencia, $U \in \tau'$ ya que $\mathcal{B}'$ es base de τ'. $\square$

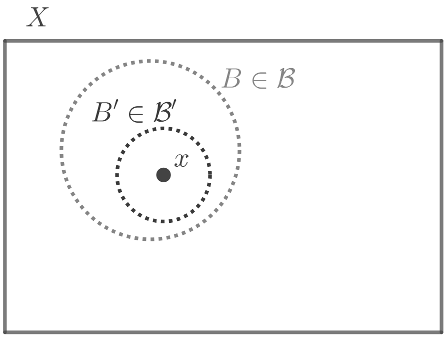

Figura I.11. Idea de la demostración de la Proposición I.26.

Ejemplo I.27

En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se tiene que

$$\tau_K \subsetneq \tau_U \subsetneq \tau_S,$$

es decir, la topología de Sorgenfrey es estrictamente más fina que la topología usual y ésta es, a su vez, estrictamente más fina que la topología de Kolmogoroff. Aunque el primer contenido de la cadena ya ha sido probado en el Ejemplo I.14, lo probaremos de nuevo utilizando las bases.

En efecto, veamos que $\tau_K \subset \tau_U$. Es claro que una base de τ_K es

$$\mathcal{B}_K = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Dado $(a, +\infty)$ y un punto $x \in (a, +\infty)$ se tiene que $x \in (a, x + 1) \subset (a, +\infty)$. Como $(a, x + 1) \in \mathcal{B}_u$, la Proposición I.26 garantiza que $\tau_K \subset \tau_u$. Que las topologías son diferentes, es decir, que τ_u es estrictamente más fina que τ_K se puede ver en el Ejemplo I.14.

Veamos que $\tau_u \subsetneq \tau_S$. Sea $(a, b) \in \mathcal{B}_u$ y un punto $x \in (a, b)$. Entonces $x \in [x, b) \subset (a, b)$ y, como $[x, b) \in \mathcal{B}_S$, la Proposición I.26 garantiza que $\tau_u \subset \tau_S$. Además, $\tau_u \neq \tau_S$ ya que $[a, b) \in \tau_S$ pero $[a, b) \notin \tau_u$, porque para el punto a no existe $\varepsilon > 0$ tal que $a \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset [a, b)$ (ver Figura I.12).

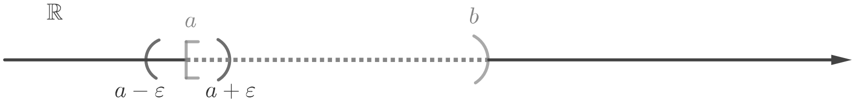

Figura I.12. En el Ejemplo I.27, para el punto a no existe $\varepsilon > 0$ tal que $a \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset [a, b)$, por lo cual $\tau_u \subsetneq \tau_S$.

3. Conjuntos cerrados

En esta sección se introduce la familia de cerrados de un espacio topológico. Los cerrados son los complementarios de los abiertos en una topología y, como tales, satisfacen conjuntistamente las propiedades complementarias a las de la familia de abiertos.

Definición I.28

Un subconjunto C de un espacio topológico X se dice que es *cerrado* en X si su complementario $X \backslash C$ es abierto.

Veamos ejemplos de los conjuntos cerrados en algunas de las topologías introducidas hasta el momento

Ejemplo I.29

Si (X, τ_I) es un espacio indiscreto, como los únicos abiertos son el vacío y el total, sus complementarios, que son el total y el vacío son los únicos cerrados.

Ejemplo I.30

Si (X, τ_D) es un espacio discreto todos sus subconjuntos son cerrados. En efecto, dado cualquier subconjunto $A \subset X$, entonces $X \backslash A \in \mathcal{P}(X) = \tau_D$ de donde se sigue que A es cerrado en X.

Ejemplo I.31

Sea X un conjunto dotado de la topología cofinita τ_{CF}. Recordemos que

$$\tau_{CF} = \{U \subset X \mid X \backslash U \text{ es finito}\} \cup \{\varnothing\}$$

Como consecuencia se tiene que los cerrados en X con la topología cofinita son los subconjuntos finitos y el total.

Ejemplo I.32

En $\mathbb{R}$ con la topología usual podemos describir algunos cerrados:

(a) Los conjuntos unipuntuales $\{p\}$ con $p \in \mathbb{R}$ son cerrados ya que $\mathbb{R}\backslash\{p\} = (-\infty, p) \cup (p, +\infty)$ es abierto.

(b) Los subconjuntos de la forma $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ son cerrados ya que $\mathbb{R}\backslash[a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ es abierto.

(c) Los subconjuntos de la forma $[a, +\infty)$ (resp. $(-\infty, a]$) con $a \in \mathbb{R}$ son cerrados ya que $\mathbb{R}\backslash[a, +\infty) = (-\infty, a)$ (resp. $\mathbb{R}\backslash(-\infty, a] = (a, +\infty)$) es abierto.

Existen muchos más subconjuntos cerrados, ya que hay muchos más abiertos usuales que los descritos como uniones finitas de intervalos.

Observación I.33

Los subconjuntos de la forma $[a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ no son ni abiertos ni cerrados en $\mathbb{R}$ con la topología usual. Usando la argumentación del Ejemplo I.27 tenemos que $[a, b)$ no es abierto. Para ver que $[a, b)$ no es cerrado calculamos su complementario:

$$\mathbb{R}\backslash[a, b) = (-\infty, a) \cup [b. + \infty)$$

que no es un abierto de τ_u pues no existe $\varepsilon > 0$ tal que $(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subset (-\infty, a) \cup [b. + \infty)$.

Ejemplo I.34

En la recta de Kolmogoroff $\mathbb{R}_K$ los cerrados son el vacío, el total y los complementarios de los conjuntos de la forma $(a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$, es decir, los conjuntos de la forma $(-\infty, a]$ con $a \in \mathbb{R}$.

Observación I.35

Dadas dos topologías τ y τ' en un conjunto X, si τ' es más fina que τ todo abierto de τ es abierto de τ'. Por tanto, tomando complementarios, todo cerrado de τ también es cerrado de τ'.

Ejemplo I.36

La topología de la recta de Sorgenfrey, τ_S es más fina que la topología usual, por lo cual todo cerrado usual es también cerrado de la recta de Sorgenfrey, en particular son cerrados en $\mathbb{R}_S$:

(a) Los conjuntos unipuntuales $\{p\}$.
(b) Los subconjuntos de la forma $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
(c) Los subconjuntos de la forma $[a, +\infty)$ (resp. $(-\infty, a]$) con $a \in \mathbb{R}$.

Además hay cerrados del tipo:

(d) Los subconjuntos de la forma $(-\infty, a) \cup [b. + \infty)$ con $a < b$ ya que son los complementarios de los abiertos básicos $[a, b)$.

Ejemplo I.37

En $\mathbb{R}^2$ dotado con la topología usual el subconjunto

$$\mathbb{R}^2_+ = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0\right\}$$

es cerrado. Para ello observaremos que

$$\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}^2_+ = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\right\} \cap \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\right\}$$

es abierto. Veamos primero que el conjunto

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\right\}$$

es abierto. Para cada $(x_0, y_0) \in U$ veamos que existe un $r > 0$ tal que $B\left((x_0, y_0), r\right) \subset U$. Basta escoger $0 < r < -x_0$ (ver Figura I.13). En efecto, si $(x, y) \in B\left((x_0, y_0), r\right)$ entonces

$$x < x_0 + r < 0,$$

y por tanto $B\left((x_0, y_0), r\right) \subset U$. Probar que el otro conjunto de la intersección es abierto es completamente análogo. Entonces la intersección de ambos conjuntos es abierta y, por tanto, su complementario es cerrado.

Otros ejemplos de subconjuntos cerrados en $\mathbb{R}^2$ con la topología usual son:

(a) Los conjuntos unipuntuales $\{(x_0, y_0)\}$.
(b) Cualquier recta, por ejemplo

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

(c) Cualquier *bola cerrada* de centro (x_0, y_0) y *radio* r

$$\overline{B}\left((x_0, y_0), r\right) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d\left((x_0, y_0), (x, y)\right) \leqslant r\right\}.$$

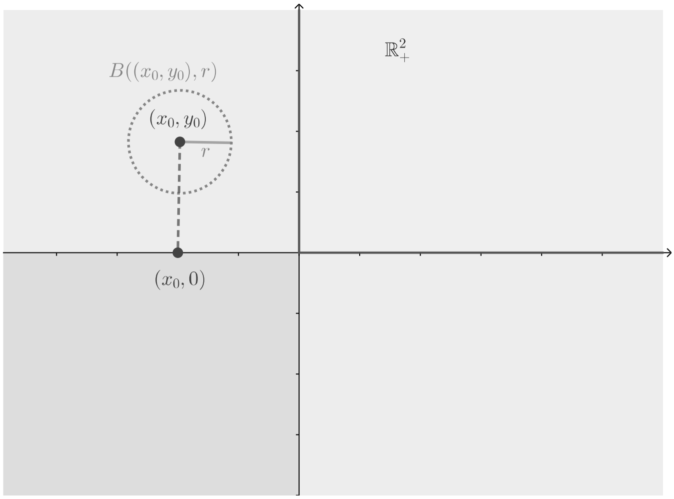

FIGURA I.13. El subconjunto $\mathbb{R}^2_+$ del Ejemplo I.37 es un cerrado de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual.

