

Lección 0. Recordatorio de topología

Recogemos en esta lección introductoria algunos hechos, ejemplos y propiedades generales de topología que nos harán falta más adelante. Se dan pocos detalles, aunque se intentan indicar las dificultades involucradas.

(0.1) Homeomorfismos útiles. A menudo utilizaremos homeomorfismos entre discos, triángulos, cuadrados o polígonos más generales, de manera que se controle el borde. No pretendemos desarrollar una teoría sistemática, sino describir cómo tratar las situaciones que se plantearán usando la interpolación lineal de la geometría afín. La conclusión es que todas esas figuras son homeomorfas.

(1) Dos triángulos cualesquiera son homeomorfos, y el homeomorfismo preserva el borde. Basta utilizar la afinidad que lleva tres puntos no alineados a otros tres.

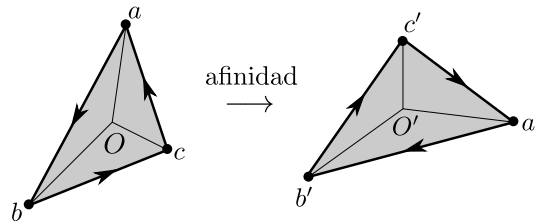


Figura 1. Homeomorfismos entre triángulos.

(2) Combinando estos homeomorfismos afines de triángulos se obtienen otros entre regiones poligonales. Combinar significa *pegar por el borde*, lo que es posible porque una afinidad de una recta está determinada por sus valores en dos puntos distintos que en nuestro caso son los vértices que limitan cada lado. Por ejemplo como en la figura que sigue

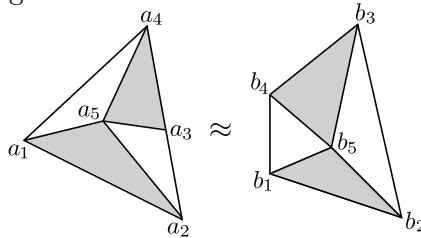


Figura 2. Homeomorfismos entre triángulos y otros polígonos.

Como decíamos, los homeomorfismos de dos triángulos adyacentes se pueden pegar porque en el lado común ambos están determinados por las imágenes b_i, b_j de los vértices a_i, a_j , o de manera explícita, en el lado común ambos son la interpolación lineal

$$(1 - s)a_i + sa_j \mapsto (1 - s)b_i + sb_j, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Decimos que un homeomorfismo obtenido combinando así varias afinidades es *lineal a pedazos*.

Estos homeomorfismos lineales a pedazos también pueden definirse en figuras no convexas, con cuidado de ordenar bien los vértices para que los pegados sean posibles. Obsérvese eso en el siguiente ejemplo:

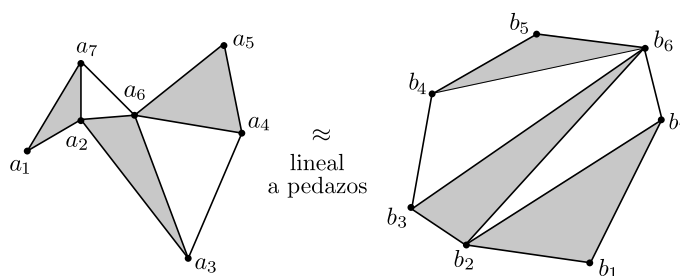


Figura 3. Homeomorfismo en un polígono no convexo.

(3) Un triángulo y un sector circular son homeomorfos. En efecto, podemos suponer la situación de la figura, y el homeomorfismo es la interpolación lineal de cada segmento $[c, p]$ sobre el correspondiente segmento $[c, q]$. Este homeomorfismo transforma el interior del triángulo en el del sector, y es la identidad en los lados del tercer vértice.

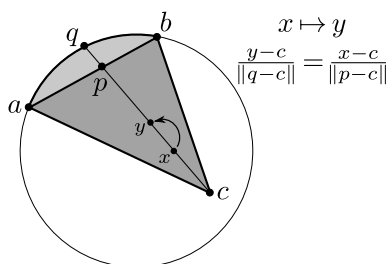


Figura 4. Homeomorfismos entre triángulos y sectores circulares.

