

Índice general

Prefacio	xiii
1. Los números reales	3
1.1. Introducción	4
1.2. Principales tipos de números	4
1.3. Conceptos básicos de la teoría de conjuntos	7
1.3.1. Formas de definir un conjunto	7
1.3.2. Conjuntos iguales	9
1.3.3. Subconjuntos	10
1.3.4. Operaciones con conjuntos	12
1.4. Representación decimal y geométrica de los números reales	15
1.4.1. Representación decimal	15
1.4.2. Representación geométrica	19
1.5. Propiedades de los números reales	19
1.5.1. Axiomas algebraicos	19
1.5.2. Axiomas de orden	21
1.5.3. Axioma de completitud	23
1.6. Intervalos	30
1.6.1. Definición y tipos	30
1.6.2. Operaciones con intervalos	34
1.7. Desigualdades	36
1.7.1. Definición y propiedades	36
1.7.2. Resolución de desigualdades	37
1.8. Valor absoluto	48
1.8.1. Definición y propiedades	48
1.8.2. Interpretación geométrica	52
1.8.3. Resolución de ecuaciones y desigualdades con valores absolutos	53
1.9. El principio de inducción matemática	60
1.9.1. Definición	60
1.9.2. Algunas aplicaciones	64

1.10. Ejercicios propuestos	70
2. Funciones	75
2.1. Introducción	75
2.2. Formas de definir una función	76
2.3. Dominio y recorrido de una función	78
2.4. Gráficas de funciones	81
2.4.1. Transformación de funciones	82
2.4.2. Funciones definidas por partes	82
2.4.3. Simetrías. Funciones pares e impares	87
2.4.4. Monotonía. Funciones crecientes y decrecientes	90
2.5. Operaciones con funciones	94
2.5.1. Operaciones algebraicas con funciones	94
2.5.2. Composición de funciones	95
2.6. Funciones inversas	97
2.6.1. Funciones inyectivas	97
2.6.2. Definición de función inversa	101
2.6.3. Cálculo de la función inversa	103
2.7. Funciones elementales	106
2.7.1. Funciones potencia	106
2.7.2. Funciones polinómicas	108
2.7.3. Funciones racionales	114
2.7.4. Funciones radicales	116
2.7.5. Funciones exponenciales	118
2.7.6. Funciones logarítmicas	124
2.7.7. Funciones trigonométricas	130
2.7.8. Funciones trigonométricas inversas	143
2.7.9. Funciones hiperbólicas	149
2.7.10. Funciones hiperbólicas inversas	153
2.8. Ejercicios propuestos	156
3. Límites y continuidad de funciones	159
3.1. Introducción	160
3.2. Límite de una función en un punto	161
3.3. Límites infinitos y límites en el infinito	165
3.3.1. Límites infinitos	165
3.3.2. Límites en el infinito	167
3.3.3. Límites infinitos en el infinito	168
3.4. Límites que no existen	169
3.5. Definición formal de límite	174
3.6. Cálculo de límites mediante propiedades y teoremas	178

3.6.1.	Propiedades algebraicas	179
3.6.2.	Sustitución directa	185
3.6.3.	Teoremas auxiliares	191
3.7.	Formas indeterminadas en el cálculo de límites	195
3.7.1.	Propiedades de las funciones potencia y los polinomios útiles para la resolución de indeterminaciones	196
3.7.2.	Indeterminación ∞/∞	199
3.7.3.	Indeterminación $0/0$	206
3.7.4.	Indeterminación $0 \cdot \infty$	210
3.7.5.	Indeterminación $\infty - \infty$	212
3.7.6.	Indeterminaciones 0^0 , 1^∞ e ∞^0	215
3.8.	Comparación de funciones en el cálculo de límites	217
3.8.1.	Infinitésimos	217
3.8.2.	Infinitos	231
3.9.	Aplicación de los límites: cálculo de las asíntotas de funciones	238
3.9.1.	Asíntotas verticales	239
3.9.2.	Asíntotas horizontales	246
3.9.3.	Asíntotas oblicuas	249
3.10.	Continuidad	254
3.10.1.	Continuidad de una función en un punto	254
3.10.2.	Continuidad de una función en un intervalo	267
3.10.3.	Propiedades de las funciones continuas	270
3.10.4.	Funciones continuas a trozos	276
3.11.	Principales teoremas de funciones continuas en intervalos cerrados y acotados	277
3.11.1.	Teorema de Bolzano	277
3.11.2.	Teorema de los valores intermedios	281
3.11.3.	Teorema de la función acotada	284
3.11.4.	Teorema de los valores extremos	288
3.12.	Ejercicios propuestos	292
4.	Derivadas	295
4.1.	Introducción	295
4.2.	Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica	296
4.3.	Función derivada. Derivabilidad y continuidad	307
4.4.	Reglas básicas de derivación	313
4.5.	Derivada de una función compuesta. Regla de la cadena	324
4.6.	Derivada de la función inversa	330
4.7.	Derivadas de las funciones trascendentes	338
4.7.1.	Derivadas de las funciones exponenciales	338
4.7.2.	Derivadas de las funciones logarítmicas	341
4.7.3.	Derivadas de las funciones trigonométricas	346

