Capítulo I

Vectores en el plano y en el espacio

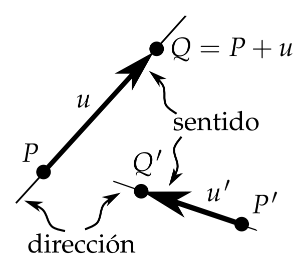
Este capítulo trata de las *coordenadas* de los vectores, necesarias para la representación y el estudio de los objetos propios de la geometría del plano y del espacio. Asímismo, describimos los tres tipos de *producto* que hay para vectores: *escalar, vectorial y mixto*. Finalmente, explicamos cómo se utilizan esos productos para medir *módulos, áreas y volúmenes*.

1. Operaciones lineales con escalares y vectores

La distinción entre magnitudes escalares y magnitudes vectoriales es muy importante en geometría. Recordemos que de una magnitud escalar (los precios, los volúmenes) sólo interesa la cuantía, mientras que de una vectorial (las fuerzas, las velocidades) son relevantes, además, la dirección y el sentido.

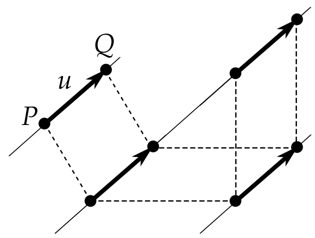
Habitualmente se usan las letras mayúsculas $P, Q, \ldots$ (a veces las minúsculas p, q) para representar puntos, y las letras minúsculas $u, v, \ldots$, para representar vectores. Si hacen falta muchas, se usan subíndices: $P_1, P_2, \ldots$, $u_1, u_2, \ldots$. Los escalares, que son simplemente los números, se representan con letras minúsculas como $a, b, \ldots, x, y, \ldots$

1.1 Vectores. En la geometría del plano y del espacio, un *vector* u se define de modo natural mediante dos puntos P y Q, denominados *origen y extremo;* se utilizan las notaciones $u = \overrightarrow{PQ}$ y $Q = P + u$. La *dirección* del vector es la recta que pasa por los dos puntos, y su *sentido* es siempre de origen a extremo.

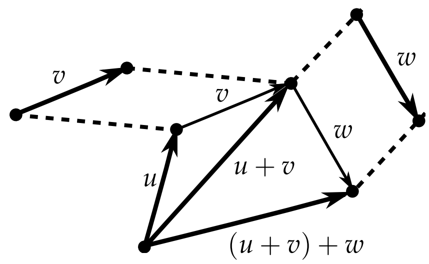


1.2 Comparación de vectores. *Dos vectores son iguales si son los lados opuestos de un paralelogramo, dados en el mismo sentido.*

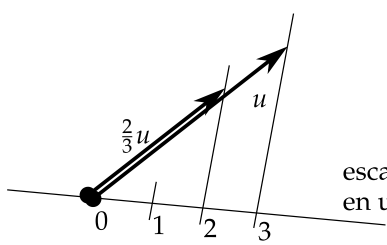
En la figura siguiente se representan varios vectores que son iguales según este criterio:



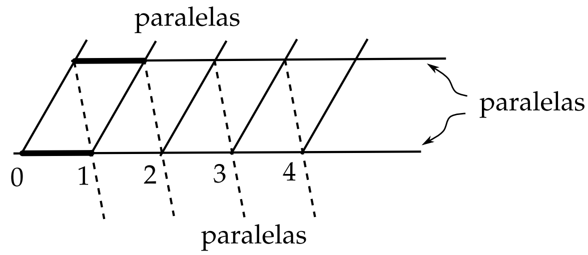
1.3 Operaciones con vectores. Es fácil entender cómo se *suman:*



También es sencillo *multiplicar escalares por vectores:*



Observemos que al multiplicar un escalar k por un vector u, no medimos distancias, simplemente las comparamos. Para dibujar ku se puede elegir, en virtud del teorema de Thales, cualquier escala en cualquier recta auxiliar, y el resultado de la comparación es el mismo. La escala puede construirse fácilmente a partir de un segmento arbitrario, con el simple trazado de paralelas:



► Dos vectores u, v son *proporcionalesVectores proporcionales* si existe un escalar k tal que $v = ku$.

Es claro que esto significa que los dos vectores tienen la misma dirección. Si $k > 0$, los dos vectores tiene el mismo sentido, y si $k < 0$ tienen sentidos opuestos.

