1 Los números reales

Objetivos docentes

Los objetivos docentes de este capítulo son:

- Conocer los principales conjuntos numéricos e identificar las características que distinguen a los números reales de los demás conjuntos numéricos.
- Conocer los conceptos básicos de la teoría de conjuntos y realizar operaciones entre conjuntos.
- Conocer las representaciones decimal y geométrica de los números reales y establecer la correspondencia entre los números reales y los puntos de la recta real.
- Conocer y comprender las propiedades fundamentales de los números reales: los axiomas algebraicos y de orden, y el axioma de completitud.
- Identificar los diferentes tipos de intervalos y realizar operaciones entre ellos.
- Comprender el concepto de desigualdad y resolver desigualdades utilizando distintos métodos.
- Comprender el concepto de valor absoluto, su interpretación geométrica y sus principales propiedades.
- Resolver ecuaciones y desigualdades que involucren valores absolutos.
- Comprender el principio de inducción matemática y aplicarlo para demostrar propiedades y resultados dependientes de un número natural.

1.1 Introducción

El **cálculo infinitesimal**, comúnmente conocido como *cálculo*, es una rama fundamental de las matemáticas que se desarrolló en el siglo XVII de manera independiente por el matemático y físico inglés **Isaac Newton** (1643-1727) y el matemático alemán **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) para estudiar problemas físicos relacionados con el movimiento y problemas geométricos como el cálculo de tangentes, áreas y volúmenes.

Desde su aparición, el cálculo infinitesimal se ha convertido en una herramienta imprescindible para la ciencia y la ingeniería, ya que proporciona métodos esenciales para modelar y resolver problemas en una amplia variedad de campos, entre ellos la física, la ingeniería, la economía, la biología y la informática. Los conceptos fundamentales del cálculo (los **límites**, las **derivadas** y las **integrales**) constituyen la base de gran parte de la ciencia y la tecnología modernas.

Los **números reales** constituyen el conjunto numérico sobre el que se construye todo el cálculo infinitesimal, ya que la **propiedad de completitud** les proporciona la continuidad necesaria para definir rigurosamente sus conceptos fundamentales.

Este capítulo está dedicado al estudio de los números reales y de los conceptos matemáticos asociados necesarios para comprender adecuadamente los contenidos de los siguientes capítulos. En primer lugar, se realiza una introducción a los principales **tipos de números** y una revisión de los conceptos básicos de la **teoría de conjuntos**. Posteriormente, se aborda la **representación decimal y geométrica** de los números reales, que permite establecer la conexión entre el sistema numérico y la recta numérica.

A continuación, se estudian las **propiedades de los números reales**, detallando los axiomas algebraicos, de orden y, especialmente, el axioma de completitud, que confiere a los números reales su carácter continuo. A partir de estos axiomas, se desarrollan los conceptos de **intervalos** y **desigualdades**, proporcionando métodos para su definición, sus operaciones y su resolución práctica. Seguidamente, se introduce el **valor absoluto**, explorando su definición, sus propiedades, su interpretación geométrica y los métodos para resolver ecuaciones y desigualdades que lo involucran.

Finalmente, el capítulo concluye con una introducción al **principio de inducción matemática**, una herramienta esencial para realizar **demostraciones rigurosas** de teoremas, propiedades y fórmulas que dependen de un índice natural. Como aplicación de este principio, se estudian el **binomio de Newton** y la **desigualdad de Bernoulli**.

1.2 Principales tipos de números

Un **número** es un concepto matemático abstracto que se utiliza para representar cantidades, medir magnitudes o establecer un orden. Existen diferentes clases o conjuntos de números: naturales, enteros, racionales, irracionales, reales y complejos[1].

[1] Aparte de las clases de números listadas, que son de uso común en las matemáticas básicas, existen otras clases utilizadas en matemáticas avanzadas, como por ejemplo los números hiperreales, los números superreales, los números surreales, los cuaterniones y los octoniones.

Los **números naturales** son

$$1, 2, 3, \ldots$$

Al conjunto de todos ellos se le representa con la letra $\mathbb{N}$. Estos son los primeros números utilizados por los seres humanos debido a la necesidad de contabilizar las cosas.

Los **números enteros** son

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Comprenden, por tanto, a los números naturales, a los naturales negativos y al número cero. Al conjunto de los números enteros se le representa con la letra $\mathbb{Z}$, que proviene de la palabra alemana «Zahlen» que significa «números».

Al contrario de lo que podría pensarse, tanto el cero como los números negativos surgieron mucho tiempo después que los números naturales. El cero nació de la necesidad de representar el concepto de «nada» o «ausencia». Mientras que los números negativos surgieron en el ámbito de la contabilidad para representar deudas.