El siguiente resultado caracteriza las propiedades de la familia de cerrados que, como hemos mencionado al inicio de la sección, son las propiedades complementarias a las de los abiertos de la topología.

TEOREMA I.38. *Sea X un espacio topológico. Entonces,*

(1) *X y $\emptyset$ son cerrados.*

(2) *Si $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia arbitraria de cerrados entonces*

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$$

es cerrado.

(3) *Si $C_1, \ldots, C_n$ son un número finito de cerrados, entonces*

$$C_1 \cup \cdots \cup C_n$$

es cerrado.

Demostración. (1) Como X y $\varnothing$ son abiertos y complementarios el uno del otro se sigue el resultado.

(2) Sea $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia arbitraria de subconjuntos cerrados. Veamos que su intersección es también un cerrado. El complementario de la intersección es:

$$X\backslash\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(X\backslash C_\lambda)$$

y, como cada uno de los C_λ es cerrado, $X\backslash C_\lambda$ es abierto para cada $\lambda\in\Lambda$. Por consiguiente, $X\backslash\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda\right)$ es una unión arbitraria de abiertos y, por tanto, abierto. Luego $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ es cerrado.

(3) Sean $C_1,\ldots,C_n$ una cantidad finita de cerrados. Entonces, $F_1\cup\cdots\cup F_n$ es cerrado ya que su complementario es

$$X\backslash(C_1\cup\cdots\cup C_n) = (X\backslash C_1)\cap\cdots\cap(X\backslash C_n)$$

que es abierto por ser intersección finita de abiertos.

□

Observación I.39

Puesto que los cerrados son los complementarios de los abiertos se tiene que especificar la familia de cerrados es equivalente a especificar la de abiertos y, por tanto, la familia de cerrados determina por completo la topología.

4. Tipos de puntos de un subconjunto

En esta sección se introduce la noción de entorno, que nos permite definir el concepto de cercanía sin la necesidad de introducir una distancia. Gracias a esta nuevo noción podemos introducir otras nociones intuitivas como “estar dentro” o “estar fuera” y otras como“estar en la frontera” o“estar pegado”.

Definición I.40

Sea X un espacio topológico y $x\in X$. Diremos que $N\subset X$ es un *entorno* de x si existe un abierto U tal que $x\in U\subset N$. En caso de que N sea abierto diremos que N es un *entorno abierto* de x. Denotamos por $\mathcal{N}_x$ al conjunto de entornos del punto x.

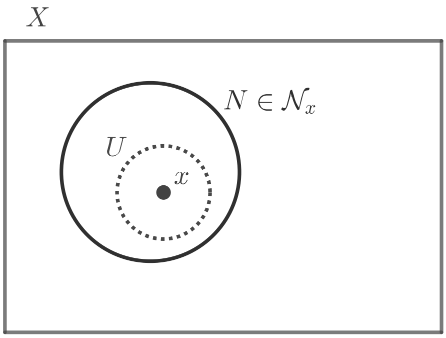

FIGURA I.14. Entorno $N \in \mathcal{N}_x$ de un punto $x \in X$.

Veamos algunos ejemplos en entornos en espacios topológicos.

EJEMPLO I.41

Sea (X, τ_I) un espacio indiscreto y sea un punto $x \in X$. Como los únicos abiertos de X son el vacío y el total se tiene que el único entorno de x es el total X.

EJEMPLO I.42

Sea (X, τ_D) un espacio discreto y sea un punto $x \in X$. Entonces cualquier conjunto $N \subset X$ con $x \in N$ es un entorno abierto de x.

EJEMPLO I.43

Consideremos el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales con la topología usual. Entonces $[-1, 1]$ es un entorno del punto 0 ya que $(-1, 1)$ es un abierto tal que $0 \in (-1, 1) \subset [-1, 1]$. Sin embargo $[-1, 1]$ no es un entorno de 1 porque no existe ningún abierto U tal que $1 \in U \subset [-1, 1]$.

EJEMPLO I.44

Sea $\mathbb{R}_S$ la recta de Sorgenfrey. Entonces, el conjunto $[x, x + 1)$ es un entorno abierto del punto x.

A continuación vamos a caracterizar los tipos de puntos de un espacio topológico respecto de un cierto subconjunto, dependiendo de función que realizan en la topología.

Definición I.45

Sea $A \subset X$ un subconjunto de X y sea un punto $x \in X$:

(a) x es un *punto interior* de A si existe $N \in \mathcal{N}_x$ tal que
$$N \subset A.$$
Llamaremos *interior* de A y denotaremos por $\mathring{A}$ al conjunto de los puntos interiores de A.

(b) x es un *punto adherente* de A si, para todo $N \in \mathcal{N}_x$,
$$N \cap A \neq \emptyset.$$
Llamaremos *adherencia* de A y denotaremos por $\overline{A}$ al conjunto de puntos adherentes de A.

(c) x es un *punto de acumulación* de A si, para todo $N \in \mathcal{N}_x$,
$$(N \backslash \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$
Llamaremos *acumulación* de A y denotaremos por A' al conjunto de puntos de acumulación de A.

(d) x es un *punto aislado* de A si existe $N \cap \mathcal{N}_x$ tal que
$$N \cap A = \{x\}.$$
Denotaremos por $\text{ais}(A)$ al conjunto de puntos aislados de A.

(e) x es un *punto frontera* de A si para todo $N \in \mathcal{N}_x$ se tiene que
$$N \cap A \neq \emptyset \text{ y } N \cap (X \backslash A) \neq \emptyset.$$
Llamaremos *frontera* de A y denotaremos por $\text{Fr}(A)$ al conjunto de puntos frontera de A.

Observación I.46

En la Definición I.45 es suficiente comprobar las condiciones para los entornos abiertos.

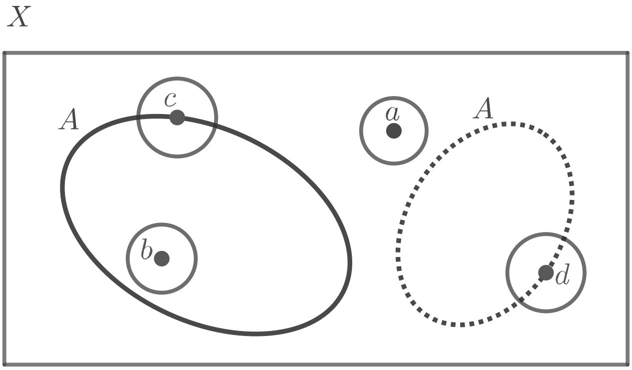

FIGURA I.15. En la figura se muestra un subconjunto A formado por la unión de tres subconjuntos, uno cerrado, otro abierto y el punto $\{a\}$. El punto $b \in A$ es interior, ya que podemos encontrar un entorno que lo contenga y esté contenido en A. Los puntos c y d son adherentes y de acumulación porque cualquier entorno que los contenga contiene también puntos de A, incluso excluyendo los propios c y d. No ocurre así con el punto a, que es aislado, ya que podemos encontrar un entorno suyo que corte a A únicamente en el punto a. Los puntos c y d también son frontera porque sus entornos cortan tanto a A como a su complementario. Véase que $c \in A$ mientras que $d \notin A$.

Vamos a especificar los conjuntos definidos anteriormente para diferentes subconjuntos de $\mathbb{R}$ dotado de la topología usual.

EJEMPLO I.47

Sea $A = (0, 1]$. Entonces,

- $\mathring{A} = (0, 1)$. Para cualquier $x \in (0, 1)$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (0, 1)$. Y cualquier otro punto de la recta (incluido el 1) no verifica esta condición.
- $\overline{A} = [0, 1]$. Dado cualquier $x \in [0, 1]$ y un abierto (a, b) tal que $x \in (a, b)$, siempre se tiene que $(a, b) \cap (0, 1] \neq \emptyset$. Por el contrario, si $x \notin [0, 1]$ siempre podemos encontrar un abierto (a, b) tal que $x \in (a, b)$ y $(a, b) \cap [0, 1] = \emptyset$.
- $A' = [0, 1]$. Dado cualquier $x \in [0, 1]$ y un abierto (a, b) tal que $x \in (a, b)$, siempre se tiene que $((a, b) \setminus \{x\}) \cap (0, 1] \neq \emptyset$. Por el contrario, si $x \notin [0, 1]$ siempre podemos encontrar un abierto (a, b) tal que $x \in (a, b)$ y $((a, b) \setminus \{x\}) \cap [0, 1] = \emptyset$.

- $\operatorname{ais}(A) = \varnothing$. No existe ningún punto $x \in \mathbb{R}$ tal que un abierto (a, b) que lo contenga, $x \in (a, b)$ interseque a $(0, 1]$ únicamente en el punto x.
- $\operatorname{Fr}(A) = \{0, 1\}$. Los únicos puntos x tales que cualquier abierto (a, b) con $x \in (a, b)$ verifican que intersecan tanto a $(0, 1]$ como a su complementario $\mathbb{R}\backslash(0, 1]$ son el 0 y el 1.