4.7.4.	Derivadas de las funciones trigonométricas inversas	353
4.7.5.	Derivadas de las funciones hiperbólicas	360
4.7.6.	Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas	363
4.8.	Derivadas de orden superior	365
4.9.	Derivación implícita	370
4.10.	Derivación logarítmica	376
4.11.	Diferenciales	382
4.11.1.	Aproximación lineal	382
4.11.2.	Incrementos y diferenciales	386
4.11.3.	Cálculo de diferenciales	395
4.11.4.	Estimación de errores	399
4.12.	Principales teoremas de funciones derivables en un intervalo	402
4.12.1.	Teorema de Rolle	402
4.12.2.	Teorema del valor medio	408
4.12.3.	Teorema del valor medio generalizado	416
4.13.	Ejercicios propuestos	419
5.	Aplicaciones de la derivada	423
5.1.	Introducción	424
5.2.	Cálculo de límites indeterminados: regla de L'Hôpital	424
5.2.1.	Regla de L'Hôpital para las indeterminaciones $0/0$ e ∞/∞	425
5.2.2.	Aplicación de la regla de L'Hôpital a otras formas indeterminadas	433
5.3.	Aproximación polinómica de funciones: polinomio de Taylor	439
5.3.1.	Polinomio de Taylor	440
5.3.2.	Resto del polinomio de Taylor y estimación del error	444
5.3.3.	Polinomio de Maclaurin	458
5.3.4.	Aplicación de los polinomios de Taylor y Maclaurin al cálculo de límites	461
5.4.	Crecimiento y decrecimiento de funciones	469
5.5.	Extremos de funciones	477
5.5.1.	Extremos absolutos y relativos	477
5.5.2.	Criterios para determinar extremos relativos	488
5.5.3.	Extremos absolutos en intervalos no cerrados o no acotados	504
5.6.	Convexidad, concavidad y puntos de inflexión	508
5.6.1.	Convexidad y concavidad	508
5.6.2.	Puntos de inflexión	515
5.7.	Representación gráfica de funciones	520
5.8.	Problemas de optimización	534
5.9.	Ejercicios propuestos	545

6. Integrales indefinidas	549
6.1. Introducción	549
6.2. Conceptos de primitiva e integral indefinida	550
6.3. Integrales inmediatas	561
6.4. Integración por sustitución	570
6.4.1. Definición	570
6.4.2. Resolución de integrales con integrando $f(g(x))g'(x)$	578
6.4.3. Resolución de integrales con integrando $f(g(x))kg'(x)$	582
6.4.4. Resolución de integrales con integrando $f(g(x))$	584
6.4.5. Sustitución inversa	590
6.5. Integración por partes	591
6.6. Ejercicios propuestos	600
7. Técnicas específicas de integración	605
7.1. Introducción	605
7.2. Integrales trigonométricas	606
7.2.1. Integrales que contienen potencias de seno y coseno	606
7.2.2. Integrales que contienen productos de seno y coseno de ángulos diferentes	612
7.2.3. Integrales que contienen productos de potencias de tangente y secante	613
7.3. Sustituciones trigonométricas	629
7.3.1. Integrales con radicales $\sqrt{a^2 - x^2}$	630
7.3.2. Integrales con radicales $\sqrt{a^2 + x^2}$	635
7.3.3. Integrales con radicales $\sqrt{x^2 - a^2}$	640
7.4. Integración de funciones racionales	643
7.4.1. Consideraciones previas	643
7.4.2. Descomposición en fracciones simples	650
7.4.3. Integración por descomposición en fracciones simples	661
7.5. Sustituciones de racionalización	668
7.5.1. Sustitución $u = \sqrt[n]{g(x)}$	668
7.5.2. Sustitución de Weierstrass	671
7.6. Ejercicios propuestos	674
8. Integrales definidas	677
8.1. Introducción	677
8.2. Sumas y notación sigma	678
8.3. El problema del área	686
8.4. La integral definida	697
8.4.1. Sumas de Riemann	697
8.4.2. Definición	701
8.4.3. Propiedades	711
8.5. El teorema fundamental del cálculo	721

8.5.1.	Funciones integrales	721
8.5.2.	Parte I. Relación entre integración y derivación	724
8.5.3.	Parte II. Cálculo de integrales definidas	731
8.5.4.	Conclusiones	737
8.6.	Técnicas de integración para integrales definidas	754
8.6.1.	Integración por sustitución en integrales definidas	754
8.6.2.	Integración por partes en integrales definidas	758
8.7.	Ejercicios propuestos	760
9.	Aplicaciones de la integral definida	765
9.1.	Introducción	765
9.2.	Valor medio de una función	766
9.3.	Cálculo de áreas planas	769
9.4.	Cálculo de volúmenes de sólidos por secciones transversales	775
9.5.	Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución	780
9.6.	Cálculo de la longitud de un arco de una curva plana	786
9.7.	Cálculo de áreas de superficies de revolución	790
9.8.	Integrales impropias	793
9.8.1.	Integrales impropias de primera especie	793
9.8.2.	Integrales impropias de segunda especie	798
9.8.3.	Integrales impropias mixtas	802
9.8.4.	Criterios de convergencia	804
9.9.	Ejercicios propuestos	817
A.	Soluciones de los ejercicios propuestos	821
A.1.	Soluciones Capítulo 1	821
A.2.	Soluciones Capítulo 2	834
A.3.	Soluciones Capítulo 3	838
A.4.	Soluciones Capítulo 4	842
A.5.	Soluciones Capítulo 5	846
A.6.	Soluciones Capítulo 6	850
A.7.	Soluciones Capítulo 7	856
A.8.	Soluciones Capítulo 8	862
A.9.	Soluciones Capítulo 9	870