(4) Dados un triángulo y una circunferencia en la que se han elegido tres puntos, se tiene un homeomorfismo del triángulo en la circunferencia que lleva los vértices del primero en los puntos elegidos de la segunda, y el interior del triángulo en el de la circunferencia. Basta pegar tres homeomorfismos del tipo (3) como se ve en la figura 5(a). En la figura 5(b) se ilustra cómo hacer una construcción similar con un cuadrilátero, y ya se aprecia que el procedimiento vale para cualquier polígono inscrito en una circunferencia. Hay muchas variantes de homeomorfismos construidos a pedazos utilizando como en estos casos interpolación lineal en segmentos. Véanse #22.6 y #28.1.

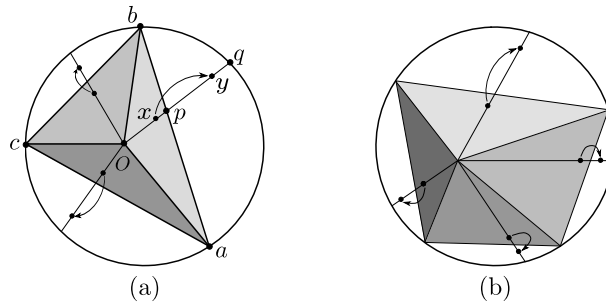


Figura 5. Homeomorfismos entre triángulos y discos, cuadriláteros y discos. ■

(0.2) Cocientes y colapsamientos. Sabemos que en general, dado un espacio topológico X y una relación de equivalencia en él, el conjunto cociente Y se equipa con una única topología tal que una aplicación $f : Y \rightarrow Z$ es continua si y sólo si $f \circ p : X \rightarrow Z$ es continua. Aquí p es la proyección canónica $p : X \rightarrow Y$, también denominada *identificación* en referencia a las identificaciones que determina la relación de equivalencia que se tenga. Nótese que la relación de equivalencia en X es la inducida por p : $x \sim x'$ si y sólo si $p(x) = p(x')$. Recordemos que un conjunto $U \subset Y$ es abierto en la topología cociente *si y sólo si* $p^{-1}(U)$ es abierto en X , caracterización que permite entender los abiertos del cociente como los abiertos *saturados* para la relación de equivalencia. Esto es claramente más que la continuidad de p .

Describimos algunos ejemplos relevantes que utilizaremos en muchas construcciones. Lo interesante es reconocer un modelo adecuado del espacio cociente.

(1) Una relación de equivalencia usual es identificar todos los puntos de un subconjunto $A \subset X$, lo que denominaremos *colapsamiento de A* . El cociente Y resultante se suele denotar X/A .

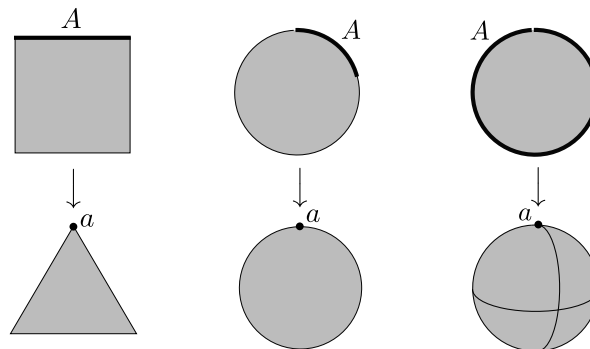


Figura 6. Colapsamientos.

Por ejemplo, al colapsar: (i) un lado de un cuadrado, obtenemos un triángulo, (ii) un arco del borde de un disco, obtenemos otro disco, (iii) todo el borde de un disco, obtenemos una esfera.

