Capítulo 15

Modelos de tipos de interés instantáneo

En este capítulo, se resumen las ideas esenciales de los modelos de estructuras temporales de tipos de interés que se corresponden con **(1)** de la página IV del **Prefacio**, y se describen los modelos tratados en los volúmenes 5 y 7.

15.1. Estudio general

Se considera el siguiente escenario financiero de incertidumbre:

Sean $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}, P)$ una base estocástica, y $\widetilde{W} = \{W_t\}_{t\in J_T}$ un proceso estocástico de Wiener en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P con $\mathscr{F}_t = \left(\mathscr{F}_t^{\widetilde{W}}\right)^P$, $t \in J_T$, (véanse las páginas 24 de [97] y 23 de [89]). Se consideran los siguientes activos financieros:

(1). Un activo financiero S^0, (activo sin riesgo), tal que su precio en el tiempo t viene dado por

$$S_t^0 = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right), \tag{15.1}$$

donde $\{r(t)\}_{t\in J_T}$ es un proceso estocástico real, en el espacio medible $(\Omega, \mathscr{F})$, medible y adaptado a la filtración $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ con $\int_0^T |r(s)|ds < +\infty$, ($P$-a.s.), y la aplicación $r : J_T \times \Omega \to \mathbb{R}$, $(t, \omega) \mapsto r(t)(\omega)$, es de clase P_T respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P, (véase la **Definición 4.7.2.** de la página 97 de [89]).

(2). Los bonos cupón-cero de vencimiento menor o igual que T, (activos con riesgo). El *nominal* de un bono cupón-cero siempre es, por definición, igual a 1.

Para cada $u \leqslant T$ se toma el proceso estocástico real adaptado a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$, $\{P(t,u)\}_{t\in J_u}$, tal que $P(u,u) = 1$ y la variable aleatoria $P(t,u)$ es el precio en t del bono cupón-cero de vencimiento en u.

Se establece la siguiente condición:

(H). Existe una y sólo una probabilidad P^*, en el espacio medible $(\Omega, \mathscr{F})$, equivalente a P, tal que para todo $u \in [0, T]$, el proceso estocástico real

$$\overline{P}(t,u) = \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right) P(t,u),\ t \in J_u \tag{15.2}$$

es una martingala, (páginas 58 y 59 de [89]), en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P^*)$, respecto a la filtración $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a la probabilidad P^*, (a $\overline{P}(t,u)$ se le llama precio actualizado en t del bono cupón-cero de vencimiento u). A P^* se le llama *probabilidad martingala* o *probabilidad neutral al riesgo*, y a P *probabilidad del mundo real.*

Proposición 15.1.1. *Con las notaciones de* ***(H)****, se consideran la densidad L_T de la probabilidad P^* respecto a la probabilidad P, $dP^* = L_T dP$, y el proceso estocástico $\{L_t = E[L_T|\mathscr{F}_t]\}_{t\in J_T}$. Entonces, existe un proceso estocástico, $\tilde{\theta} = \{\theta_t\}_{t\in J_T}$, medible y adaptado a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ con $P\left[\int_0^T \theta_s^t \theta_s^2 ds < +\infty\right] = 1$, tal que para todo $t \in J_T$,*

$$L_t = \exp\left(\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right),\ (P - a.s.). \tag{15.3}$$

Además, $\widetilde{W^*} = \{W_t^*\}_{t\in J_T}$, donde $W_t^* = W_t - \int_0^t \theta_s ds$, $t \in J_T$, es un proceso estocástico de Wiener, en $(\Omega, \mathscr{F}, P^*)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P^*.

De las definiciones y notaciones anteriores, y teniendo en cuenta que $\overline{P}(u,u) = \exp\left(-\int_0^u r(s)ds\right) P(u,u) = \exp\left(-\int_0^u r(s)ds\right)$, es inmediato que

Proposición 15.1.2. *Para todo $u \in J_T$,*

$$\overline{P}(t,u) = E^*\left[\overline{P}(u,u)|\mathscr{F}_t\right] = E^*\left[\exp\left(-\int_0^u r(s)ds\right)|\mathscr{F}_t\right],\ t \in J_u. \tag{15.4}$$

En la proposición que sigue se establece una formulación equivalente de **(H)** sin utilizar los precios actualizados de los bonos cupón-cero.

