Capítulo 5

Formas canónicas de endomorfismos

La matriz canónica de un endomorfismo es una matriz que, por su simplicidad, se elige como representante de la clase de equivalencia lineal a la que pertenece dicho endomorfismo. De modo que, dos endomorfismos son linealmente equivalentes si y sólo si existen bases respecto de las cuales tienen la misma matriz canónica. Desde un punto de vista puramente matricial, dos matrices de orden n son semejantes, si y sólo si, son semejantes a la misma matriz canónica. Tenemos distintas formas canónicas según que los endomorfismos, o las matrices, sean complejos o reales. Todo endomorfismo complejo admite una forma canónica de Jordan y todo endomorfismo real admite, o bien una forma canónica de Jordan, o una forma de Jordan real.

5.1. Autovalores y autovectores. Diagonalización.

Sea f un endomorfismo de un $\mathbb{K}-$espacio vectorial V de dimensión n. Un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$[1] diremos que es un **autovalor o valor propio** de f si existe $v \in V$, no nulo, tal que $f(v) = \lambda v$. Se denomina **espectro** de f al conjunto formado por todos los autovalores de f.

Un vector $v \in V$ es un **autovector o vector propio** asociado a un autovalor λ de f si y sólo si $f(v) = \lambda v$. Al conjunto formado por todos los autovectores asociados a un autovalor λ se le denomina **subespacio propio** asociado a λ y lo denotamos por $V_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$. Se cumple que $V_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id})$ y $\dim V_\lambda = n - \operatorname{rg}(f - \lambda \operatorname{Id})$. Los autovalores de f son las raíces del **polinomio característico** de f, que denotamos por $p_f(\lambda)$ y que es igual a:

$$p_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_n), \text{ con } A \text{ la matriz de } f \text{ respecto de cualquier base } \mathcal{B}.$$

La **multiplicidad algebraica** del autovalor λ_i es su multiplicidad como raíz del polinomio característico, y la denotaremos por a_i; y la **multiplicidad geométrica** es la dimensión del

[1] El cuerpo $\mathbb{K}$ es el de los números reales, $\mathbb{R}$, o el de los números complejos, $\mathbb{C}$.

subespacio propio asociado V_{λ_i}, y la denotaremos por g_i. Siempre se cumple $1 \leq g_i \leq a_i$. Además, unas ecuaciones implícitas de V_{λ_i}, respecto de $\mathcal{B}$, se obtienen a partir del sistema lineal $(A - \lambda I_n)X = 0$ y $g_i = \dim V_{\lambda_i} = n - \mathrm{rg}(A - \lambda_i I_n)$.

Un endomorfismo f es **diagonalizable** si existe una base de V formada por autovectores de f. La matriz de f respecto de dicha base es una matriz diagonal. Si $\mathcal{B}$ es una base cualquiera de V y $\mathcal{B}' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de autovectores asociados a los autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, no necesariamente distintos, entonces:

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'}\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}} \tag{5.1}$$

Las matrices $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ y $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ son semejantes. Se llama matriz de paso, P, a la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$, la base de autovectores, a $\mathcal{B}$. Es decir $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}$. La relación de semejanza entre matrices del endomorfismo en distintas bases es $D = P^{-1}AP$.

Teorema de caracterización de los endomorfismos diagonalizables: ([BE], Teorema 5.13) Un endomorfismo f de un $\mathbb{K}$ −espacio vectorial V de dimensión n es diagonalizable, si y sólo si, tiene n autovalores (contados con su multiplicidad) y para todo autovalor se cumple que la multiplicidad algebraica y geométrica coinciden.

Una **matriz** cuadrada A se dice que es **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal D, es decir si existe una matriz regular P tal que $D = P^{-1}AP$. Como definición alternativa podríamos decir que, una matriz cuadrada $A \in \mathfrak{M}_n\,\mathbb{K}$ es diagonalizable, si y sólo si, el endomorfismo de $\mathbb{K}^n$ cuya matriz en cierta base es A es diagonalizable.

5.1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} b-1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 2-b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad b \in \mathbb{R},$$

compruebe que 2 es un autovalor de A para todo b y estudie en qué casos 3 es un autovalor.