En estos ejemplos, la proyección canónica no es un homeomorfismo, aunque X e $Y = X/A$ puedan ser homeomorfos (ejemplos (i) y (ii)). Sin embargo, al prescindir del conjunto A y su proyección, que es el punto a , sí obtenemos homeomorfismos: (i) de un cuadrado menos un lado sobre un triángulo menos un vértice, (ii) de un disco cerrado menos un arco en su borde sobre un disco cerrado menos un punto en su borde, (iii) de un disco abierto sobre una esfera menos un punto.

(2) Si identificamos punto a punto los bordes de dos discos, obtenemos una esfera. Decimos que pegamos dos discos por su borde (sobre cómo se puede hacer ese pegado punto a punto, véase # 22.2).

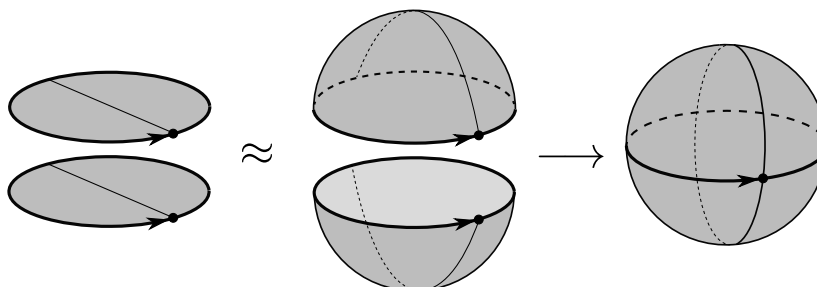


Figura 7. Pegado de dos discos.

(3) Identificando punto a punto dos lados de un cuadrado con igual orientación, obtenemos un cilindro; con orientaciones opuestas, una banda de Moebius.

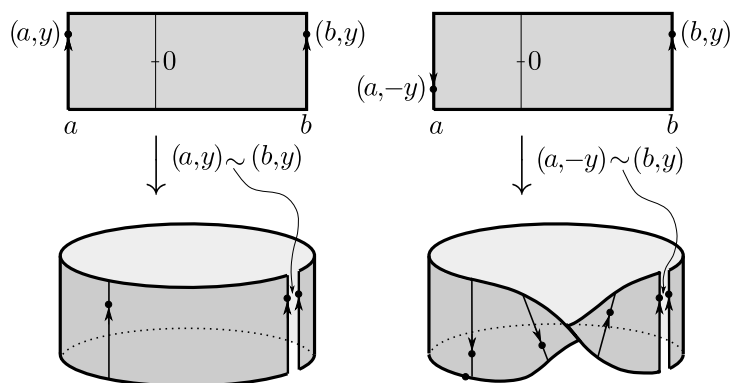


Figura 8. Cilindro y banda de Moebius.

(4) Otro ejemplo bien conocido de cociente topológico es el toro. Un toro se obtiene identificando los lados opuestos de un cuadrado K , con la misma orientación, como representamos en la figura siguiente:

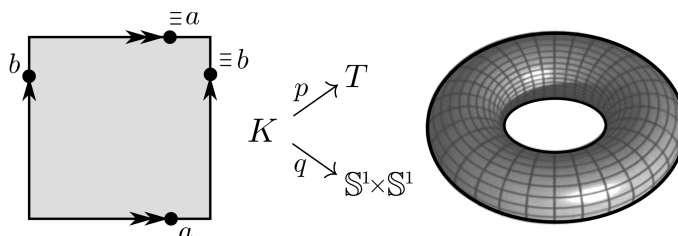


Figura 9. Toro.

Aunque la intuición justifica el nombre de toro, vamos a obtener el modelo geométrico explícito de la figura. Utilizamos primero la aplicación $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de ecuaciones

$$x = (2 + \cos 2\pi u) \cos 2\pi v, \quad y = (2 + \cos 2\pi u) \sin 2\pi v, \quad z = \sin 2\pi u.$$

Esta aplicación p parametriza el toro de revolución $T \subset \mathbb{R}^3$ que resulta al girar la circunferencia $y = 0, (x - 2)^2 + z^2 = 1$ alrededor del eje de las z 's. Claramente

$$p(u, v) = p(u', v') \text{ si y sólo si } u - u', v - v' \in \mathbb{Z},$$

es decir, la restricción de p al cuadrado unidad $K = [0, 1]^2$ induce la relación de equivalencia que tenemos. Por tanto p induce un homeomorfismo entre el cociente y T .

