
TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

muy elemental en dimensión muy baja

Contenido

Lección 0. Recordatorio de topología	1
Homeomorfismos útiles. Cocientes topológicos. El teorema de extensión de Tietze. Número de Lebesgue de un recubrimiento abierto. Compactificación por un punto y proyección estereográfica. Curvas y superficies.	
Lección 1. Homotopía	10
Aplicaciones homótopas. Aplicaciones nulhomótopas. Convexidad y conjuntos estrellados. Interpolación lineal. Interpolación en esferas. Espacios contráctiles. Homotopía relativa.	
Lección 2. Homotopías de caminos	15
Caminos y lazos; extremos y puntos base. Homotopías de caminos; extremos fijos. Homotopías de lazos; punto base fijo. Representaciones geométricas de los diversos tipos de homotopía. Espacios simplemente conexos; caracterizaciones.	
Lección 3. Esferas	19
Una esfera (de dimensión ≥ 2) es simplemente conexa. Demostración directa por manipulación elemental de caminos. Formulación de la Conjetura de Poincaré. Pequeña reseña histórica.	
Lección 4. Operaciones con caminos	23
Sistematización de las manipulaciones de caminos utilizadas en la lección anterior. Producto de caminos. Propiedades algebraicas salvo homotopía: asociatividad, elementos neutros, inversión.	
Lección 5. El grupo fundamental	26
Grupo fundamental de base un punto dado. Ejemplos sencillos: conjuntos estrellados y esferas. Independencia del punto base. Invarianza por homeomorfismo.	
Lección 6. El problema de elevación	28
Elevación de aplicaciones continuas. Espacios recubridores. Comportamiento local de las elevaciones. Unicidad. Lema de elevación para homotopías. Naturaleza homotópica de la existencia. Elevación de caminos.	
Lección 7. Espacios proyectivos reales	32
Recubridores de los espacios proyectivos reales. Cálculo del grupo fundamental de un espacio proyectivo real de dimensión ≥ 2 . El espacio proyectivo de dimensión 3 y el grupo de rotaciones del espacio afín.	

Lección 8. La circunferencia	35
El recubridor exponencial de la circunferencia. Número de vueltas. Invarianza por homotopía de lazos. Cálculo del grupo fundamental de la circunferencia. El Teorema fundamental del Álgebra.	
Lección 9. Teoremas de Borsuk-Hirsch	39
Variantes de estos teoremas en dimensión 2: de paridad, de la aplicación impar, de coincidencias antipodales, de Lyusternik. Formulaciones en dimensión arbitraria y equivalencias diversas.	
Lección 10. Teorema de invarianza del dominio	42
Una aplicación continua localmente inyectiva del plano en sí mismo es abierta. Consecuencias en dimensión 2: invarianza de interiores y fronteras, invarianza del borde, invarianza de la dimensión. Validez en dimensión arbitraria.	
Lección 11. Funtorialidad <i>aka</i> general non-sense	45
El grupo fundamental como funtor: propiedades formales. Consecuencias: invarianza por homeomorfismo, retracciones. Invarianza del borde. Grupo fundamental de un producto. Ejemplos: el toro, el grupo de rotaciones de \mathbb{R}^3 .	
Lección 12. Teoremas de Brouwer	48
La circunferencia no es retracto del disco. Teorema del punto fijo. Ejemplos con un único punto fijo. Teorema de la esfera despeinada: no hay campos sin ceros en la esfera. Ejemplos con un único cero.	
Lección 13. La esfera no es contráctil	52
Campos tangentes a la esfera a lo largo de una aplicación continua. Campos tangentes independientes en la esfera. Traslación por homotopía de campos tangentes.	
Lección 14. Separación del plano: cuadrivértices	55
Cerrados que separan en el plano. Resultados iniciales sencillos. La engañosa evidencia de muchos resultados delicados. El lema del cuadrivértice.	
Lección 15. Grado de Brouwer-Kronecker	58
Grado de una aplicación entre circunferencias. Ejemplos: la identidad, la antipodal, las simetrías. Reformulación del teorema de paridad de Borsuk-Hirsch. Multiplicatividad. Conservación de la orientación. Teorema de Brouwer-Hopf.	
Lección 16. Retractos de deformación	62
Retractos de deformación fuerte. Espacios fuertemente contráctiles. Deformaciones por interpolación lineal. El isomorfismo inducido entre grupos fundamentales. Espacios agujereados, cilindro, banda de Moebius.	

Lección 17. Separación del plano: arcos	69
Arcos que separan y no separan el plano. El lema del arco. Arcos de Osgood, arcos con área positiva. Fractales.	
Lección 18. Bouquets finitos	71
Bouquets finitos. Deformaciones de la identidad de un bouquet. Cálculo del grupo fundamental: representación de un lazo del bouquet como producto de lazos de los pétalos y carencia de relaciones.	
Lección 19. Puntos singulares	77
Bases de entornos agujerados de un punto del plano. Grupo fundamental de entornos agujerados. Invarianza de la dimensión. Puntos singulares.	
Lección 20. El teorema de la curva de Jordan	82
Interior y exterior de una curva de Jordan, dominio de Jordan. Demostración del teorema a partir del lema del cuadrivértice y del lema del arco.	
Lección 21. Variantes del teorema de Jordan	87
El teorema de Jordan en la esfera. El teorema de Jordan para arcos cerrados sin borde. Un disco topológico no desconecta.	
Lección 22. El teorema de Schoenflies	88
El enunciado y su generalidad. Otras formulaciones más débiles (aparentemente). Consecuencias adicionales de separación.	
Lección 23. Schoenflies para poligonales	92
Demostración para curvas de Jordan poligonales. Exhaustión del disco por una sucesión encajada de dominios de Jordan poligonales.	
Lección 24. El lema de aproximación poligonal	97
Poligonales de lados paralelos a los ejes. Entornos unión de cuadrados abiertos, frontera de esos entornos. Aproximación poligonal de un arco.	
Lección 25. Embaldosado de un dominio de Jordan	102
Cuerdas. Accesibilidad lineal. Cuerdas poligonales. Aproximación. Exhaustión de un dominio de Jordan por una sucesión encajada de dominios de Jordan poligonales.	
Lección 26. Prueba del teorema de Schoenflies	108
Homeomorfismos entre abiertos de embaldosados poligonales del disco y de un dominio de Jordan. Pegados de esos homeomorfismos y límite de los pegados en el borde del disco.	
Lección 27. Interludio complejo	111
El teorema de la aplicación conforme de Riemann y el teorema de Carathéodory. Relaciones con los teoremas de Jordan y de Schoenflies.	

Lección 28. El teorema del anillo	113
Región encerrada por dos curvas de Jordan, una en el interior de la otra. Descripción del tipo topológico por subdivisión. Extensión de homeomorfismos entre pares de curvas de Jordan.	
Lección 29. Jordan-Schoenflies en el plano proyectivo	116
Validez de los teoremas de Jordan y Schoenflies en otras superficies. Posibles problemas alternativos. Solución en el plano proyectivo real.	
Lección 30. Construcción de superficies	121
Superficies. La esfera S^2 , el toro T^2 , el plano proyectivo real \mathbb{P}^2 y la botella de Klein \mathbb{K}^2 . Sumas conexas. La relación fundamental $\mathbb{P}^2 \# T^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{K}^2$.	
Lección 31. El teorema de clasificación de superficies	130
Enunciado del teorema. Distinción de superficies: el grupo fundamental, el primer grupo de homología, orientabilidad, el número de Betti, la característica de Euler, la dimensión de inmersión.	
Referencias	137
Símbolos	139
Índice	141