1.4 Propiedades de la suma de vectores.

1. *Asociativa:* $u + (v + w) = (u + v) + w$.
2. *Conmutativa:* $u + v = v + u$.
3. El *vector cero* es $0 = \overrightarrow{PP}$, que cumple $u + 0 = u$.
4. El *vector opuesto* de $u = \overrightarrow{PQ}$ es $-u = \overrightarrow{QP}$, que cumple $u + (-u) = 0$.

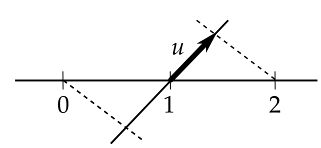
1.5 Propiedades del producto por escalares.

1. *Asociativa:* $a(bu) = (ab)u$.
2. *Distributiva respecto del escalar:* $(a + b)u = au + bu$.
3. *Distributiva respecto del vector:* $a(u + v) = au + av$.
4. Productos por $0, 1$ y -1: $0 \cdot u = 0$, $1 \cdot u = u$, $(-1)u = -u$.

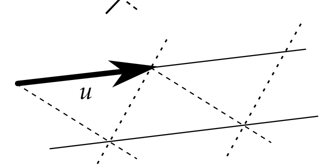
Estas ocho propiedades incluyen el hecho de que el conjunto de todos los vectores es un *espacio vectorial.*

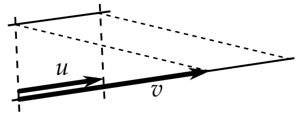
Ejercicios

1.1. Dibujar el opuesto de un vector con ayuda de una escala según se sugiere en la figura.

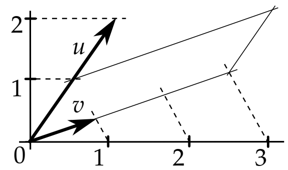


1.2. Dibujar el doble de un vector sin usar escalas, según se indica en la figura.





1.3. Dibujar la suma de dos vectores con la misma dirección, según se ve en la figura.



1.4. Dibujar el vector $\frac{1}{2}u + 3v$ como se sugiere en la figura adjunta.

1.5. Comprobar gráficamente la propiedad distributiva de la suma de vectores.

2. Dependencia lineal, bases y coordenadas

La noción siguiente es el fundamento de toda la geometría analítica.

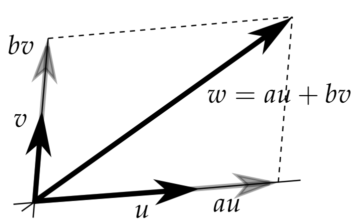
2.1 Definición. Dos vectores no nulos u, v se llaman *linealmente dependientes* si son proporcionales, es decir, si existe un escalar a tal que $v = au$, e *independientes* si no lo son.

Podemos reescribir esa proporcionalidad poniendo $au - v = 0$, es decir $au + bv = 0$ con $b = -1$. Una expresión del tipo $au + bv$ se llama *combinación lineal*, y si, como en nuestro caso, vale cero, $au + bv = 0$, se llama combinación lineal *nula*. Por supuesto, siempre se puede escribir $0 \cdot u + 0 \cdot v = 0$, pero esta combinación *trivial* no tiene obviamente ningún interés, y no es el caso anterior, en el que $b = -1 \neq 0$. Así pues:

► *Dos vectores u, v son linealmente dependientes si existe una combinación lineal nula $au + bv = 0$, que no es trivial ($a \neq 0$ o $b \neq 0$).*

Esta condición para la dependencia vale también si uno o los dos vectores son nulos, aunque en ese caso siempre son dependientes. Más en general:

► Un vector *w depende linealmente de otros dados u y v,* cuando es combinación lineal de ellos: $w = au + bv$.



2.2 Bases en el plano. El número máximo de vectores independientes (es decir, no proporcionales) en el plano es dos. Dos vectores del plano son independientes si no tienen la misma dirección. La figura muestra cómo dados dos vectores independientes u y v, cualquier otro w de su mismo plano se puede escribir como combinación de los dos primeros.

Esto se resume diciendo que *el plano tiene dimensión* 2.

► Dos vectores no proporcionales del plano forman una *base:* cualquier otro vector del plano depende linealmente de ellos. Esto quiere decir que cualquier vector del plano puede escribirse como combinación lineal de los dos vectores de la base, y esa combinación es *única*.