Los **números racionales** son cocientes o fracciones de números enteros. Por lo tanto, cualquier número racional r puede expresarse como

$$r = \frac{a}{b}$$

donde a y b son números enteros, siendo b distinto de cero. Ejemplos de números racionales son

$$-3 = -\frac{3}{1} \qquad -\frac{1}{4} \qquad \frac{2}{5} \qquad \frac{8}{3} \qquad 12 = \frac{12}{1}$$

Al conjunto de todos los números racionales se le representa con la letra $\mathbb{Q}$, que proviene de la palabra inglesa «Quotient» que significa «cociente». Nótese que cualquier número entero a puede escribirse como $a = a/1$, por lo tanto el conjunto $\mathbb{Z}$ está contenido dentro del conjunto $\mathbb{Q}$.

Las fracciones de números naturales eran utilizadas por las civilizaciones antiguas, mucho antes del nacimiento del cero y los números negativos. Las utilizaban para medir, repartir bienes y resolver problemas matemáticos prácticos en la agricultura, la construcción y el comercio.

Los **números irracionales** son aquellos números que no pueden expresarse como el cociente de números enteros. El conjunto de los números irracionales se denotará en este libro por $\mathbb{I}$. Ejemplos de números irracionales son

$$\sqrt{2} \qquad \sqrt{3} \qquad \sqrt[3]{2} \qquad \pi \qquad e$$

El descubrimiento de los números irracionales se atribuye tradicionalmente a los pitagóricos y, en particular, a Hipaso de Metaponto, matemático y filósofo griego del siglo V a. C. Tradicionalmente, se considera que este descubrimiento surgió al aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la diagonal de un cuadrado de lados de longitud unidad.

Los **números reales** son el conjunto de números formado por todos los números racionales y todos los números irracionales. Al conjunto de todos los números reales se le representa con la letra $\mathbb{R}$.

La construcción rigurosa de los números reales a partir de los números racionales fue desarrollada en el siglo XIX, entre otros, por los matemáticos alemanes Richard Dedekind y Georg Cantor. Aunque el adjetivo «reales» fue introducido en el siglo XVII por el filósofo, matemático y físico francés René

Descartes en su libro «La Géométrie» para referirse a las soluciones reales de ecuaciones algebraicas, al contrario que las soluciones que contenían raíces cuadradas de números negativos, y que él denominaba «imaginarias».

Los **números complejos** son números que se pueden expresar en la forma

$$a + ib,$$

donde a y b son números reales, e i es la **unidad imaginaria**, definida por la relación

$$i^2 = -1.$$

(A veces se escribe informalmente $i = \sqrt{-1}$.)

Se observa que un número complejo está formado por la suma de dos términos: un número real a y el producto de la unidad imaginaria i con otro número real b. Se dice que a es la *parte real* del número complejo, mientras que b es su *parte imaginaria*; ib constituye el *término imaginario*.

A los números complejos que no tienen parte real, es decir, aquellos para los cuales $a = 0$, se les denomina números complejos *imaginarios puros*.

Ejemplos de números complejos son:

$$-1 - i \qquad 3 - i\sqrt{2} \qquad 3i \qquad 2 + 4i$$

El conjunto de todos los números complejos se representa mediante la letra $\mathbb{C}$. Nótese que si se tiene un número complejo $z = a + ib$ y $b = 0$, entonces $z = a$, es decir, z es un número real. Por lo tanto, el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales está contenido en el conjunto $\mathbb{C}$.

Los números complejos se originaron en el siglo XVI gracias al trabajo de los matemáticos italianos Gerolamo Cardano y Raffaele Bombelli. Cardano fue uno de los primeros en utilizar expresiones que contenían raíces cuadradas de números negativos[2] en la resolución de ecuaciones cúbicas. Estas expresiones podían aparecer incluso en ecuaciones cúbicas cuyas soluciones eran reales. Por su parte, Bombelli estableció reglas para operar con estas cantidades, sentando las bases del álgebra de los números complejos.

Inicialmente, los números complejos fueron recibidos con escepticismo, como pone de manifiesto el nombre de *imaginarios* dado por René Descartes en el siglo XVII. Sin embargo, gradualmente, especialmente gracias al trabajo del matemático suizo Leonhard Euler en el siglo XVIII, estas cantidades fueron adquiriendo un papel cada vez más importante en distintas áreas de las matemáticas, la física y la ingeniería. Finalmente, en el siglo XIX, gracias a los trabajos, entre otros, de Caspar Wessel, Jean-Robert Argand, Karl Friedrich Gauss, William Rowan Hamilton, Augustin-Louis Cauchy y Bernhard Riemann, los números complejos fueron reconocidos y formalizados de manera rigurosa.