Pero también la aplicación $q : K \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$x_1 = \cos 2\pi u, \quad x_2 = \sin 2\pi u, \quad y_1 = \cos 2\pi v, \quad y_2 = \sin 2\pi v,$$

induce la misma relación de equivalencia en K , y su imagen es el producto de dos circunferencias $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^4$, de manera que obtenemos un homeomorfismo entre el cociente y $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Este segundo modelo topológico del toro, que denotaremos \mathbb{T}^2 , se denomina *toro plano*, pues como superficie diferenciable tiene curvatura idénticamente nula (lo que no le ocurre al toro de revolución T).

Éste es un buen ejemplo del alcance la topología: si queremos distinguir dos objetos como T y \mathbb{T}^2 necesitamos algo más, en este caso un concepto métrico como la curvatura. Por eso las clasificaciones salvo homeomorfismo tienen menos clases que las clasificaciones salvo isometría diferencial; es decir, hay menos *tipos topológicos* que *tipos métricos*. Advertimos inmediatamente que menos tipos no significa clasificación más fácil. Otros ejemplos de lo mismo son los elipsoides, que son todos esferas topológicas, pero todos métricamente distinguibles por las longitudes de sus ejes.

(5) Si identificamos cada dos puntos antipodales de la esfera obtenemos el plano proyectivo real $\mathbb{P}^2 = P^2(\mathbb{R})$ (lo que vale en cualquier dimensión, lección 7). Esa identificación se puede restringir a un hemisferio, y entonces sólo hay que identificar los puntos antipodales del ecuador. Finalmente un hemisferio es homeomorfo a un disco, y el ecuador con su borde. Ésta es otra descripción importante del plano proyectivo: el cociente de un disco en cuyo borde se identifican puntos antipodales.

Estos cocientes dan pie a varias consideraciones interesantes que ilustramos con la figura siguiente.

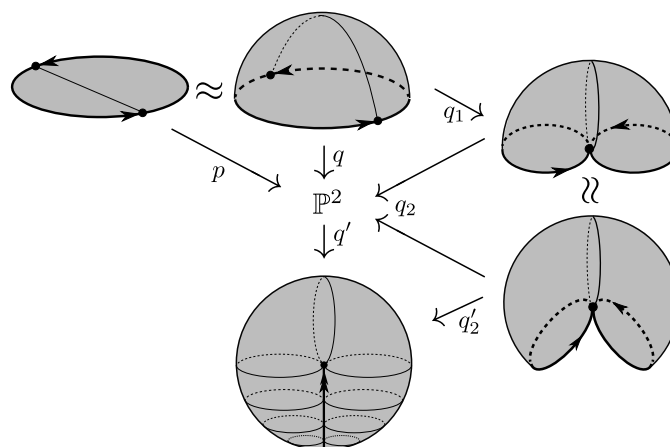
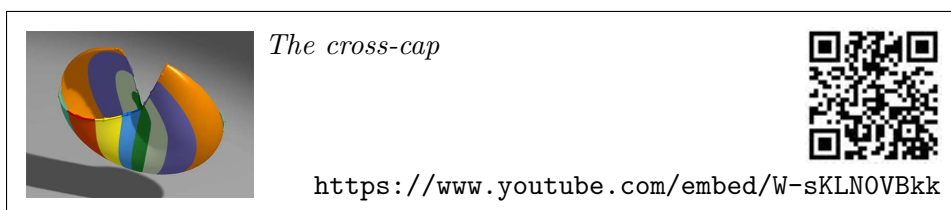


Figura 10. El plano proyectivo.