Solución: La matriz A tiene a 2 como autovalor si y sólo si $\det(A - 2I_3) = 0$. Calculamos el determinante

$$\det(A - 2I_3) = \det \begin{pmatrix} b-3 & 0 & 0 \\ -1 & b-2 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

El determinante es 0, para todo b, ya que la matriz tiene una fila nula. Entonces, 2 es un autovalor de A para todo b.

El número $\lambda = 3$ es autovalor de A si y sólo $\det(A - 3I_3) = 0$. Calculamos el determinante

$$\det(A - 3I_3) = \det \begin{pmatrix} b-4 & 0 & 0 \\ -1 & b-3 & 2-b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} b-4 & 0 \\ -1 & b-3 \end{pmatrix} = -(b-4)(b-3)$$

Entonces, $\lambda = 3$ es autovalor de A si y sólo si $b = 4$ o $b = 3$. $\square$

5.2. En cada caso, determine los autovalores y subespacios propios del endomorfismo f, de un espacio vectorial real, cuya matriz respecto de alguna base $\mathcal{B} = \{v_1,\, v_2\}$ es

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{(b) } B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{(c) } C = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solución: Al ser un endomorfismo real, los autovalores son las raíces reales del polinomio característico.

(a) El polinomio característico de f es

$$p_f(\lambda) = \det(A - \lambda\, I_2) = \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 3 \\ -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene

$$p_f(\lambda) = \lambda^2 - 3\,\lambda + 2$$

Los autovalores de f, o de A, son las raíces reales de este polinomio, es decir las soluciones de la ecuación característica $\lambda^2 - 3\,\lambda + 2 = 0$. Por tanto, f tiene dos autovalores

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$$

Ambos autovalores son simples, es decir tienen multiplicidad algebraica 1.

Subespacios propios:

- Subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$

$$V_1 = \{v :\ f(v) = v\} = \{v :\ f(v) - v = \mathbf{0}\} = \{v :\ f(v) - \mathrm{Id}(v) = \mathbf{0}\} = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$$

Unas ecuaciones implícitas de este subespacio, respecto de $\mathcal{B}$, se obtiene del sistema lineal $(A - I_2)X = 0$:

$$\begin{aligned} V_1 = &\ \left\{ (x_1, x_2) :\ (A - I_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ = &\ \left\{ (x_1, x_2) :\ \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ = &\ \{ (x_1, x_2) :\ -3x_1 + 3x_2 = 0,\ -4x_1 + 4x_2 = 0\ \} \end{aligned}$$

Las ecuaciones obtenidas son linealmente dependientes, por lo que no son unas ecuaciones implícitas de V_1. Nos quedamos con una de ellas y la simplificamos obteniendo una ecuación implícita del subespacio propio

$$V_1 \equiv \{-x_1 + x_2 = 0\}$$

- Subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_2 = 2$

$$V_2 = \{v :\ f(v) = 2v\} = \{v :\ f(v) - 2v = \mathbf{0}\} = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$$

Unas ecuaciones implícitas de este subespacio, respecto de $\mathcal{B}$, se obtiene del sistema lineal $(A-2I_2)X=0$:

$$\begin{aligned} V_2 = & \left\{(x_1,x_2):\ (A-2I_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ = & \left\{(x_1,x_2):\ \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ = & \{(x_1,x_2):\ -4x_1+3x_2=0,\ -4x_1+3x_2=0\} \end{aligned}$$

Por tanto, una ecuación implícita del subespacio propio asociado es

$$V_2 \equiv \{-4x_1+3x_2=0\}$$

(b) Calculamos el polinomio característico de f con matriz $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$$p_f(\lambda) = \det(B-\lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} -4-\lambda & 3 \\ -3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2+2\lambda+1 = (\lambda+1)^2$$

El polinomio característico tiene una raíz doble $\lambda=-1$, por lo que f tiene un único autovalor $\lambda=-1$ con multiplicidad algebraica 2.