EJEMPLO I.48

Sea $B = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Entonces,

- $\mathring{B} = \varnothing$. Para ningún punto $\frac{1}{n} \in B$ podemos meter un intervalo de la forma (a, b) que contenga a $\frac{1}{n}$ y esté contenido en B.
- $\overline{B} = B \cup \{0\}$. Para cada punto $\frac{1}{n} \in B$ y cada intervalo de la forma (a, b) que contiene a $\frac{1}{n}$, se verifica que (a, b) contiene puntos de B (al menos el punto $\frac{1}{n}$). De igual modo, cualquier intervalo (a, b) que contiene al punto 0 contiene también puntos de la forma $\frac{1}{n} \in B$.
- $B' = \{0\}$. Para los puntos de la forma $\frac{1}{n}$ podemos encontrar el entorno $\frac{1}{n} \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right)$ tal que su intersección con B es $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right) \cap B = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, luego no son de acumulación. Sin embargo, cualquier intervalo (a, b) que contiene al punto 0 contiene también puntos de la forma $\frac{1}{n} \in B$, luego 0 sí es de acumulación.
- $\operatorname{ais}(B) = B$. Para cada punto $\frac{1}{n} \in B$ existe un intervalo que contiene a $\frac{1}{n}$, por ejemplo $\frac{1}{n} \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right)$, tal que su intersección con B es $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right) \cap B = \left\{\frac{1}{n}\right\}$.
- $\operatorname{Fr}(B) = B \cup \{0\}$. Para cada punto $\frac{1}{n} \in B$ y cada intervalo de la forma (a, b) que contiene a $\frac{1}{n}$, se verifica que (a, b) contiene puntos de B (al menos el punto $\frac{1}{n}$) y puntos del complementario de B. Esta condición también la satisface el punto 0 ya que cualquier $0 \in (a, b)$ contiene puntos de la forma $\frac{1}{n} \in B$.

EJEMPLO I.49

Sea $C = \{0\} \cup (1, 2)$. Repitiendo el análisis de los ejemplos anteriores tenemos que los puntos del intervalo $(1, 2)$ son los únicos interiores, ya que podemos meter un intervalo abierto entre ellos y C. Los puntos 1 y 2 son adherentes y de acumulación ya que cualquier entorno abierto de ellos corta a C en puntos diferentes a ellos; también son puntos frontera, como 0, porque los entornos que los contienen cortan tanto a C como a su complementario. El 0 no es un punto de acumulación sino que es un punto aislado, ya que hay entornos abiertos de 0 que cortan a C en un único punto, el propio 0. Resumiendo:

- $\mathring{C} = (1,2)$.
- $\overline{C} = \{0\} \cup [1,2]$.
- $C' = [1,2]$.
- $\operatorname{ais}(C) = \{0\}$.
- $\operatorname{Fr}(C) = \{0,1,2\}$.

Ejemplo I.50

Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales. Como los racionales son densos en el conjunto de los reales, cualquier intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$ contiene infinitos racionales e infinitos irracionales. Por lo tanto no puede haber ni puntos interiores ni aislados, mientras que todos los puntos de la recta real son adherentes, de acumulación y frontera:

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}' = \operatorname{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R},$$

$$\mathring{\mathbb{Q}} = \operatorname{ais}(\mathbb{Q}) = \varnothing.$$

Usando un razonamiento análogo para el conjunto $\mathbb{I}$ de los números irracionales se tiene que:

$$\bar{\mathbb{I}} = \mathbb{I}' = \operatorname{Fr}(\mathbb{I}) = \mathbb{R},$$

$$\mathring{\mathbb{I}} = \operatorname{ais}(\mathbb{I}) = \varnothing.$$

Ejemplo I.51

Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Dado un entero $z \in \mathbb{Z}$, existe un intervalo, por ejemplo $z \in (z-1, z+1)$, que corta a $\mathbb{Z}$ en únicamente el punto z. Esto hace que los puntos de $\mathbb{Z}$ sean aislados, frontera, y los únicos adherentes, ya que para cualquier punto $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, se tiene que $x \in (\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1) \subset \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, luego tampoco hay puntos interiores ni de acumulación. En resumen:

$$\overline{\mathbb{Z}} = \operatorname{ais}(\mathbb{Z}) = \operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z},$$

$$\mathring{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}' = \varnothing.$$

La siguiente proposición contiene varias propiedades importantes que relacionan los tipos de puntos en un espacio topológico.

PROPOSICIÓN I.52. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto. Entonces:*

(1) $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$.
(2) $\mathring{A}$ *es el mayor abierto contenido en A, es decir, si $U \subset A$ es abierto, entonces $U \subset \mathring{A}$.*
(3) $\overline{A}$ *es el menor cerrado que contiene a A, es decir, si $A \subset C$ con C cerrado, entonces $\overline{A} \subset C$.*
(4) $\overline{A} = \mathring{A} \sqcup \mathrm{Fr}(A)$.
(5) $\overline{A} = A' \sqcup \mathrm{ais}(A)$.
(6) $\overline{A} = A \cup A'$.
(7) *A es cerrado si y solo si $A' \subset A$.*

DEMOSTRACIÓN.

(1) Si $x \in \mathring{A}$ existe un entorno $N \in \mathcal{N}_x$ tal que $N \subset A$ y, como consecuencia $x \in A$. Por otro lado, dado $x \in A$, se tiene que para cualquier entorno $N' \in \mathcal{N}_x$, $x \in N' \cap A$ y, por tanto, $x \in \overline{A}$.
(2) Veamos que $\mathring{A}$ es abierto en X. Sea $x \in \mathring{A}$, entonces existe $N_x \in \mathcal{N}_x$ entorno abierto de x tal que $N_x \subset A$. Es claro que $N_x \subset \mathring{A}$ ya que, por ser abierto, N_x es un entorno de todos sus puntos. Como consecuencia
$$\mathring{A} = \bigcup_{x \in \mathring{A}} N_x$$
es una unión de abiertos y, por tanto, abierto.

Por otro lado, si $U \subset A$ es otro conjunto abierto, entonces U es entorno de todos sus puntos, por tanto todos sus puntos son interiores y se tiene que $U \subset \mathring{A}$.
(3) $\overline{A}$ es cerrado ya que
$$X \backslash \overline{A} = \{x \in X \mid \text{ existe } N \in \mathcal{N}_x \text{ tal que } N \cap A = \varnothing\}$$
$$= \{x \in X \mid \text{ existe } N \in \mathcal{N}_x \text{ tal que } N \subset X \backslash A\} = (X \mathring{\backslash} A)$$
que, como hemos visto en (2), es abierto.

Por otro lado, supongamos que C es cerrado y $A \subset C$. Razonando por reducción al absurdo supongamos que existe $x \in \overline{A}$ tal que $x \notin C$. Como C es cerrado y $x \in X \backslash C$ se tiene que $(X \backslash C) \in \mathcal{N}_x$ y, por tanto,
$$\varnothing \neq (X \backslash C) \cap A \subset (X \backslash C) \cap C$$
que es una contradicción.

(4) Veamos que $\overline{A} = \mathring{A} \sqcup \operatorname{Fr}(A)$.

"$\subset$" Sea $x \in \overline{A}$, entonces para cualquier $N \in \mathcal{N}_x$, se tiene que $N \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto tenemos dos opciones mutuamente excluyentes: bien existe un $N \in \mathcal{N}_x$ tal que $N \subset A$ o bien para cualquier $N \in \mathcal{N}_x$ se tiene que $N \cap (X \backslash A) \neq \emptyset$. En el primer caso se tiene que $x \in \mathring{A}$ mientras que en el segundo se tiene que $x \in \operatorname{Fr}(A)$.

"$\supset$" se sigue de manera inmediata por la propiedad (1) y por la definición de $\operatorname{Fr}(A)$.

(5) Veamos que $\overline{A} = A' \sqcup \operatorname{ais}(A)$.

"$\subset$" Sea $x \in \overline{A}$, entonces para cualquier $N \in \mathcal{N}_x$ se tiene que $N \cap A \neq \emptyset$. Entonces tenemos dos posibilidades mutuamente excluyentes: bien $(N \backslash \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ en cuyo caso $x \in A'$, o bien $(N \backslash \{x\}) \cap A = \emptyset$ en cuyo caso $x \in \operatorname{ais}(A)$.

"$\supset$" Este contenido se sigue directamente de las definiciones.

(6) Tenemos que ver que $\overline{A} = A \cup A'$. Como $A = \operatorname{ais}(A) \cup (A \backslash \operatorname{ais}(A))$ y $(A \backslash \operatorname{ais}(A)) \subset A'$ se sigue que

$$A \cup A' = \operatorname{ais}(A) \cup A' = \overline{A}.$$

(7) Para ver que A es cerrado si y solo si $A' \subset A$, basta observar que como $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A, A será cerrado si y solo si $A = \overline{A} = A \cup A'$.