Explicamos esta figura. Como hemos dicho, tenemos: (i) la identificación q de puntos antipodales del ecuador de un hemisferio, a partir de la definición de \mathbb{P}^2 como el conjunto de las rectas vectoriales de \mathbb{R}^3 , y (ii) la identificación p de puntos antipodales del borde de un disco. Estas dos identificaciones se corresponden por el homeomorfismo evidente. Luego factorizamos q en composición de dos identificaciones sucesivas $q = q_2 \circ q_1$: q_1 identifica exactamente dos puntos antipodales, y q_2 identifica las dos circunferencias resultantes *con iguales orientaciones*. Si intentamos acercar las circunferencias para conseguir esa identificación en \mathbb{R}^3 las orientaciones deberían ser opuestas, de manera que para representar el cociente hacemos más de lo debido: q'_2 identifica las cuatro semicircunferencias entre sí. El resultado ya no es \mathbb{P}^2 sino un cociente suyo, por la identificación q' , que se denomina *inmersión de Steiner* o *cross-cap*; se tiene $q'_2 = q' \circ q_2$.

Estas manipulaciones están bellamente mostradas en la animación que, como haremos en ocasiones sucesivas, a continuación citamos mediante (i) su URL y (ii) el código QR correspondiente.



(6) En dimensión arbitraria podemos hacer lo siguiente. El espacio proyectivo real $P^n(\mathbb{R})$ es

- (i) el cociente de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ por proporcionalidad, luego
- (ii) el cociente de la esfera \mathbb{S}^n por la identificación antipodal $x \equiv -x$, luego
- (iii) el cociente de la semiesfera $Q^n = \mathbb{S}^n \cap \{x_{n+1} \geq 0\}$ por identificación antipodal en su borde, el ecuador $E^{n-1} = \mathbb{S}^n \cap \{x_{n+1} = 0\}$.

Nótese ahora que por proyección sobre $x_{n+1} = 0$ la semiesfera Q^n es homeomorfa a la bola unidad cerrada $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$, y el homeomorfismo transforma el ecuador de E^{n-1} en el borde \mathbb{S}^{n-1} de \mathbb{D}^n . Así, concluimos que $P^n(\mathbb{R})$ es el cociente de la bola unidad cerrada por identificación antipodal en su borde \mathbb{S}^{n-1} . Como esa identificación define en el borde el espacio proyectivo $P^{n-1}(\mathbb{R})$, tenemos $P^n(\mathbb{R}) = B^n \cup P^{n-1}(\mathbb{R})$ (aquí B^n es la bola abierta). ■

Como es habitual en topología, se utiliza el mismo nombre para espacios homeomorfos. Por ejemplo, una esfera (de dimensión n) es un espacio homeomorfo a la esfera unidad $\mathbb{S}^n : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$ de \mathbb{R}^{n+1} . Aquí nos interesarán principalmente las esferas de dimensión ≤ 2 . De hecho, si decimos esfera sin precisar dimensión, pensamos en una de dimensión 2; una “esfera” de dimensión 1 es una curva de Jordan.

(0.3) Teorema de extensión de Tietze. Toda aplicación continua $f : A \rightarrow [0, 1]$ definida en un cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$ se extiende a todo \mathbb{R}^n .

Este resultado es válido en condiciones mucho más generales: en lugar del espacio afín \mathbb{R}^n basta tener un espacio ambiente X normal y Hausdorff. La demostración es más sencilla en el caso de topología definida por una distancia, como para $X = \mathbb{R}^n$, y algo más si como \mathbb{R}^n se tiene local compacidad. De hecho, una extensión $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ se puede obtener por fórmula explícita (de Hausdorff):

$$\bar{f}(x) = \inf_{a \in A} \left\{ \frac{d(x, a)}{d(x, A)} (f(a) + 1) - 1 \right\} \quad \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus A.$$

La comprobación es un ejercicio (largo pero difícil). ■

Se cumplen otras variantes de este teorema, para funciones f con valores en intervalos arbitrarios, y en toda la recta: $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

(0.4) El número de Lebesgue. Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto y $\{U_i\}$ un recubrimiento abierto de K , existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in K$ la bola abierta B de centro x y radio ε está contenida en alguno de los U_i .