[2]Conviene recordar que la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real, ya que no existe ningún número real que, al ser elevado al cuadrado, dé como resultado un número negativo.

1.3 Conceptos básicos de la teoría de conjuntos

Un **conjunto** es una colección de objetos que han sido agrupados porque tienen alguna propiedad o característica común. Un objeto que forma parte de un determinado conjunto se dice que es un **elemento** o miembro del conjunto. Usualmente, para designar a los conjuntos se utilizan letras mayúsculas:

$$A, B, \ldots, X, Y, Z$$

mientras que los elementos que forman parte de un conjunto se representan con letras minúsculas:

$$a, b, \ldots, x, y, z$$

Para indicar que un objeto x es un elemento de un conjunto A, o equivalentemente que x pertenece a A, se utiliza la notación

$$x \in A$$

Si, por el contrario, x no pertenece a A se escribe

$$x \notin A$$

Un conjunto puede tener un número finito o infinito de elementos. Si un conjunto sólo tiene un único elemento se dice que es un **conjunto unitario**. También puede suceder que un conjunto no contenga ningún elemento. En dicho caso, al conjunto se le denomina **conjunto vacío** o **nulo** y se le denota con el símbolo $\varnothing$.

1.3.1 Formas de definir un conjunto

Una posible forma de definir un conjunto es mediante **extensión** o **enumeración**, que consiste en escribir entre llaves la lista de elementos que forman parte del conjunto, separando los elementos mediante comas. Por ejemplo, si se escribe

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

se estará definiendo un conjunto A cuyos elementos son los cuatro primeros números naturales: 1, 2, 3 y 4. En este conjunto se cumple que

$$1 \in A \quad 2 \in A \quad 3 \in A \quad 4 \in A$$

mientras que, por ejemplo, el número 0 no pertenece a este conjunto

$$0 \notin A$$

En el caso de que el conjunto tenga un número infinito de elementos, y siempre que el patrón de continuación quede suficientemente claro, se escriben los primeros elementos que forman parte del conjunto

y luego se ponen puntos suspensivos (...) que significan «y así sucesivamente». Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales se define por extensión de la siguiente forma:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Otra forma de definir un conjunto es mediante **comprensión** o **propiedad**, que consiste en especificar entre llaves la propiedad que cumplen todos los elementos que forman parte del conjunto. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares se definiría por comprensión mediante la expresión

$$\{x \mid x \in \mathbb{N},\ \ x \text{ es par}\}$$

Los símbolos | y : se utilizan habitualmente con el significado de «tal que». Por tanto, la expresión anterior también podría escribirse como

$$\{x : x \in \mathbb{N},\ \ x \text{ es par}\}$$

Cuando aparecen varias condiciones separadas por comas, se entiende que todas ellas deben cumplirse simultáneamente. Por tanto, las expresiones anteriores se leen de la siguiente forma:

«El conjunto de todos los elementos x tal que x pertenece al conjunto de los números naturales y x es par.»

▹ Nota

Conviene señalar que un conjunto definido mediante comprensión puede ser expresado de diversas formas, todas ellas equivalentes entre sí. Por ejemplo, otra expresión posible para la definición por comprensión del conjunto de los números naturales pares es la siguiente:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es par}\}$$

que se leería como «El conjunto de todos los elementos x pertenecientes al conjunto de los números naturales tal que x es par.»

Otras dos expresiones posibles serían

$$\{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$$

y

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$$

donde se ha expresado matemáticamente la propiedad de que el elemento x sea par.

◀

Ejemplo 1.1

Definir por extensión o por comprensión: a) El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros. b) El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. c) El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos.

Solución

a) El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros se define por extensión de la siguiente forma:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

b) El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales se define por comprensión mediante la expresión:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

que se lee:

«El conjunto de todos los elementos de la forma a/b tal que a y b pertenecen al conjunto de los números enteros y b es distinto de 0.»

c) El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos se define por comprensión de la siguiente forma:

$$\mathbb{C} = \left\{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1 \right\}$$

que se lee:

«El conjunto de todos los elementos de la forma $a + ib$ tal que a y b pertenecen al conjunto de los números reales, e $i^2 = -1$.»