$\square$

Observación I.53

Gracias a la Proposición I.52 podemos caracterizar los abiertos y cerrados en términos de su interior y su adherencia:

- De (2) se sigue que
$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ abierto}}} U$$
y que A es abierto si y solo si $A = \mathring{A}$.
- De (3) se sigue que
$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subset C \\ C \text{ cerrado}}} C$$
y que $\overline{A}$ es cerrado si y solo si $A = \overline{A}$.

Ejemplo I.54

Sea (X, τ) un espacio topológico. Aplicando los resultados anteriores podemos caracterizar los puntos relativos a los subespacios vacío y total.

- Si $A = \varnothing$ entonces se desprende de las definiciones que
$$\mathring{A} = \overline{A} = A' = \text{ais}(A) = \text{Fr}(A) = \varnothing.$$
- Si $A = X$ entonces
$$\mathring{A} = \overline{A} = X$$
Los únicos puntos aislados serán los que posean un entorno abierto que contenga únicamente a ellos, luego
$$\text{ais}(A) = \{x \in X \mid \{x\} \in \tau\}$$
Como $A = X$ su complementario es vacío, luego $\text{Fr}(A) = \varnothing$. Y usando que $\overline{A} = A' \cup \text{ais}(A)$, tenemos que $A' = X \backslash \text{ais}(A)$.

Ejemplo I.55

Sea (X, τ_I) un espacio indiscreto y $A \subset X$ un subconjunto propio no vacío de X. Como los únicos abiertos de la topología son el vacío y el total, se tiene que:
$$\mathring{A} = \varnothing, \quad \overline{A} = X, \quad \text{Fr}(A) = X,$$
Supongamos que A contiene más de un elemento, entonces
$$A' = X, \quad \text{ais}(A) = \varnothing.$$
ya que todo punto $x \in X$ posee el entorno X que corta a A en algún punto diferente a x. Sin embargo, si $A = \{a\}$, entonces
$$A' = X \backslash \{a\}, \quad \text{ais}(A) = \{a\}.$$

Ejemplo I.56

Sea (X, τ_D) un espacio discreto y $A \neq \varnothing$. Como cualquier subconjunto es abierto y cerrado se tiene que $\mathring{A} = \overline{A} = A$. Cualquier unipuntual $\{x\}$ es un entorno abierto de x, luego todos los puntos son aislados $\text{ais}(A) = A$ y no hay puntos de acumulación ni frontera, $A' = \text{Fr}(A) = \varnothing$.

5. Axiomas de separación

En esta sección se introducen los tres primeros axiomas de separación. Estas propiedades permiten clasificar el grado de separación de los puntos a través de entornos abiertos en un espacio topológico. Si pensamos en los entornos como si midiesen el grado de precisión con el que podemos observar un punto, los axiomas de separación nos permiten medir hasta qué punto podemos distinguir unos puntos de otros.

Definición I.57

Sea X un espacio topológico. Diremos que X es:

- T_0 o *Kolmogoroff* si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existe un abierto U tal que
$$x \in U,\ y \notin U \quad \text{o} \quad y \in U,\ x \notin U.$$
- T_1 o *Fréchet* si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen abiertos U y V tales que
$$x \in U,\ y \notin U \quad \text{e} \quad y \in V,\ x \notin V.$$
- T_2 o *Hausdorff* si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen abiertos U y V tales que
$$x \in U,\ y \in V \quad \text{y} \quad U \cap V = \varnothing.$$

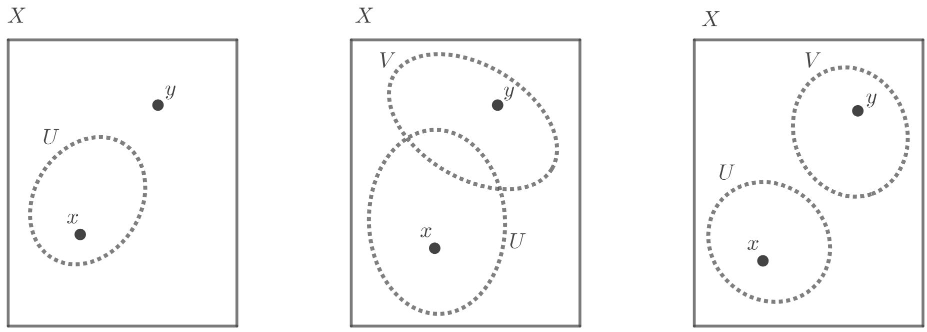

Figura I.16. Condiciones de los axiomas de separación, de izquierda a derecha, T_0, T_1 y T_2.

Observación I.58

Se sigue de la definición que el axioma T_2 es más fuerte que T_1, que es más fuerte que T_0:
$$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0.$$
En los ejemplos a continuación veremos que ninguna de estas implicaciones es una equivalencia, es decir, existen ejemplos de espacios topológicos T_0 que no son T_1, y de espacios topológicos que son T_1 y no son T_2.

A continuación vamos a estudiar el grado de separación de algunos de los espacios topológicos que ya conocemos.

Ejemplo I.59

$\mathbb{R}^n$ dotado de la topología usual es T_2. En efecto, sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ dos puntos distintos. Como se observa en la Figura I.17, si escogemos el radio $r = d(x, y)/3$, y las bolas abiertas $U = B(x, r)$ y $V = B(y, r)$, se tiene

$$x \in U,\ y \in V \quad \text{y} \quad U \cap V = \varnothing.$$

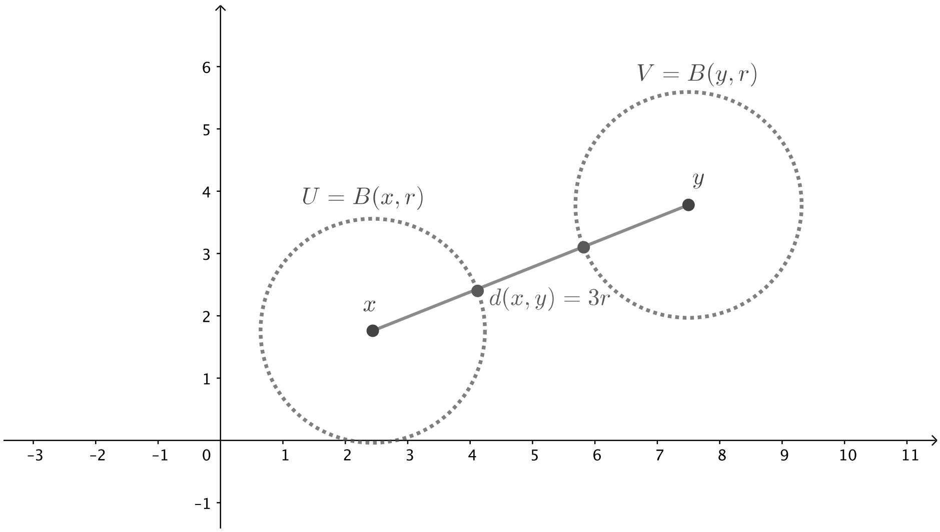

Figura I.17. Ejemplo I.59. El plano euclídeo es un espacio topológico T_2.

Ejemplo I.60

Un espacio discreto (X, τ_D) es T_2 ya que, si x e y son dos puntos distintos de X se tiene que $U = \{x\}$ y $V = \{y\}$ son dos abiertos tales $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \varnothing$. En particular, (X, τ_D) es T_1 y T_0.

Ejemplo I.61

Un espacio indiscreto (X, τ_I) con más de un elemento no es T_0 ya que, si x e y son dos puntos distintos, como el único abierto no vacío es el total se tiene que todos los abiertos que contienen a x contienen también a y y viceversa. Por tanto, (X, τ_I) no es ni T_1 ni T_2.

EJEMPLO I.62

La recta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ es T_2. En efecto, dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, si escogemos los abiertos $U = [x, y)$ y $V = [y, z)$ se tiene que

$$x \in U,\ y \in V \quad \text{y} \quad U \cap V = \varnothing.$$

En particular, $\mathbb{R}_S$ es T_1 y T_0.

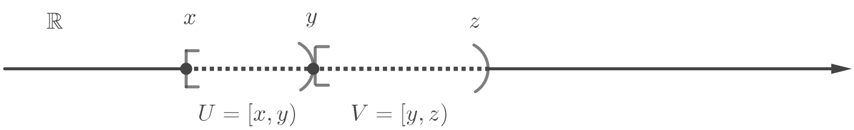

FIGURA I.18. La recta de Sorgenfrey es un espacio topológico T_2.

EJEMPLO I.63

El espacio de Sierpinski $\mathcal{S} = (\{0, 1\}, \tau_S)$ es T_0 pero no T_1. En efecto, dados $0, 1 \in X$, el abierto $U = \{0\}$ satisface que $0 \in U$ y $1 \notin U$. Sin embargo, no existe ningún abierto en X que contenga al 1 y no contenga al 0. Por tanto $\mathcal{S}$ tampoco es T_2.

EJEMPLO I.64

Un conjunto infinito X dotado con la topología cofinita τ_{CF} es T_1 pero no es T_2. En efecto, para cada dos puntos distintos $x, y \in X$ podemos tomar los abiertos $U = X\backslash\{y\}$ y $V = X\backslash\{x\}$ que verifican

$$x \in U, \quad y \notin U$$

$$y \in V, \quad x \notin V$$

Por tanto, X es T_1 (y también T_0).