El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda=-1$ es

$$V_{-1} = \{v:\ f(v)=-v\} = \{v:\ f(v)+v=\mathbf{0}\} = \mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id})$$

Unas ecuaciones implícitas de este subespacio, respecto de $\mathcal{B}$, se obtiene del sistema lineal $(B+I_2)X=0$:

$$\begin{aligned} V_{-1} = & \left\{(x_1,x_2):\ (B+I_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ = & \left\{(x_1,x_2):\ \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ = & \{(x_1,x_2):\ -3x_1+3x_2=0,\ -3x_1+3x_2=0\} \end{aligned}$$

Por tanto, una ecuación implícita del subespacio propio es

$$V_{-1} \equiv \{-x_1+x_2=0\}$$

(c) Calculamos el polinomio característico de f con matriz $C = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$p_f(\lambda) = \det(C-\lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} -3-\lambda & -5 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2+1$$

El polinomio característico no tiene ninguna raíz real, por lo que el endomorfismo f no tiene ningún autovalor. $\square$

5.3. En cada caso, determine los autovalores y subespacios propios del endomorfismo f, de un espacio vectorial complejo, cuya matriz respecto de alguna base $\mathcal{B} = \{v_1,\, v_2\}$ es

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{(b) } E = \begin{pmatrix} 1+2i & i \\ -2i & 1-i \end{pmatrix}, \quad \text{(c) } C = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solución: Al ser un endomorfismo complejo, los autovalores son las raíces complejas del polinomio característico.

(a) El polinomio característico de f es

$$p_f(\lambda) = \det(A - \lambda\, I_2) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 3 \\ -4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\,\lambda + 2$$

Se trata del mismo polinomio que el caso (a) del ejercicio anterior. Por tanto, f tiene los mismos dos autovalores simples:

$$\lambda_1 = 1 \ \text{ y } \ \lambda_2 = 2$$

Los subespacios propios, que se calculan utilizando la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$. Tienen las mismas ecuaciones que las obtenidas en el ejercicio anterior:

$$V_1 \equiv \{-x_1 + x_2 = 0\} \ \text{ y } \ V_2 \equiv \{-4x_1 + 3x_2 = 0\}$$

La diferencia es que en este caso las coordenadas (x_1, x_2) de los vectores del espacio vectorial toman valores complejos, $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$.

(b) Calculamos el polinomio característico de f con matriz $E = \begin{pmatrix} 1+2i & i \\ -2i & 1-i \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} p_f(\lambda) &= \det(E - \lambda\, I_2) = \det \begin{pmatrix} 1+2i-\lambda & i \\ -2i & 1-i-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1+2i-\lambda)(1-i-\lambda) - (-2i^2) \\ &= \lambda^2 - (2+i)\,\lambda + (1+i) \end{aligned}$$

Las raíces complejas de este polinomio se calculan con la fórmula general de la ecuación de segundo grado:

$$\begin{aligned} \lambda = & \ \frac{2+i \pm \sqrt{(2+i)^2 - 4(1+i)}}{2} = \frac{2+i \pm \sqrt{3+4i-4(1+i)}}{2} \\ = & \ \frac{2+i \pm \sqrt{-1}}{2} = \frac{2+i \pm i}{2} \end{aligned}$$

Luego las raíces de $p_f(\lambda)$ son los dos autovalores de f:

$$\lambda_1 = 1+i, \quad \lambda_2 = 1$$

El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_1 = 1 + i$ es

$$V_{1+i} = \mathrm{Ker}(f - (1+i)\,\mathrm{Id})$$

Unas ecuaciones implícitas de este subespacio, respecto de $\mathcal{B}$, se obtienen del sistema lineal $(E - (1+i)I_2)X = 0$:

$$\begin{aligned} V_{1+i} = & \left\{(x_1, x_2) :\ (E - (1+i)I_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ = & \left\{(x_1, x_2) :\ \begin{pmatrix} 1 + 2i - (1+i) & i \\ -2i & 1 - i - (1+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ = & \left\{(x_1, x_2) :\ \begin{pmatrix} i & i \\ -2i & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ = & \{(x_1, x_2) :\ ix_1 + ix_2 = 0,\ -2ix_1 - 2ix_2 = 0\} \end{aligned}$$