1.3.2 Conjuntos iguales

Dos conjuntos A y B se dice que son **conjuntos iguales** o **idénticos** si ambos contienen los mismos elementos, es decir, si cada elemento que pertenece a A también pertenece a B y si cada elemento que pertenece a B también pertenece a A. La igualdad de dos conjuntos A y B se denota mediante la expresión

$$A = B$$

En el caso de que alguno de los dos conjuntos A o B contenga algún elemento que no esté en el otro conjunto, entonces los conjuntos son distintos y se escribe

$$A \neq B$$

A la hora de comparar dos conjuntos, se deben tener presentes las siguientes consideraciones de la teoría de conjuntos:

1. El orden en que aparecen enumerados los elementos de un conjunto es indiferente a efectos de comparación de conjuntos. Por lo tanto, si un conjunto A tiene los mismos elementos que un conjunto B pero enumerados en orden distinto, entonces $A = B$.

2. Si un conjunto tiene algún elemento duplicado, a efectos de comparación de conjuntos, se considera como un único elemento.

Ejemplo 1.2

Determinar si el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ es igual o no a cada uno de los siguientes conjuntos:
a) $B = \{2, 4, 1, 3\}$. b) $C = \{1, 1, 2, 3, 4, 4\}$. c) $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Solución

a) Se observa que $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 4, 1, 3\}$ contienen los mismos elementos, los cuatro primeros números naturales. En B los elementos están desordenados con respecto a A. Sin embargo, el orden en que se enumeran los elementos de un conjunto es indiferente a la hora de compararlo con otro conjunto. Por lo tanto, $A = B$.

b) Se observa que el conjunto $C = \{1, 1, 2, 3, 4, 4\}$ contiene también los cuatro primeros números naturales, aunque los elementos 1 y 4 están duplicados. Sin embargo, a efectos de comparación de conjuntos, si un conjunto tiene algún elemento duplicado se considera como un único elemento. Luego, $A = C$.

c) Se observa que $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ contiene a los cinco primeros números naturales. Como $5 \notin A$, entonces $A \neq D$.

1.3.3 Subconjuntos

Un conjunto A es un **subconjunto** de otro conjunto B si y solo si cada elemento de A pertenece también a B. Si A es un subconjunto de B se escribe

$$A \subset B$$

que se lee «A está contenido en B» o «B contiene a A».

En el caso de que exista al menos un elemento de A que no pertenezca también a B, entonces A no es un subconjunto de B, y se escribe

$$A \not\subset B$$

Ejemplo 1.3

Sea el conjunto $D = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Determinar si los siguientes conjuntos son subconjuntos de D:
a) $A = \{0\}$. b) $B = \{2, 4, 8\}$. c) $C = \{1, 2, 3\}$.

Solución

a) El conjunto $A = \{0\}$ consta de un único elemento, el número 0. Como este elemento también pertenece a D, entonces A es un subconjunto de D

$$A \subset D$$

b) El conjunto $B = \{2, 4, 8\}$ consta de tres elementos, los números 2, 4 y 8. Como estos tres elementos también pertenecen a D, entonces B es un subconjunto de D

$$B \subset D$$

c) El conjunto $C = \{1, 2, 3\}$ consta de tres elementos, los números 1, 2 y 3. Como el 1 no pertenece a D, entonces C no es un subconjunto de D.

$$C \not\subset D$$

Ejemplo 1.4

Establecer la relación como subconjuntos existente entre los números naturales, los números enteros, los números racionales, los números reales y los números complejos.

Solución

El conjunto de los números enteros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

contiene al conjunto de los números naturales

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Luego

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

El conjunto de los números racionales

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

contiene al conjunto de los números enteros, ya que cualquier número entero a puede escribirse como $a/1$. Por lo tanto,

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

El conjunto de los números reales está formado por todos los números racionales y todos los números irracionales. En consecuencia, los racionales están contenidos dentro de los reales

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

El conjunto de los números complejos

$$\mathbb{C} = \left\{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\right\}$$

contiene al conjunto de los números reales, ya que si un número complejo tiene su parte imaginaria nula, $b = 0$, entonces se obtiene un número real. Luego

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

En conclusión, se puede escribir la siguiente relación entre los conjuntos de números indicados:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Nótese que en la relación anterior, si se elige un determinado conjunto, este va a ser subconjunto de todos los conjuntos situados a su derecha. Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{Z}$ es subconjunto de $\mathbb{Q}$, es subconjunto de $\mathbb{R}$ y es subconjunto de $\mathbb{C}$.

1.3.4 Operaciones con conjuntos

A partir de dos conjuntos es posible generar un nuevo conjunto mediante la realización de alguna de las siguientes operaciones:

- **Unión**. La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos:

  $$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

  Este conjunto unión se representa con el símbolo

  $$A \cup B$$

  que se lee «A unión B».

- **Intersección**. La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos comunes a A y B, es decir, de aquellos elementos que pertenecen a A y que también pertenecen a B:

  $$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

  Este conjunto intersección se representa con el símbolo

  $$A \cap B$$

  que se lee «A intersección B».