Sin embargo, dados dos abiertos U' y V' cualesquiera de τ_{CF} con $x \in U'$ e $y \in V'$, se tiene que $X\backslash U'$ y $X\backslash V'$ son finitos. Como consecuencia

$$(X\backslash U') \cup (X\backslash V') = X\backslash(U' \cap V')$$

es finito y, entonces, $U' \cap V' \neq \varnothing$ ya que en otro caso $X\backslash(U' \cap V') = X$, que es infinito por hipótesis. Se sigue que X no es T_2 ya que no podemos encontrar dos abiertos disjuntos en esta topología.

EJEMPLO I.65

La recta de Kolmogoroff $\mathbb{R}_K$ es T_0 pero no T_1. En efecto, sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $y < x$. Si escogemos $U = (y, +\infty)$ se tiene que $x \in U$ e $y \notin U$ lo que garantiza que $\mathbb{R}_K$ es T_0. Sin embargo, $\mathbb{R}_K$ no es T_1 (y tampoco T_2) ya que todo abierto V con $y \in V$ debe contener también a x.

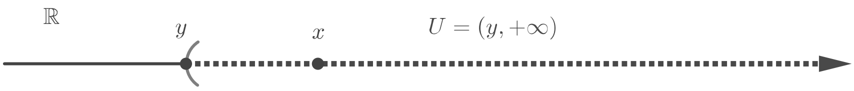

FIGURA I.19. La recta de Kolmogoroff es un espacio topológico T_0 pero no T_1.

Los espacios topológicos de Fréchet se pueden caracterizar por medio de que sus conjuntos unipuntuales sean cerrados.

PROPOSICIÓN I.66. *Un espacio topológico X es T_1 si y solo si los conjuntos unipuntuales de X son cerrados.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que X es T_1 y veamos que, dado $x \in X$, el subconjunto $X\backslash\{x\}$ es abierto. Como X es T_1, para cada punto $y \in X\backslash\{x\}$ y el propio x, y sabemos que existe un abierto U tal que $y \in U$ y $x \notin U$, por tanto $y \in U \subset X\backslash\{x\}$. Entonces, como para cada $y \in X\backslash\{x\}$ hemos encontrado un abierto tal que $y \in U \subset X\backslash\{x\}$, se tiene que $X\backslash\{x\}$ es abierto y, como consecuencia, $\{x\}$ es cerrado.

Supongamos que los conjuntos unipuntuales de X son cerrados. Sean x e y dos elementos distintos de X. Dado que $\{x\}$ e $\{y\}$ son cerrados se tiene que $U = X\backslash\{y\}$ y $V = X\backslash\{x\}$ son dos abiertos tales que

$$x \in U, y \notin U$$
$$y \in V, x \notin V$$

y, por tanto, X es T_1. $\square$

COROLARIO I.67. *Todo espacio finito T_1 es discreto.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que X está formado por n elementos $x_1, \ldots, x_n$. Como X es T_1 cada conjunto unipuntual $\{x_i\}$ es cerrado. Para ver que también es abierto basta observar que

$$X \backslash \{x_i\} = \bigcup_{j \neq i} \{x_j\}$$

es una unión finita de conjuntos cerrados y, por tanto, cerrado. □

A continuación introducimos la noción de convergencia de una sucesión de elementos de un espacio topológico y veremos que guarda una estrecha relación con los axiomas de separación.

DEFINICIÓN I.68

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de un espacio topológico X. Diremos que (x_n) *converge* a $x \in X$ si para cada entorno $N \in \mathcal{N}_x$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geqslant n_0$, entonces $x_n \in N$.

EJEMPLO I.69

Sea (X, τ_I) un espacio indiscreto y (x_n) una sucesión de puntos de X. Entonces (x_n) converge a todos los puntos de X. En efecto, si $x \in X$, como el único entorno de x es el propio X y $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene el resultado.

EJEMPLO I.70

En el espacio de Sierpinski $\mathcal{S} = (\{0, 1\}, \tau_S)$ la sucesión constante $x_n = 1$ converge a 1 ya que el total $\{0, 1\}$ es el único entorno de 1, que contiene a toda la sucesión. Sin embargo, no converge a 0 ya que $\{0\}$ es un entorno de 0 que no contiene ningún término de la sucesión.

Por otro lado, la sucesión constante $y_n = 0$ converge tanto a 0 como a 1 puesto que cualquier entorno tanto de 0 como de 1 contiene a todos los términos de la sucesión.

Ejemplo I.71

En la recta de Kolmogoroff $\mathbb{R}_K$ la sucesión $x_n = \frac{1}{n}$ converge a todos los puntos de $(-\infty, 0]$. En efecto, sea $x \in (-\infty, 0]$ y N un entorno de x. Entonces, existe $a < x$ tal que $x \in (a, +\infty) \subset N$. Puesto que $\frac{1}{n} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\frac{1}{n} \in (a, +\infty) \subset N$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde se sigue que (x_n) converge a x.

Por otro lado la sucesión $y_n = n$ converge a todos los puntos de $\mathbb{R}_K$. En efecto, para cualquier $y \in \mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > y$ para todo $n \geqslant n_0$, por tanto, si N es un entorno de y, existe $b < y$ tal que $y \in (b, +\infty) \subset N$. En consecuencia, se tiene que $y_n = n \in N$ para todo $n \geqslant n_0$ y la sucesión (y_n) converge a y.

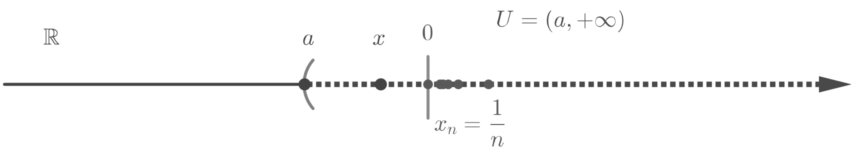

Figura I.20. En la recta de Kolmogoroff, la sucesión $x_n = \frac{1}{n}$ converge a todos los puntos de $(-\infty, 0]$.

Para finalizar la sección, veamos que en los espacios topológicos de Hausdorff las sucesiones convergentes tienen un único límite, de acuerdo con nuestra intuición de la topología usual en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$.

Teorema I.72. *Si X es un espacio T_2, entonces una sucesión converge, a lo sumo, a un único punto.*

Demostración. Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que existe una sucesión (x_n) de puntos de X que converge a dos puntos distintos x e y. Como X es T_2 existen U y V entornos abiertos de x e y respectivamente tales que $U \cap V = \emptyset$. Por otro lado, como (x_n) converge tanto a x como a y existen $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tales que $x_n \in U$ para todo $n \geqslant n_0$ y $x_n \in V$ para todo $n \geqslant n_1$. Por lo tanto, si escogemos $n \geqslant \max\{n_0, n_1\}$ se tiene que $x_n \in U \cap V$ lo que contradice que su intersección sea vacía (ver Figura I.21). $\square$

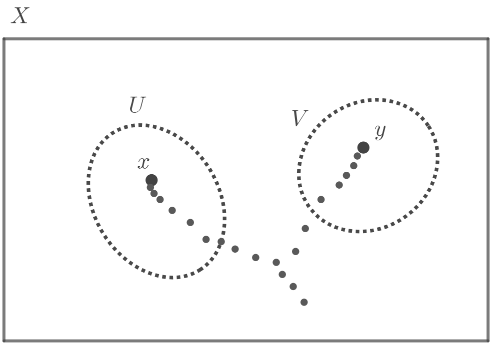

Figura I.21. En un espacio topológico T_2 el límite de una sucesión, si existe, es único, ya que en caso contrario los límites se pueden separar por abiertos.

6. Topología de subespacio

En esta sección estudiaremos la topología natural que induce un espacio topológico en sus subconjuntos.

Proposición I.73. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subset X$ un subconjunto. La familia*

$$\tau_Y = \{U \cap Y \mid U \in \tau\}$$

es una topología en Y.

Demostración. Veamos que la topología τ_Y verifica las tres propiedades de la Definición I.1.

- El conjunto total Y se puede expresar como $Y = X \cap Y$, y como X es abierto de τ entonces Y pertenece a τ_Y. Del mismo modo $\varnothing = \varnothing \cap Y$, por lo que el vacío pertenece a τ_Y.
- Dada una familia de subconjuntos de Y, $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, donde $V_\lambda \in \tau_Y$ para todo $\lambda \in \Lambda$, veamos que la unión $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ pertenece a τ_Y. En efecto, para cada V_λ existe un abierto U_λ de τ tal que $V_\lambda = U_\lambda \cap Y$. Entonces,

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (U_\lambda \cap Y) = \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) \cap Y$$

y, como $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ es un abierto de X por ser una unión de abiertos, se tiene que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ pertenece a τ_Y.