Las dos ecuaciones son proporcionales, luego podemos eliminar una y obtener una ecuación implícita del subespacio propio respecto de $\mathcal{B}$: $ix_1 + ix_2 = 0$. Simplificando la ecuación tenemos

$$V_{1+i} \equiv \{x_1 + x_2 = 0\}$$

El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_2 = 1$ es $V_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. Unas ecuaciones implícitas de este subespacio, respecto de $\mathcal{B}$, se obtienen del sistema lineal $(E - I_2)X = 0$.

$$\begin{aligned} V_1 = & \left\{(x_1, x_2) :\ (E - I_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ = & \left\{(x_1, x_2) :\ \begin{pmatrix} 2i & i \\ -2i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ = & \{(x_1, x_2) :\ 2ix_1 + ix_2 = 0,\ -2ix_1 - ix_2 = 0\} \end{aligned}$$

Las dos ecuaciones son proporcionales, luego nos quedamos con una y la simplificamos para determinar una ecuación implícita del subespacio

$$V_1 \equiv \{2x_1 + x_2 = 0\}$$

(c) Calculamos el polinomio característico de f con matriz $C = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$p_f(\lambda) = \det(C - \lambda\, I_2) = \det \begin{pmatrix} -3 - \lambda & -5 \\ 2 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

que tiene dos raíces complejas que son los autovalores de f:

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$$

El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_1 = i$ es

$$V_i = \mathrm{Ker}(f - i\,\mathrm{Id})$$

Unas ecuaciones implícitas de este subespacio, respecto de $\mathcal{B}$, se obtienen del sistema lineal $(C - iI_2)X = 0$:

$$\begin{aligned} V_i &= \left\{(x_1, x_2) : \ (C - iI_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \left\{(x_1, x_2) : \ \begin{pmatrix} -3-i & -5 \\ 2 & 3-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Las dos filas de la matriz son proporcionales y por tanto generan ecuaciones equivalentes. Esto lo sabemos ya que i es autovalor de C si y sólo si $\det(C - iI_2) = 0$. Las propiedades básicas del determinante nos permiten afirmar que, al ser igual a 0, las filas de la matriz son linealmente dependientes. Nos quedamos con una y obtenemos una ecuación implícita del subespacio propio respecto de la base $\mathcal{B}$:

$$V_i \equiv \{2x_1 + (3 - i)x_2 = 0\}$$

El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_2 = -i$ es

$$V_{-i} = \mathrm{Ker}(f + i\,\mathrm{Id})$$

Unas ecuaciones implícitas de este subespacio, respecto de $\mathcal{B}$, se obtienen del sistema lineal $(C + iI_2)X = 0$:

$$\begin{aligned} V_{-i} &= \left\{(x_1, x_2) : \ (C + iI_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \left\{(x_1, x_2) : \ \begin{pmatrix} -3+i & -5 \\ 2 & 3+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Las dos filas de la matriz son proporcionales y, por tanto, generan ecuaciones equivalentes. Nos quedamos con una y obtenemos una ecuación implícita del subespacio propio respecto de la base $\mathcal{B}$:

$$V_{-i} \equiv \{2x_1 + (3 + i)x_2 = 0\} \quad \square$$

5.4. Halle los autovalores y subespacios propios asociados del endomorfismo de $\mathbb{K}_3[x]$ que consiste en la derivación de polinomios.

Solución: Sea $f : \mathbb{K}_3[x] \to \mathbb{K}_3[x]$ definido por

$$f(p(x)) = p'(x) \ \text{ para todo } \ p(x) \in \mathbb{K}_3[x]$$

Tenemos que determinar una matriz de f para calcular el polinomio característico. Consideramos la base canónica $\mathcal{B} = \{1,\, x,\, x^2,\, x^3\}$ y calculamos las imágenes por f de los vectores de la base

$$f(1) = (1)' = 0,\ f(x) = x' = 1,\ f(x^2) = (x^2)' = 2x,\ f(x^3) = (x^3)' = 3x^2$$

Las coordenadas de estos vectores respecto de $\mathcal{B}$ son

$$f(1) = (0,0,0,0)_{\mathcal{B}},\ f(x) = (1,0,0,0)_{\mathcal{B}},\ f(x^2) = (0,2,0,0)_{\mathcal{B}},\ f(x^3) = (0,0,3,0)_{\mathcal{B}}$$

Entonces, la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Al ser la matriz triangular, los autovalores son las entradas de la diagonal principal, por lo que f tiene un único autovalor $\lambda = 0$ de multiplicidad algebraica 4.