Proposición 15.1.3. *En el mercado financiero descrito en las páginas 1 y 2, la condición anterior **(H)** es equivalente a la siguiente:*
(H)**. *Existe una y sólo una probabilidad P^*, en el espacio medible $(\Omega, \mathscr{F})$, equivalente a P, ([93], pág. 24), tal que para todo $u \in J_T$ y todo $t, \tau \in J_u$ con $t \leqslant \tau$, se verifica que*

$$P(t,u) = E^*\left[\exp\left(-\int_t^\tau r(s)ds\right)P(\tau,u)|\mathscr{F}_t\right]. \tag{15.5}$$

Demostración. Supuesto que se cumple la condición **(H)**, dados $u \in J_T$ y $t, \tau \in J_u$ con $t \leqslant \tau$, se tiene que

$$\begin{aligned} E^*\left[\exp\left(-\int_t^\tau r(s)ds\right)P(\tau,u)|\mathscr{F}_t\right] &= \\ = E^*\left[\exp\left(-\int_t^\tau r(s)ds\right)\exp\left(\int_0^\tau r(s)ds\right)\overline{P}(\tau,u)|\mathscr{F}_t\right] &= \\ = E^*\left[\exp\left(\int_0^t r(s)ds\right)\overline{P}(\tau,u)|\mathscr{F}_t\right] = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right)E^*\left[\overline{P}(\tau,u)|\mathscr{F}_t\right] &= \\ = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right)\overline{P}(t,u) = P(t,u), & \end{aligned} \tag{15.6}$$

donde se ha utilizado la definición de $\overline{P}(s,u)$, que $\{\overline{P}(s,u)\}_{s\in J_u}$ es una martingala, que $\int_0^t r(s)ds$ es $\mathscr{F}_t$-medible, y la propiedad **(11)** de la página 221 de [97] de la esperanza matemática condicionada.

El recíproco se prueba de forma totalmente análoga. □

Observación 1. Como $P(u,u) = 1$, de la proposición anterior se deduce que en el mercado financiero descrito en las páginas 1 y 2, se verifica que

$$P(t,u) = E^*\left[\exp\left(-\int_t^u r(s)ds\right)|\mathscr{F}_t\right], \; u \in J_T. \tag{15.7}$$

En lo que sigue, se consideran los denominados modelos de tipos de interés instantáneos de difusión, es decir, los obtenidos especificando el proceso estocástico $\{r(t)\}_{t\in J_T}$ como un proceso de difusión, (**Definición 10.1.6.**

de la página 5 de [93]), solución única de una ecuación diferencial estocástica de la forma

$$dr(t) = \beta(t, r(t))dt + \gamma(t, r(t))dW_t^*, \ r(0) = r_0, \tag{15.8}$$

verificando las hipótesis del **Teorema 10.1.4.** de la página 4 de [93] y con β y γ funciones continuas en la variable t, considerando la base estocástica $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}, P^*)$, donde P^* es probabilidad martingala y $\widetilde{W^*} = \{W_t^*\}_{t\in J_T}$ es el proceso estocástico de Wiener de la **Proposición 15.1.1.**.

Por el **Teorema 10.1.5.** de la página 4 de [93], se tiene que el proceso estocástico $\{r(t)\}_{t\in J_T}$ definido por la ecuación (15.8) es un proceso estocástico de Markov continuo en el intervalo J_T respecto a la filtración $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_t}$ y a la probabilidad P^*.

15.1.1. Precio del bono cupón-cero

En las páginas 110-113 de [93] se ha demostrado el siguiente teorema

Teorema 15.1.4. *Se supone que el proceso estocástico $\{r(t)\}_{t\in J_T}$ está dado por la ecuación (15.8). Entonces, $P(t,u) = E^*\left[\exp\left(-\int_t^u r(s)ds\right)|\mathscr{F}_t\right] = g(t, r(t), u)$, donde la función $g(t,x,u)$ es la solución de la ecuación diferencial en derivadas parciales con condición final*