- Dados dos subconjuntos de Y, $V_1, V_2 \subset Y$, tales que $V_1, V_2 \in \tau_Y$, existen U_1, U_2 abiertos de X tales que $V_1 = U_1 \cap Y$, $V_2 = U_2 \cap Y$. Entonces,

$$V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) = (U_1 \cap U_2) \cap Y,$$

que pertenece a τ_Y porque $U_1 \cap U_2$ es abierto de X.

$\square$

Definición I.74

Sea (X, τ) un espacio topológico e $Y \subset X$ un subconjunto. Llamaremos *topología de subespacio* o *topología relativa* a la topología τ_Y definida en la Proposition I.73. Diremos que el espacio topológico (Y, τ_Y) es un subespacio topológico de (X, τ) y llamaremos a los elementos de τ_Y *abiertos relativos* en Y.

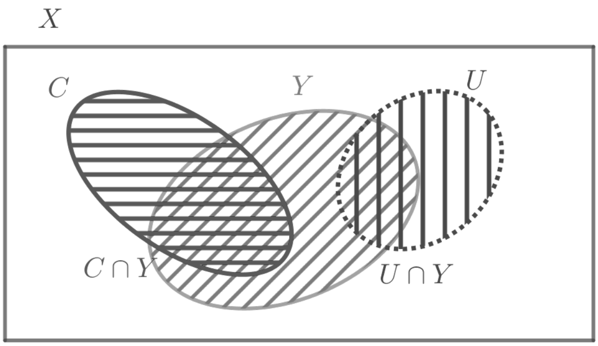

Figura I.22. Abierto relativo $U \cap Y$ y cerrado relativo $C \cap Y$ de un subespacio topológico $Y \subset X$.

Los cerrados de la topología relativa se pueden definen de forma análoga a los abiertos.

Proposición I.75. *Sea X un espacio topológico y sea $Y \subset X$ un subespacio. Un subconjunto $C \subset Y$ es cerrado en Y si y solo si existe un cerrado D en X tal que $C = D \cap Y$.*

Demostración. Supongamos que $C \subset Y$ es cerrado en Y. Entonces $Y \backslash C$ es abierto en Y y, por tanto, existe U abierto en X tal que $Y \backslash C = U \cap Y$. Si escogemos $D = X \backslash U$ se tiene que D es cerrado en X por ser complementario de un abierto, y

$$D \cap Y = (X \backslash U) \cap Y = Y \backslash (Y \cap U) = Y \backslash (Y \backslash C) = C.$$

Recíprocamente, supongamos que existe D cerrado en X tal que $D \cap Y = C$. Entonces

$$Y \backslash C = Y \backslash (D \cap Y) = (X \backslash D) \cap Y.$$

Como $X \backslash D$ es abierto en X se sigue que $Y \backslash C$ es abierto en Y y, como consecuencia, C es cerrado en Y. $\square$

Las bases de un espacio topológico determinan también, de manera natural, bases en los subespacios topológicos.

Proposición I.76. *Sea $\mathcal{B}$ una base de la topología de X. Entonces, la colección*

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

es una base de la topología relativa de Y.

Demostración. Sea V un abierto de Y y sea $x \in V \subset Y$. Entonces existe U abierto de X tal que $V = U \cap Y$. Como U es abierto en X y $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$ y, por consiguiente,

$$x \in B \cap Y \subset U \cap Y = V.$$

Como $B \cap Y \in \mathcal{B}_Y$ se sigue el resultado. $\square$

Ejemplo I.77

Consideremos en la recta real con la topología usual, $(\mathbb{R}, \tau_u)$, el subconjunto de los números enteros $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Entonces $\mathbb{Z}$, dotado de la topología relativa, es un espacio discreto. Veamos que los conjuntos unipuntuales en $\mathbb{Z}$ son abiertos en la topología relativa. En efecto, si $n \in \mathbb{Z}$ y escogemos $\varepsilon < 1$, se tiene que

$$\{n\} = (n - \varepsilon, n + \varepsilon) \cap \mathbb{Z},$$

y como $(n - \varepsilon, n + \varepsilon)$ es abierto en $\mathbb{R}$ se sigue que $\{n\}$ es abierto en $\mathbb{Z}$.

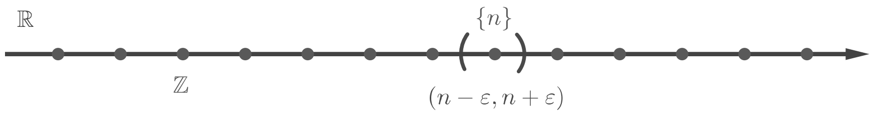

FIGURA I.23. Ejemplo I.77. Los puntos $\{n\} = (n-\varepsilon, n+\varepsilon) \cap \mathbb{Z} = \{n\}$ son abiertos, por lo que $\mathbb{Z}$ es un subespacio discreto.

EJEMPLO I.78

En la recta real con la topología usual, $(\mathbb{R}, \tau_u)$ consideremos el intervalo unidad $I = [0,1]$. La Proposición I.76 garantiza que una base de la topología relativa de I es

$$\mathcal{B}_I = \{(a,b) \cap I \mid a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b\}.$$

Los diferentes tipos de abiertos que aparecen en esta base son:

$$(a,b) \cap I = \begin{cases} \varnothing & \text{si } b \leqslant 0 \text{ o } 1 \leqslant a \\ I & \text{si } a < 0 \text{ y } b > 1 \\ (a,b) & \text{si } a, b \in I \\ [0,b) & \text{si } a < 0,\ b \in I \\ (a,1] & \text{si } a \in I,\ b > 1 \end{cases}$$

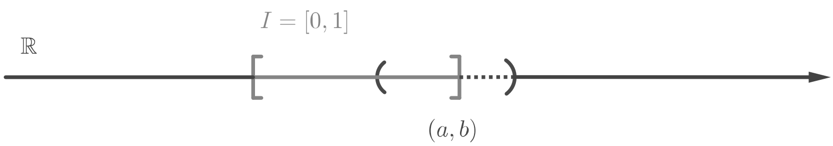

FIGURA I.24. Abiertos relativos del intervalo $[0,1] \subset \mathbb{R}$ con la topología usual.

EJEMPLO I.79

En la recta de Kolmogoroff $\mathbb{R}_K$ la topología relativa del intervalo unidad $I = [0,1]$ es

$$\tau_I = \{(a, +\infty) \cap I \mid a \in \mathbb{R}\}$$

donde

$$(a, +\infty) \cap I = \begin{cases} \varnothing & \text{si } a \geqslant 1 \\ I & \text{si } a < 0 \\ (a, 1] & \text{si } a \in [0, 1) \end{cases}$$

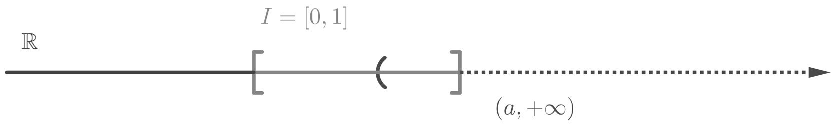

Figura I.25. Abiertos relativos del intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ con la topología de la recta de Kolmogoroff.

Ejemplo I.80

En la recta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ una base de la topología relativa del intervalo unidad $I = [0, 1]$ viene dada por

$$\mathcal{B}_{S,I} = \{[a, b) \cap I \mid a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b\}$$

donde

$$[a, b) \cap I = \begin{cases} \varnothing & \text{si } b \leqslant 0 \text{ o } a > 1 \\ [a, b) & \text{si } a, b \in I \\ [0, b) & \text{si } a < 0,\ b \in I \\ [a, 1] & \text{si } a \in I,\ b > 1 \end{cases}$$

En particular, el punto $\{1\}$ es abierto relativo del intervalo unidad.

Ejemplo I.81

En $\mathbb{R}^2$ dotado de la topología usual consideremos el subconjunto

$$S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\},$$

es decir, la circunferencia de radio uno centrada en el origen. Una base para la topología relativa de S^1 está formada por los arcos de circunferencia abiertos que vienen dados como la intersección de bolas, abiertos básicos en $\mathbb{R}^2$ con S^1.

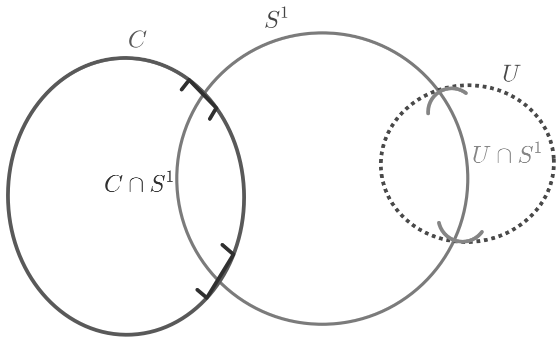

FIGURA I.26. Abiertos y cerrados relativos de S^1 con la topología de subespacio de $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$.

EJEMPLO I.82

En $\mathbb{R}^3$ dotado de la topología usual consideremos el subconjunto

$$S^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\},$$

es decir, la esfera de radio uno centrada en el origen. Una base para la topología relativa de S^2 está formada por los casquetes esféricos.