El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 0$ es

$$V_0 = \operatorname{Ker}(f - 0\,\mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}(f)$$

Utilizando coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ se obtiene que

$$V_0 = \left\{ (x_0, x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{B}} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

de donde se tienen unas ecuaciones implícitas de V_0

$$V_0 = \{x_1 = x_2 = x_3 = 0\}$$

Por tanto, los polinomios de V_0 son de la forma

$$p(x) = x_0 + x_1 x + x_2 x^2 + x_3 x^3 \quad \text{con} \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

Es decir, V_0 es el subespacio de $\mathbb{K}_3[x]$ formado por los polinomios de grado 0, o lo que es lo mismo $V_0 = \mathbb{K}$. $\square$

5.5. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores, no necesariamente distintos, de una matriz A de orden n diagonalizable, entonces se cumple que

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \;\text{ y }\; \det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

Solución: Sea A una matriz de orden n diagonalizable y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sus autovalores, no necesariamente distintos, contados con su multiplicidad. Entonces, existe una matriz regular P tal que

$$P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

A continuación demostramos que la traza y el determinante son invariantes por semejanza, de lo que se deduce que

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(D) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \;\text{ y }\; \det(A) = \det(D) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

Vamos a demostrarlo. Sean A y B dos matrices semejantes y P una matriz regular tal que $B = P^{-1}AP$, entonces

$$\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}((P^{-1}A)(P)) = \operatorname{tr}((P)(P^{-1}A)) = \operatorname{tr}(I_nA) = \operatorname{tr}(A)$$

donde hemos utilizado la propiedad básica de la traza respecto del producto de matrices: $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. Esta misma propiedad la tiene el determinante: $\det(AB) = \det(BA)$, por lo que

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det((P^{-1}A)(P)) = \det((P)(P^{-1}A)) = \det(I_nA) = \det(A)$$

como queríamos demostrar. $\square$

5.6. Demuestre que si f es un endomorfismo de V y $\dim(\operatorname{Im}(f)) = k$, entonces f tiene como mucho $k + 1$ autovalores distintos.

Solución: Vamos a utilizar la propiedad siguiente: si u y v son autovectores no nulos asociados a autovalores distintos, entonces son linealmente independientes. Supongamos que f tiene p autovalores distintos y no nulos con autovectores asociados $v_1, \ldots, v_p$, todos no nulos, entonces los vectores $v_1, \ldots, v_p$ son linealmente independientes.

Las imágenes de estos autovectores:

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, f(v_p) = \lambda_p v_p$$

son también linealmente independientes, y son vectores pertenecientes al subespacio $\operatorname{Im}(f)$. Entonces, dado que $L(f(v_1), \ldots, f(v_p)) \subseteq \operatorname{Im}(f)$ se tiene que

$$p = \dim L(f(v_1), \ldots, f(v_p)) \leq \dim(\operatorname{Im}(f)) = k$$

Luego, el número de autovalores distintos y no nulos de f es como mucho k. Eventualmente, también podría ser 0 un autovalor de f, lo que no aumentaría la dimensión del subespacio $\operatorname{Im}(f)$. Por tanto, f tiene como mucho $k + 1$ autovalores distintos. $\square$

5.7. Demuestre la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones

(a) $\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor de una matriz $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ si y sólo si $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) < n$.

(b) Si A es semejante a B, entonces A^k es semejante a B^k para todo $k \geq 1$.

(c) Si A^k es semejante a B^k para algún $k \geq 2$, entonces A es semejante a B.

(d) $\lambda = 0$ es autovalor de un endomorfismo f si y sólo si f no es inyectivo.

(e) $\lambda = 0$ es autovalor de una matriz A si y sólo si $\det(A) = 0$.

(f) Si A es una matriz real no nula diagonalizable y $\operatorname{tr}(A) = 0$, entonces necesariamente A tiene autovalores positivos y negativos.