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial g(t,x,u)}{\partial t} + \beta(t,x)\tfrac{\partial g(t,x,u)}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\gamma^2(t,x)\tfrac{\partial^2 g(t,x,u)}{\partial x^2} = xg(t,x,u) \\ &g(u,x,u) = 1, \ \textit{para todo } x. \end{aligned} \tag{15.9}$$

Además, en el caso particular en que $\gamma(t, r(t))$ es una función determinista en la variable t, $\gamma(t)$, $g(t,x,u)$ se obtiene mediante la integral de caminos de Feynman, (véase [93]), por la siguiente fórmula

$$\begin{aligned} &g(t,x,u) = \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{\alpha(t)=x}^{\alpha(u)=y}\exp\left(-\int_t^u\left(\frac{(\dot\alpha(s)-\beta(s,\alpha(s)))^2}{2\gamma^2(s)} + \alpha(s)\right)ds\right)D\alpha\right)dy}{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{\alpha(t)=x}^{\alpha(u)=y}\exp\left(-\int_t^u\left(\frac{(\dot\alpha(s)-\beta(s,\alpha(s)))^2}{2\gamma^2(s)}\right)ds\right)D\alpha\right)dy}\left(=\frac{X}{Y}\right). \end{aligned} \tag{15.10}$$

15.1.2. Precio de opción independiente del camino sobre un bono cupón-cero

Se recuerdan las definiciones y resultados establecidos en las páginas 115 y 116 de [93] adaptadas a un bono cupón-cero con fecha de vencimiento $u \in J_T$,

Definición 15.1.5. *Con las notaciones anteriores, sea $\tau \in J_u$. Una opción independiente del camino con fecha de vencimiento τ sobre el bono cupón-cero de vencimiento u, $\{P(t,u)\}_{t\in J_u}$, es una variable aleatoria h, en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}_t, P^*)$, dada por $h = \mu(P(\tau,u)) = \mu(g(\tau, r(\tau), u))$, donde μ es una aplicación medible de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.*

Casos particulares de opciones independientes del camino con fecha de vencimiento $\tau \in J_u$ sobre el bono cupón-cero de vencimiento u son, (K constante real positiva):

(1). $h = \text{máx}\{P(\tau,u) - K, 0\} = \text{máx}\{g(\tau, r(\tau)) - K, 0\}$, en cuyo caso se llama *call* europeo, ($\mu(x) = \text{máx}\{x - K, 0\}$, $x \in \mathbb{R}$).

(2). $h = \text{máx}\{K - P(\tau,u), 0\} = \text{máx}\{K - g(\tau, r(\tau)), 0\}$, en cuyo caso se llama *put* europeo, ($\mu(x) = \text{máx}\{K - x, 0\}$, $x \in \mathbb{R}$).

Se tiene el siguiente teorema,

Teorema 15.1.6. *Se supone que $\{r(t)\}_{t\in J_T}$ está dado por la ecuación diferencial estocástica (15.8), y que $h = \mu(P(\tau,u))$ es una opción independiente del camino con fecha de vencimiento τ sobre el bono cupón-cero con vencimiento u. Entonces,*

1. *El valor, V_t, de h en el instante $t \in [0,\tau]$ está dado por*

$$V_t = E^* \left[\exp\left(-\int_t^\tau r(s)ds \right) \mu(P(\tau,u)) | \mathscr{F}_t \right]. \tag{15.11}$$

2. *Si $g(t,x,u)$ es la solución de la ecuación diferencial (15.9), se verifica que $V_t = e(t, r(t), u)$, donde $e(t,x,u)$ es la solución de la ecuación diferencial en derivadas parciales*

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial e(t,x,u)}{\partial t} + \beta(t,x)\tfrac{\partial e(t,x,u)}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\gamma^2(t,x)\tfrac{\partial^2 e(t,x,u)}{\partial x^2} = xe(t,x,u), \\ &e(\tau,x,u) = \mu(g(\tau,x,u)), \text{ para todo } x. \end{aligned} \tag{15.12}$$