Dados un espacio topológico X y un subespacio $Y \subset X$ existen una serie de conjuntos especiales en la topología de subespacio. Dado un subconjunto $A \subset Y$ utilizaremos la notación $\mathring{A}_Y$, $\overline{A}_Y$ y $\mathrm{Fr}_Y(A)$ para referirnos al interior, la adherencia y la frontera de A con respecto a Y en la topología relativa τ_Y.

PROPOSICIÓN I.83. *Supongamos que $A \subset Y \subset X$. Entonces,*

(1) $\mathring{A} \subset \mathring{A}_Y$.
(2) $\overline{A} \cap Y = \overline{A}_Y$.
(3) $\mathrm{Fr}_Y(A) \subset \mathrm{Fr}(A)$.

DEMOSTRACIÓN.

(1) Si $x \in \mathring{A}$, existe un entorno abierto $N \in \mathcal{N}_x$ tal que $N \subset A$. Como N es abierto en X y $N \subset A \subset Y$ se tiene que N es abierto en Y y, como consecuencia, $x \in \mathring{A}_Y$.

(2) Basta ver que ver que $\overline{A} \cap Y$ es el menor cerrado de Y que contiene a A. En efecto, sea C cerrado en Y tal que $A \subset C$. Entonces, existe D cerrado en X tal que $C = D \cap Y$. Como $A \subset D$ y $D \subset \overline{D}$ se tiene que $\overline{A} \subset D$ y, por consiguiente, $\overline{A} \cap Y \subset C$.

(3) Supongamos que $x \in \mathrm{Fr}_Y(A)$ y sea N un entorno de x en X. Entonces $N \cap Y$ es un entorno de x en Y y, por tanto,

$$\varnothing \neq (N \cap Y) \cap A = Y \cap (N \cap A) \subset N \cap A$$
$$\varnothing \neq (N \cap Y) \cap (Y \backslash A) = Y \cap N \cap (Y \backslash A) \subset N \cap (X \backslash A)$$

de donde se sigue que $x \in \mathrm{Fr}(A)$.

□

EJEMPLO I.84

Sean $Y = [0,1]$ y $A = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ subespacios de la recta real. Entonces el interior de A es $\mathring{A} = \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Sin embargo, como subconjunto de Y, el interior es $\mathring{A}_Y = \left[0, \frac{1}{2}\right)$ ya que hay entornos relativos de 0 en Y del tipo $0 \in [0, \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon) \cap [0,1]$, que están contenidos en $A = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Por otra parte, A es un cerrado de la recta real por lo tanto su adherencia es $\overline{A} = A = [0,1]$. Y también es un cerrado relativo de Y, ya que es intersección de un cerrado de $\mathbb{R}$, por ejemplo $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$, con $Y = [0,1]$, por lo tanto $\overline{A}_Y = A = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Es claro que los puntos frontera de A son $\mathrm{Fr}(A) = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ Sin embargo, el 0 no es frontera relativa de A en Y. Esto sucede porque hay entornos relativos de 0 en Y, como $[0, \varepsilon)$, que solo contienen puntos de A, pero no contienen ningún punto de $Y \backslash A = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, por tanto $\mathrm{Fr}_Y(A) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

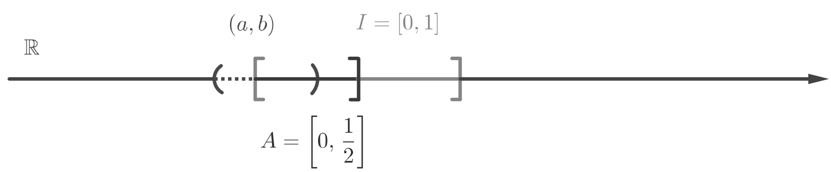

FIGURA I.27. Ejemplo I.84. Puntos del subconjunto $A = [0, \frac{1}{2}]$ relativos al subespacio $Y = [0,1] \subset \mathbb{R}$.

Para finalizar, veamos que los axiomas de separación son propiedades hereditarias, es decir, si un espacio topológico los satisface, cualquier subespacio también los satisface.

Definición I.85

Sea $\mathcal{P}$ una propiedad de relativa a un espacio topológico. Diremos que $\mathcal{P}$ es una *propiedad hereditaria* si dado un espacio topológico X que cumple la propiedad $\mathcal{P}$, se tiene que todos los subespacios de X cumplen la propiedad $\mathcal{P}$.

Proposición I.86. *Los axiomas de separación T_0, T_1 y T_2 son propiedades hereditarias.*

Demostración. Lo probaremos para T_2 siendo los otros dos casos análogos. Supongamos que X es T_2 y sea $Y \subset X$ un subespacio. Sean x e y dos puntos distintos de Y. Como $Y \subset X$ y X es T_2 existen U y V abiertos disjuntos en X tales que $x \in U$, $y \in V$. Entonces $U' = U \cap Y$ y $V' = V \cap Y$ son abiertos en Y con la topología relativa, son disjuntos, y satisfacen que $x \in U'$ e $y \in V'$. Por consiguiente Y es T_2. $\square$

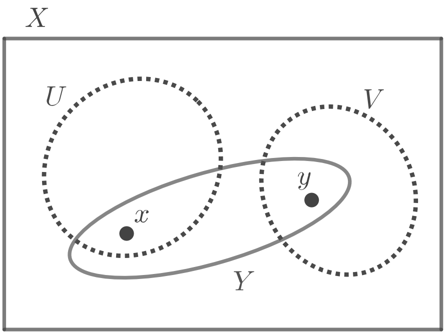

Figura I.28. La propiedad T_2 es hereditaria porque, dados dos puntos diferentes de un subespacio $Y \subset X$, podemos encontrar abiertos relativos disjuntos que los separen como intersección de abiertos que los separan en X con el subespacio Y.

7. Problemas

PROBLEMA I.1 Sea X un conjunto. Demostrar que la familia

$$\tau_{CN} = \{U \subset X \mid X \backslash U \text{ es finito o numerable}\}$$

es una topología en X.

PROBLEMA I.2 Encontrar todas las topologías en los conjuntos de 1, 2 y 3 elementos. ¿Existe alguna topología en el conjunto de tres elementos distinta de la discreta y de la indiscreta en la que los abiertos y los cerrados coincidan?

PROBLEMA I.3 Sea X un conjunto y sea $a \in X$. Estudiar si las siguientes familias son topologías en X.

(a) $\tau_a = \{U \subset X \mid a \in U\} \cup \{\varnothing\}$.
(b) $\tau'_a = \{U \subset X \mid a \notin U\} \cup \{X\}$.
(c) $\tau''_a = \tau'_a \cup \{U \subset X \mid a \in U,\ X \backslash U \text{ es finito}\}$.
(d) $\tau_\infty = \{U \subset X \mid X \backslash U \text{ es infinito}\} \cup \{\varnothing, X\}$.

PROBLEMA I.4 Sea $\tau = \{\mathbb{R}^2, \varnothing\} \cup \{G_k \mid k \in \mathbb{R}\}$ donde $G_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y + k\}$.

(a) Demostrar que τ es una topología en $\mathbb{R}^2$.
(b) Estudiar si τ es una topología en $\mathbb{R}^2$ si se sustituye $k \in \mathbb{R}$ por $k \in \mathbb{N}$.
(c) Estudiar si τ es una topología en $\mathbb{R}^2$ si se sustituye $k \in \mathbb{R}$ por $k \in \mathbb{Q}$.

PROBLEMA I.5 Sea X un conjunto finito preordenado, es decir, X está dotado de una relación reflexiva y transitiva. Dado $x \in X$ sea

$$U_x = \{y \in X \mid y \leqslant X\}$$

el conjunto de todos los elementos relacionados con x. Demostrar que la familia

$$\mathcal{B}_\leqslant = \{U_x \mid x \in X\}$$

es una base para una topología en X.

PROBLEMA I.6 Sea X un conjunto finito y τ una topología en X.

(a) Demostrar que la intersección arbitraria de conjuntos abiertos es un abierto.
(b) Dado $x \in X$, sea U_x el menor abierto que contiene a x, es decir, $U_x \subset U$ para todo abierto tal que $x \in U$. Demostrar que la relación

$$y \leqslant x \quad \text{si} \quad y \in U_x$$

es reflexiva y transitiva y, por tanto, un preorden en X.

PROBLEMA I.7 Sean τ_1 y τ_2 dos topologías en un conjunto X. Estudiar si la intersección $\tau_1 \cap \tau_2$ es una topología en X.

PROBLEMA I.8 Encontrar dos topologías τ_1 y τ_2 sobre un conjunto X tales que $\tau_1 \cup \tau_2$ no es una topología. Describir la topología menos fina que contiene a τ_1 y τ_2.

PROBLEMA I.9 (*) Sea X un conjunto infinito y τ una topología en X en la que todos los subconjuntos infinitos son abiertos. Demostrar que τ es la topología discreta.

PROBLEMA I.10 (*) Sea en $\mathbb{R}^2$ la familia τ de todos los subconjuntos U tales que para cada $(x, y) \in U$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times \{y\}) \cup (\{x\} \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon)) \subset U.$$

Estudiar si τ es una topología en $\mathbb{R}^2$ y en caso afirmativo compararla con la topología usual.