Esta unicidad de la combinación significa que *si un mismo vector se expresa mediante dos combinaciones lineales de los mismos vectores independientes, entonces esas combinaciones son iguales*.

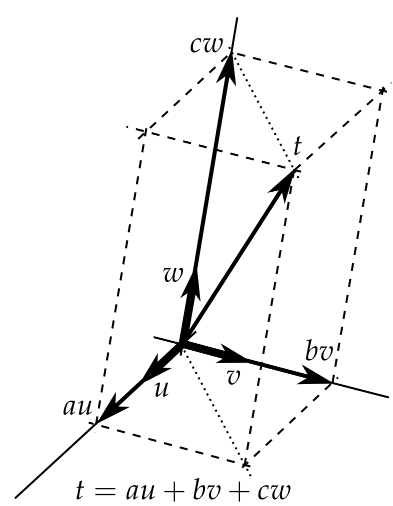
Demostración. Dados los dos vectores u y v que forman una base, supongamos que un vector w se puede escribir de dos maneras como

$$w = au + bv = a'u + b'v,$$

siendo u y v independientes, podemos operar como sigue:

$$0 = (au+bv)-(a'u+b'v) = (au-a'u)+(bv-b'v) = (a-a')u+(b-b')v.$$

Mirando al primer y al último miembros de estas igualdades vemos una combinación lineal nula, y como los vectores u, v son independientes, debe ser trivial, de manera que $a - a' = b - b' = 0$, con lo que $a = a'$ y $b = b'$. Así, como decíamos, no puede haber dos expresiones distintas de w como combinación lineal de u, v. ∎



2.3 Bases en el espacio. Como es de esperar, el número máximo de vectores independientes en el espacio es tres, y *el espacio tiene dimensión* 3. Tres vectores son independientes si no son *coplanarios* (es decir, si no están los tres en un mismo plano), en cuyo caso forman una *base*. Entonces cualquier otro vector se puede escribir de una única manera como combinación lineal de ellos.

2.4 Coordenadas. Mediante combinaciones lineales hemos llegado a la noción de base. Aunque hay infinitas bases, elegida una entre todas, cada vector se expresa de manera única utilizando los vectores de esa base fijada, y esa expresión única proporciona las coordenadas del vector en cuestión.

Coordenadas en el plano. Supongamos elegida una base, formada por dos vectores no proporcionales u, v. Entonces cualquier otro w del plano se puede representar como combinación lineal $w = au + bv$. Los escalares a, b son las *coordenadas* de w (respecto de la base elegida), y se suele escribir $w = (a, b)$.

Como caso particular, calculemos las coordenadas de los dos vectores de la base. Tenemos $u = 1 \cdot u + 0 \cdot v$ y $v = 0 \cdot u + 1 \cdot v$, de manera que $u = (1, 0)$ y $v = (0, 1)$. El vector 0 es $(0, 0)$.

Coordenadas en el espacio. Supongamos dada una base, que consistirá en tres vectores no coplanarios u, v, w. Cualquier otro vector t del espacio se puede representar como combinación lineal $t = au + bv + cw$. Los escalares a, b, c son las *coordenadas* de t respecto de esa base, y se suele escribir $t = (a, b, c)$.

Los vectores de la base son $u = 1 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$, $v = 0 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w$ y $w = 0 \cdot u + 0 \cdot v + 1 \cdot w$. Por tanto, $u = (1, 0, 0)$, $v = (0, 1, 0)$ y $w = (0, 0, 1)$. El vector 0 es $(0, 0, 0)$.

Operaciones con coordenadas. Las operaciones con vectores y escalares se hacen muy sencillamente utilizando coordenadas, pues basta proceder *coordenada a coordenada.* Si $w = (a, b)$ y $w' = (a', b')$ tenemos:

- *Suma:* $w + w' = (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$.
- *Producto por escalares:* $kw = k(a, b) = (ka, kb)$.
- *Combinación lineal:*
$$kw + k'w' = k(a, b) + k'(a', b') = (ka + k'a', kb + k'b').$$

De forma similar se definirían estas operaciones para vectores en el espacio, con sus tres coordenadas. En realidad, una vez introducidas las coordenadas, la distinción entre el plano y el espacio es poco significativa. Siempre podemos considerar el plano como una parte del espacio: *todo vector $u = (a, b)$ se puede representar también como $(a, b, 0)$,* y así podemos considerar que es un vector en el espacio cuya tercera coordenada es nula.