(g) Para todo $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, y toda matriz $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ se cumple que

$$\lambda \text{ es autovalor de } A \text{ si y sólo si } a\,\lambda \text{ es autovalor de } aA.$$

Solución:

(a) Verdadera. Sea $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. El escalar λ es autovalor de A si y sólo si es raíz del polinomio característico de A es decir $p_A(\lambda) = 0$, lo que equivale a

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Es decir,

$$\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) < n$$

Esta condición sobre el rango de $A - \lambda I_n$ equivale a que el sistema lineal homogéneo $(A - \lambda I_n)X = 0$ tenga infinitas soluciones. El conjunto de soluciones del sistema determina las coordenadas de los autovectores asociados al autovalor λ.

(b) Verdadera. Si A es semejante a B, existe una matriz regular P tal que $B = P^{-1}AP$. Entonces,

$$B^k = (P^{-1}AP)^k = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \overset{k-1}{\cdots} (P^{-1}AP) = P^{-1}(APP^{-1})^{k-1}AP$$

Simplificando cada producto $PP^{-1} = I_n$ se tiene la igualdad $B^k = P^{-1}A^kP$. Luego A^k es semejante a B^k para todo $k \geq 1$.

(c) Falsa. Determinamos un contraejemplo. Es decir, dos matrices A y B tales que A^k sea semejante a B^k para algún $k \geq 2$, pero A no sea semejante a B.
Las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

verifican que $A^3 = B^3 = 0_3$, la matriz nula de orden 3, por lo que A^3 y B^3 son semejantes. Sin embargo, las matrices A y B no son semejantes pues tienen distinto rango. Tampoco son semejantes las matrices A^2 y B^2 ya que

$$A^2 = B \quad \text{y} \quad B^2 = 0_3$$

y ninguna matriz no nula es semejante a la matriz nula del mismo orden.

(d) Verdadera. Un endomorfismo f no es inyectivo si y sólo si $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\mathbf{0}\}$. Teniendo en cuenta que si $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\mathbf{0}\}$, entonces $\mathrm{Ker}(f) = V_0$, el subespacio propio asociado al autovalor 0; tenemos el resultado deseado.

(e) Verdadera. $\lambda = 0$ es autovalor de A si y sólo si es solución de la ecuación característica $\det(A - \lambda\, I_n) = 0$, lo que equivale a $\det(A) = 0$.

(f) Verdadera. Si A es una matriz real no nula de orden n diagonalizable, entonces es semejante a una matriz diagonal

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ números reales no necesariamente distintos (los autovalores de A repetidos según sus multiplicidades) y no todos nulos. Las matrices A y D, por ser semejantes, tienen la misma traza por lo que

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(D) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$$

Entonces, necesariamente A tiene autovalores positivos y negativos.

(g) Verdadera. Sean $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, y $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces, $\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor de A si y sólo si es raíz de su polinomio característico, lo que equivale a $\det(A - \lambda\, I_n) = 0$. Ahora bien, como

$$\det(A - \lambda\, I_n) = \frac{1}{a^n} \det(a(A - \lambda\, I_n)) = \frac{1}{a^n} \det(aA - a\,\lambda\, I_n)$$

entonces

$$\det(A - \lambda\, I_n) = 0 \;\text{ si y sólo si }\; \det(aA - a\,\lambda\, I_n) = 0$$

La segunda igualdad significa que $a\,\lambda$ es autovalor de la matriz aA. $\square$

5.8. Demuestre que toda matriz estrictamente triangular no nula no es diagonalizable.

Solución: Una matriz estrictamente triangular (superior o inferior) es una matriz triangular (superior o inferior) tal que los elementos de la diagonal principal son todos iguales a 0.

Si A es una matriz de orden n estrictamente triangular, entonces $\lambda = 0$ es el único autovalor de A de multiplicidad algebraica $a = n$. La multiplicidad geométrica de este autovalor es

$$g = \dim V_0 = n - \mathrm{rg}(A - 0I_n) = n - \mathrm{rg}(A)$$

Si A es una matriz no nula, entonces $\mathrm{rg}(A) \neq 0$, y así $g = n - \mathrm{rg}(A) < n = a$.

Por tanto, $g \neq a$, y como no coinciden la multiplicidad algebraica y geométrica del autovalor, la matriz no es diagonalizable. $\square$