PROBLEMA I.11 (*) En $\mathbb{R}^2$ consideremos la topología τ definida en el ejercicio anterior. Si llamamos

$$C((x, y), \varepsilon) := ((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times \{y\}) \cup (\{x\} \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon)),$$

estudiar si el conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{C((x, y), \varepsilon) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0\right\}$$

es una base de τ.

PROBLEMA I.12 (*Plano de Moore*) Sea $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0)\}$. Demostrar que la familia

$$\mathcal{B} = \{B((x, y), r) \mid y > 0, r \leqslant y\} \cup \{\{(x, 0)\} \cup B((x, y), y) \mid y > 0\}$$

es base de una topología en Γ.

PROBLEMA I.13 (*Topología del orden*) Sea X un conjunto totalmente ordenado y supongamos que existen $a = \min X$ y $b = \max X$. Demostrar que la familia

$$\mathcal{B} = \{[a, x) \mid x \in X \backslash \{a\}\} \cup \{(x, y) \mid x < y\} \cup \{(x, b] \mid x \in X \backslash \{b\}\}$$

es base de una topología en X.

Problema I.14 Sea $K = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ y sea $\mathcal{B}_u$ una base de la topología usual en $\mathbb{R}$. Demostrar que la familia

$$\mathcal{B}_K = \mathcal{B}_u \cup \{B \backslash K \mid B \in \mathcal{B}_u\}$$

es base de una de topología en $\mathbb{R}$.

Problema I.15 Demostrar que la familia $\mathcal{B} = \{(p, q) \mid p, q \in \mathbb{Q}, p < q\}$ es una base de la topología usual de $\mathbb{R}$.

Problema I.16 Demostrar que la familia $\mathcal{B} = \{[p, q) \mid p, q \in \mathbb{Q}, p < q\}$ es base de una topología en $\mathbb{R}$ distinta de la topología de Sorgenfrey τ_S. Comparar la topología $\tau_{\mathcal{B}}$ asociada a la base $\mathcal{B}$ con τ_S.

Problema I.17 Considerar las siguientes familias de subconjuntos de $[0, 1]$:

$$\mathcal{B}_1 = \{(a, b) \mid 0 < a < b < 1\} \cup \{[0, 1]\} \qquad \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 \cup \{\{0\}, \{1\}\}$$
$$\mathcal{B}_3 = \{(a, b) \mid 0 \leqslant a < b \leqslant 1\} \cup \{[0, 1]\} \qquad \mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_3 \cup \{\{0\}, \{1\}\}$$

(a) Demostrar que son bases de una topología en $[0, 1]$.
(b) Comparar las topologías generadas por estas bases.

Problema I.18 Sea X un espacio topológico y sean $A, B \subset X$ subconjuntos. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $\overline{A} = X \backslash (\overset{\circ}{\overline{X \backslash A}})$.
(b) $\overset{\circ}{A} = X \backslash (\overline{X \backslash A})$.
(c) $\overset{\circ\circ}{A} = \overset{\circ}{A}$.
(d) $\overset{\circ}{\overline{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
(e) $\overset{\circ}{\overline{A \cup B}} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$, y la igualdad no se da en general.
(f) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.
(g) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, y la igualdad no se da en general.
(h) Si $X = A \cup B$ entonces $X = \overset{\circ}{A} \cup \overline{B}$.
(i) Si $A \cap B = \varnothing$ entonces $\overset{\circ}{A} \cap \overline{B} = \varnothing$.
(j) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$, y la igualdad no se da en general.

Problema I.19 Sea X un espacio topológico y sean A, B subconjuntos de X. Razonar la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados:

(a) $A = \overline{(\overset{\circ}{A})}$.
(b) Si $\mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Fr}(B) = \varnothing$ entonces $(\overset{\circ}{A \cup B}) = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.
(c) A es abierto y cerrado en X si y solo si $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

Problema I.20 Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto. Demostrar que, si A es abierto, entonces $\mathrm{Fr}(A)$ tiene interior vacío. ¿Es cierto si A es cerrado? Poner un contraejemplo en el caso de un subconjunto A arbitrario.

Problema I.21 Calcular el interior, la adherencia, la frontera y los subconjuntos de puntos aislados y de acumulación del siguiente subconjunto de $\mathbb{R}$ con la topología usual:

$$A = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \right\}$$

Problema I.22 Calcular el interior, la adherencia, la frontera y los subconjuntos de puntos aislados y de acumulación de los siguientes subconjuntos de la recta de Kolmogoroff $\mathbb{R}_K$.

(a) $\mathbb{Z}$
(b) $(-3, 3]$
(c) $[5, +\infty)$
(d) $(-\infty, 5)$
(e) $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$
(f) $\{5\}$

Problema I.23 Calcular el interior, la adherencia, la frontera y los subconjuntos de puntos aislados y de acumulación de los siguientes subconjuntos de la recta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$.

(a) $\mathbb{Q}$
(b) $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$
(c) $\left\{ -\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$
(d) $\mathbb{Z}$
(e) $(0, 1)$

Problema I.24 Calcular el interior, la adherencia, la frontera y los subconjuntos de puntos aislados y de acumulación del subconjunto

$$A = \left(-4, -\sqrt{2}\right) \cup \{0\} \cup \left[\sqrt{2}, 3\right) \cup \left\{ \frac{3n + 10}{n + 3} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

en la recta real, la recta de Kolmogoroff y la recta de Sorgenfrey.

Problema I.25 Dar un ejemplo de subespacio discreto de $\mathbb{R}$ con la topología usual que no sea cerrado.

Problema I.26 Calcular el interior, la adherencia, la frontera y los subconjuntos de puntos aislados y de acumulación de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual.

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leqslant 2\}$.
(b) $B = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \neq 0)\} \cup \{(0, 0)\}$.
(c) $C = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$.
(d) $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \neq 0\}$.
(e) $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2n} < x^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{2n-1}\}$.

Problema I.27 Calcular la frontera e interior de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual.

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$.
(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y \neq 0\}$.
(c) $C = A \cup B$.
(d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}\}$.
(e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 - y^2 \leqslant 1\}$.
(f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \leqslant \frac{1}{x}\}$.

Problema I.28 Sea X un conjunto finito preordenado y $A \subset X$ un subconjunto. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $x \in \mathring{A}$ si y solo si para todo $y \leqslant x$, $y \in A$.
(b) $x \in \overline{A}$ si y solo si existe $y \in A$ tal que $y \leqslant x$.
(c) $x \in A'$ si y solo si existe $y \in A \backslash \{x\}$ tal que $y \leqslant x$.
(d) $x \in \operatorname{Fr}(A)$ si y solo si existen $y \in A$ y $z \notin A$ tales que $y \leqslant x$ y $z \leqslant x$.

Problema I.29 (*) Sea X un espacio topológico T_1, sea un subconjunto $A \subset X$ y un punto $x \in X$. Demostrar que $x \in A'$ si y solo si todo entorno de x contiene infinitos puntos de A. ¿Es cierto esto si X no es T_1?

Problema I.30 Sea X un espacio topológico T_1. Demostrar que el conjunto de puntos de acumulación de cualquier subconjunto de X es cerrado. ¿Es cierto esto para un espacio topológico arbitrario?

Problema I.31 Sea X un espacio totalmente ordenado dotado de la topología del orden (Problema I.13). Demostrar que X es T_2.

Problema I.32 Estudiar la convergencia de la sucesión $x_n = \frac{1}{n}$ en $\mathbb{R}$ dotado de la topología cofinita.

PROBLEMA I.33 Demostrar que todo subespacio de un espacio T_i es T_i con $i = 0, 1, 2$. Es decir, los axiomas de separación son propiedades hereditarias.

PROBLEMA I.34 Sea X un espacio topológico, $Y \subset X$ un subespacio y $A \subset Y$ un subconjunto. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) Si A es abierto en Y e Y es abierto en X, entonces A es abierto en X.
(b) Si A es cerrado en Y e Y es cerrado en X, entonces A es cerrado en X.

PROBLEMA I.35 Sea $Y = (0, 5]$. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de Y son abiertos y/o cerrados considerando en Y las topologías relativas de Y como subconjunto de la recta real y de la recta de Sorgenfrey:

(a) $(0, 1)$
(b) $(0, 1]$
(c) $\{1\}$
(d) $(0, 5]$
(e) $(1, 2)$
(f) $[1, 2)$
(g) $(1, 2]$
(h) $(4, 5]$
(i) $[4, 5]$

PROBLEMA I.36 Sea $Y = (0, 4] \cup \{5\}$. Estudiar cuáles de los siguientes subconjuntos de Y son abiertos y/o cerrados en Y con la topología usual:

(a) $(0, 1)$
(b) $(0, 1]$
(c) $\{1\}$
(d) $(0, 4]$
(e) $[1, 4))$
(f) $(1, , 4]$
(g) $[1, 4]$
(h) $\{4\}$
(i) $\{4, 5\}$

PROBLEMA I.37 Sean los conjuntos

$$A = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid 0 < x < 1 \right\} \quad \text{y} \quad B = \{0\} \times [0, 1].$$

Estudiar el carácter abierto o cerrado de los conjuntos A y B con respecto a $X = A \cup B$.