La demostración es parte del teorema de Bolzano-Weierstrass en un curso básico de Cálculo Diferencial. El radio ε anterior es el *número de Lebesgue* del recubrimiento. Se utiliza para descomponer un intervalo $K = [0, 1]$ o un pavés $K = [0, 1] \times [0, 1]$ en subintervalos I o subpavés $I \times J$ cada uno contenido en algún U_i . Se pueden tomar las amplitudes de tipo $1/k$. Utilizaremos repetidamente estas descomposiciones (3.1, 6.3, 13.1, 18.3). ■

(0.5) Compactificación por un punto. Un espacio localmente compacto y Hausdorff *no compacto* X se puede sumergir en otro compacto y Hausdorff X^* que tiene sólo un punto adicional. Ésta es la denominada *compactificación de Alexandroff*, que es única en el sentido natural. Un ejemplo bien conocido es la proyección estereográfica, cuya inversa sumerge \mathbb{R}^n en \mathbb{S}^n . La proyección puede hacerse desde cualquier punto c sobre el plano *vectorial* tangente a la esfera en el punto (que es el plano c^\perp perpendicular al rayo c). La figura 11 corresponde al caso $n = 2$. Mediante un cambio de coordenadas ortogonal podemos siempre suponer que proyectamos desde el polo norte $c = (0, 0, 1)$, en cuyo caso se proyecta sobre el plano $z = 0$ que se identifica con \mathbb{R}^2 . Tenemos las ecuaciones

- (i) de la proyección: $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$,
- (ii) de su inversa: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 : (u, v) \mapsto \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \right)$.

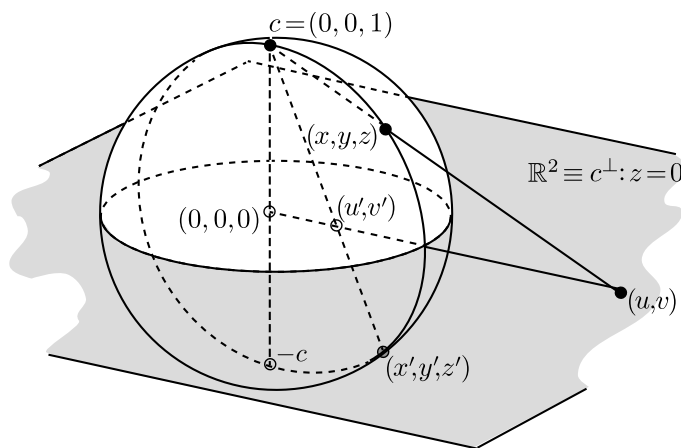


Figura 11. Proyección estereográfica. ■

(0.6) Curvas y superficies. Un conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ es una *variedad topológica* si es localmente homeomorfo a un espacio afín \mathbb{R}^d . La dimensión d de ese espacio afín se denomina *dimensión de M* . Si la dimensión es 1 la variedad se llama *curva*, y si es 2 se llama *superficie*.

Que efectivamente esta definición de dimensión es buena no es nada banal: involucra la denominada *invarianza topológica de la dimensión*. Se trata de ver que dos espacios afines localmente homeomorfos tienen la misma dimensión. Para curvas es simplemente materia de conexión, pero para superficies sólo obtendremos la invarianza después de cierto trabajo: 10.4 (y §19, p. 80). Y ese trabajo no alcanza para dimensiones superiores.

Por otra parte, reconocer si un objeto es una superficie es difícil incluso para casos aparentemente sencillos, como se explicará en la lección 19. Allí se probará rigurosamente por ejemplo que la unión de varios planos transversales no es una superficie, y con más exactitud, que el número de planos que se unen distingue *topológicamente* una unión de otra. Finalmente, en las lecciones 30 y 31 explicaremos cómo se construyen y clasifican todas las superficies compactas, desde un punto de vista más bien intuitivo. Este es uno de los resultados más bonitos de la topología, y merece un curso para él sólo. ■