2.5 Ejemplo. Estudiar si el vector $u = (1, 2, 3)$ depende linealmente de los vectores $v = (1, 0, -1)$ y $w = (2, -1, -1)$.

Solución. El vector u depende linealmente de los otros dos si existen escalares

a, b tales que $u = av + bw$. Traduciendo esto a coordenadas, resulta que:

$$(1,2,3) = a(1,0,-1) + b(2,-1,-1) = (a+2b, -b, -a-b)$$

Igualando coordenada a coordenada, obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 1 = \ \ a + 2b, \\ 2 = \quad\ \ -b, \\ 3 = -a - b. \end{cases}$$

Y la dependencia lineal se traduce en que este sistema tenga solución a, b. Directamente resulta de la segunda ecuación que $b = -2$, luego las otras dos ecuaciones se convierten en:

$$\begin{cases} 1 = \ \ a - 4, \\ 3 = -a + 2, \end{cases}$$

es decir, $a = 5$ y $a = -1$, lo que es imposible. En consecuencia, el vector u no depende de los otros dos. ∎

En el ejemplo anterior podríamos haber discutido la compatibilidad del sistema en lenguaje matricial mediante rangos, identificando los vectores con sus coordenadas y pensando en ellas como si fuesen las columnas de una matriz. Así, como el rango es el máximo número de columnas independientes, y cada columna se identifica con las coordenadas de un vector, que a su vez se identifica con el propio vector, resulta que *el rango es el número máximo de vectores independientes.* En el ejemplo anterior, los tres vectores u, v, w se representarían mediante la matriz:

$$(u, v, w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene determinante $-6 \neq 0$, luego los tres vectores son independientes, y u no depende de v, w.

2.6 Ejemplo. Estudiar la independencia de los vectores $u = (1,1,1)$, $v = (1,-1,1)$ y $w = (3,1,3)$.

Solución. Como acabamos de explicar, formamos la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los tres vectores:

$$(u, v, w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si los vectores son independientes, el rango de esta matriz será tres, es decir, su determinante será no nulo. Pero

$$\det(u,v,w) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3+3+1+3-1-3 = 0,$$

luego los tres vectores son dependientes. (Observamos que la primera fila es igual a la tercera, luego el determinante es nulo simplemente por esto, pero no lo hemos querido resaltar antes porque las filas no representan a los vectores.) Si queremos saber si hay al menos dos vectores independientes, tendremos que averiguar si hay al menos dos columnas independientes, lo que se determina examinando los menores de orden 2. Por ejemplo, tomando las dos primeras filas de las dos primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0,$$

de modo que las dos primeras columnas, esto es los dos vectores u y v, son independientes. También podríamos haber elegido otro menor no nulo, por ejemplo las dos últimas filas de las dos últimas columnas:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3-1 = -4 \neq 0,$$

y también estas dos columnas segunda y la tercera son independientes, luego los vectores v y w son independientes. El lector comprobará del mismo modo que los vectores u y w también son independientes. Concluimos que cualquiera de los tres vectores depende linealmente de los otros dos. Solo si quisiéramos expresar esto explícitamente mediante una combinación lineal, deberíamos resolver el sistema como hicimos en el ejemplo anterior. Hagámoslo para expresar u como combinación lineal de v y w. Tenemos:

$$\begin{cases} u = (1,1,1), \\ u = av + bw = a(1,-1,1) + b(3,1,3) = (a+3b, -a+b, a+3b). \end{cases}$$

que da lugar al sistema

$$\begin{cases} 1 = a + 3b, \\ 1 = -a + b, \\ 1 = a + 3b. \end{cases}$$

Vemos que la tercera ecuación es igual a la primera, luego el sistema se reduce a las dos primeras. (Esto ya lo sabíamos de antemano, pues por ser los tres vectores dependientes, el determinante del sistema es nulo.) Dicho lo cual, sumamos las ecuaciones primera y segunda para obtener $2 = 4b$, o sea, $b = \frac{1}{2}$, y despejando a en la segunda ecuación tenemos

$$a = b - 1 = \tfrac{1}{2} - 1 = -\tfrac{1}{2}.$$

La combinación lineal buscada es:

$$u = -\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{2}w,$$

como el lector comprobará de inmediato, sustituyendo los vectores por sus coordenadas. ∎

Ejercicios

2.1. Averiguar si los vectores $(2, 1, 3)$, $(3, 2, 1)$ y $(1, 0, 0)$ son independientes, y expresar el vector $(1, 1, 3)$ como combinación lineal suya.