Problemas

- # 1. Construir un homeomorfismo de un disco cerrado en sí mismo que sea la identidad en el borde y transforme el centro en cualquier otro punto interior prefijado.
- # 2. Sean a, b dos puntos de \mathbb{R}^2 y U un abierto conexo que los contenga. Construir un homeomorfismo de \mathbb{R}^2 que sea la identidad fuera de U y transforme a en b . ¿Y si U no es conexo?
- ✎ # 3. Construir una aplicación continua biyectiva del semiplano cerrado $\{y \leq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y comprobar que no es homeomorfismo (no puede serlo: 10.3). Enunciar y probar un resultado análogo para $\{1 \leq y \leq 0\}$.
- # 4. Utilizar la *explosión* $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (u, v) \mapsto (u, uv)$ para formalizar el primer ejemplo de colapsamiento de la figura 6 de 0.2(1), p. 3.

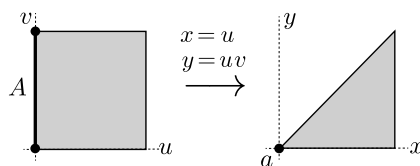


Figura 12. Explosión del origen del plano.

5. En \mathbb{R}^n con la topología usual se define la relación de equivalencia: $t \sim s$ si y sólo si $t_i - s_i$ es un entero. Demostrar que el espacio cociente \mathbb{R}^n / \sim es homeomorfo al producto $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ de n circunferencias.

6. (1) Se llama *toro sólido* al conjunto $N \subset \mathbb{R}^3$ generado al girar alrededor del eje de las z 's el disco cerrado $D : y = 0, (x - 2)^2 + z^2 \leq 1$. Mostrar que N es homeomorfo a $D \times \mathbb{S}^1$.

(2) Consideramos en la esfera unidad $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ los subconjuntos definidos por

$$M \subset \mathbb{S}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{2}, \quad M' \subset \mathbb{S}^3 : x_3^2 + x_4^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Demostrar que M y M' son (homeomorfos a) *toros sólidos* y deducir que \mathbb{S}^3 es unión de dos toros sólidos pegados por su borde de manera que los meridianos del uno son los paralelos del otro.

7. Sea $f : E \rightarrow X$ una aplicación continua definida en un paralelepípedo compacto $E \subset \mathbb{R}^n$ y sea $\{U_i\}$ un recubrimiento abierto del espacio X . Demostrar que existe una amplitud $\eta > 0$ tal que cualquier paralelepípedo compacto $K \subset E$ con lados de longitud $< \eta$ tiene la imagen $f(K)$ contenida en algún abierto U_i .

8. Mostrar que la compactificación de Alexandroff de un disco abierto es la esfera y usar este hecho para deducir que si colapsamos el borde de un disco cerrado obtenemos como se dice en 0.2(1)(iii) una esfera.

9. Probar que la aplicación $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 : (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto \frac{1}{\|x\|^2} (2x_0 - \|x\|^2, 2x_0x_1, 2x_0x_2)$ es una identificación que colapsa a un punto el hiperplano de infinito $\{x_0 = 0\}$.

10. Probar que un cilindro y una banda de Moebius, ambos sin borde, no son homeomorfos, comparando sus compactificaciones de Alexandroff. (Véase # 10.8.)

Lección 1. Homotopía

La definición inicial es bien sencilla:

Definición 1.1. Una *homotopía* es una aplicación continua $H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$.

Hay varias maneras de interpretar la noción de homotopía, que conllevan notaciones específicas.

Terminología y notaciones 1.2. (1) Para cada s tenemos la aplicación parcial continua $H_s : Y \rightarrow X, H_s(y) = H(y, s)$, así que la homotopía es una familia de aplicaciones continuas $\{H_s\}$. Bien entendido, es una familia *continua*, pues lo es respecto de s .

(2) La homotopía se puede interpretar como una *deformación continua* de la aplicación $f = H_0$ a la aplicación $g = H_1$. Se escribe entonces $H_s : f \simeq g$ y se dice que f es *homótopa* a g o simplemente que f y g son *homótopas*.