2.2. ¿Qué deben cumplir los escalares a, b, c para que los vectores $(1, a, a^2)$, $(1, b, b^2)$ y $(1, c, c^2)$ sean independientes?

2.3. Encontrar un escalar a tal que el vector $(a, 1, -1)$ dependa linealmente de los vectores $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$. ¿Cuántas soluciones hay? (Indicación: Expresar la dependencia lineal mediante un determinante.)

2.4. Calcular las coordenadas del vector $2u - 3v + w$ respecto de la base formada por los vectores $-u$, $v + w$ y $v - w$, siendo $u = (-1, 0, 1)$, $v = (3, 1, -1)$ y $w = (-1, 1, 0)$.(Indicación: Expresando primero los vectores u, v y w respecto de la base $-u$, $v + w$ y $v - w$ no hace falta usar las coordenadas dadas de u, v y w.)

2.5. Encontrar dos vectores independientes $u = (a, 1)$ y $v = (1, b)$ tales que las coordenadas de $(1, 3)$ respecto de la base formada por u y v sean $(-1, 2)$.

3. Bases ortonormales y productos de vectores

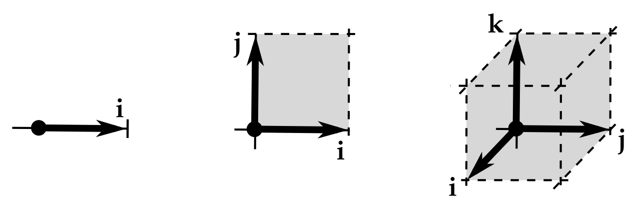
En las secciones anteriores hemos descrito algunas operaciones con vectores y escalares, pero en ningún caso hemos hablado de medida. Sí es cierto que hemos comparado vectores ($v = 3u, v = -2u$, etc.), pero no los hemos medido. Para hacerlo debemos fijar previamente una unidad. Es una vez fijada esa unidad cuando podemos calcular la distancia $\mathrm{dist}(P, Q)$ entre dos puntos P y Q (del plano o del espacio), y definir el *módulo* $|u| = \mathrm{dist}(P, Q)$ del vector $u = \overrightarrow{PQ}$. Se dice que un vector es *unitario* cuando su módulo es 1.

Según señalamos en el prólogo, además de la distancia, la otra noción específica de la geometría euclídea que la distingue de la afín es la *perpendicularidad,* y para vectores es natural decir que dos vectores son perpendiculares cuando lo son sus direcciones. Todo esto conduce al concepto siguiente:

3.1 Definición. Una base (del plano o del espacio) cuyos vectores son unitarios y perpendiculares dos a dos se llama base *ortonormal.*

Siempre que estemos interesados en las propiedades métricas del plano y del espacio, es conveniente utilizar coordenadas respecto de bases ortonormales. Utilizaremos las letras $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ para representar una base ortonormal del plano, y las letras $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ para una base ortonormal del espacio.

De lo anterior se sigue que un vector unitario determina el segmento unidad de medida de longitud, una base ortonormal del plano determina el cuadrado unidad de área, y una base ortonormal del espacio determina el cubo unidad de volumen.



Definiremos ahora, con un enfoque analítico, los tres posibles productos de vectores que juegan un papel importante en el estudio de las figuras geométricas. Fijaremos para todo lo que sigue una base ortonormal $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ del espacio, de forma que cada vector u está representado por sus coordenadas (x, y, z) respecto de dicha base. (Recordemos que como el espacio contiene al plano, no es necesario tratar este último separadamente.)

3.2 Producto escalar. Como su nombre indica, el producto escalar $\langle u, v\rangle$ de dos vectores $u = (x, y, z)$ y $v = (x', y', z')$ es un escalar, es decir, un número, que se define como sigue:

$$\langle u, v\rangle = xx' + yy' + zz'.$$