3. *En el caso particular que la función $\gamma(t, r(t))$ sea una función determinista $\gamma(t)$, la función $e(t, x, u)$ está dada por la integral de caminos de Feynman*

$$e(t,x,u) = \\ = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{\alpha(t)=x}^{\alpha(\tau)=y}\exp\left(-\int_t^\tau\left(\frac{(\dot{\alpha}(s)-\beta(s,\alpha(s)))^2}{2\xi^2(s)\eta^2(s)}+\alpha(s)\right)ds\right)D\alpha\right)\mu(g(\tau,y))dy}{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{\alpha(t)=x}^{\alpha(\tau)=y}\exp\left(-\int_t^\tau\left(\frac{(\dot{\alpha}(s)-\beta(s,\alpha(s)))^2}{2\xi^2(s)\eta^2(s)}\right)ds\right)D\alpha\right)dy} \\ \left(=\frac{\overline{X}}{\overline{Y}}\right). \tag{15.13}$$

15.2. Modelos particulares

Existe una gran cantidad de modelos de tipos de interés instantáneo. En los volúmenes 5 y 7 se han estudiado algunos ellos y se resumen en primer lugar los denominados afines.

15.2.1. Modelos afines

Entre los modelos de tipos de interés instantáneo en los que se tienen fórmulas explícitas para el precio de los bonos cupón-cero destacan los denominados afines, en los cuales el precio en el tiempo t del bono-cupón-cero de vencimiento u está dado por una expresión de la forma

$$P(t,u) = \exp(-A(t,u) - B(t,u)r(t)),\ t \in J_u,\ u \in J_T, \tag{15.14}$$

con $A(t,u)$ y $B(t.u)$ funciones diferenciables y con derivadas parciales respecto de la variable t continuas.

Estos modelos de tipos de interés instantáneo están caracterizados por el siguiente resultado.

Proposición 15.2.1. *Se considera el modelo de tipo de interés instantáneo dado por*

$$dr(t) = \beta(t,r(t))dt + \gamma(t,r(t))dW_t^*,\ r(0) = r_0. \tag{15.15}$$

Entonces, este modelo es modelo afín si y solo si se cumplen las condiciones

$$\beta(t,r(t)) = a(t)+b(t)r(t),\ \ \gamma^2(t,r(t)) = c(t)+d(t)r(t), \tag{15.16}$$

donde a, b, c y d son funciones continuas.

En este caso, las funciones A y B verifican el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, para todo $t \in J_u$,

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial A(t,u)}{\partial t} = \frac{1}{2}c(t)B^2(t,u) - a(t)B(t,u), & A(u,u)=0 \\ \frac{\partial B(t,u)}{\partial t} = \frac{1}{2}d(t)B^2(t,u) - b(t)B(t,u) - 1, & B(u,u)=0. \end{array} \tag{15.17}$$

Para una demostración de esta proposición véase el **Apéndice A** y la **Proposition 5.2** de la página 84 de [45].

Ejemplos

(1). Modelo de Merton: El proceso estocástico $\tilde{r} = \{r(t)\}_{t\in J_T}$ verifica la ecuación diferencial estocástica

$$dr(t) = \mu dt + \sigma dW_t^*,\ \ r(0) = r_0, \tag{15.18}$$

donde μ y σ son constantes reales, es decir, $\tilde{r}$ es un proceso estocástico de Itô respecto a $\widetilde{W^*}$, ([93] pág 116).

Este modelo cumple las condiciones de (15.16) con $b(t) = d(t) = 0$, $a(t) = \mu$ y $c(t) = \sigma^2$, y por tanto, es un modelo afín. Efectivamente, en la página 119 de [93] se ha obtenido

$$P(t,u) = \exp\left(-\left(\frac{\mu}{2}(u-t)^2 - \frac{\sigma^2}{6}(u-t)^3\right) - (u-t)r(t)\right). \tag{15.19}$$

La expresión (15.19) también se puede obtener mediante la **Proposición 15.2.1.**. En este caso se tiene que el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (15.17) es

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial A(t,u)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 B(t,u)^2 - \mu B(t,u), & A(u,u)=0, \\ \frac{\partial B(t,u)}{\partial t} = -1, & B(u,u)=0. \end{array} \tag{15.20}$$

Es claro que la solución de la segunda ecuación de (15.20) es $B(t,u) = u-t$. Por tanto, la primera ecuación es,

$$\frac{\partial A(t,u)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2(u-t)^2 - \mu(u-t),\ \ A(u,u)=0, \tag{15.21}$$

con solución $A(t,u) = -\frac{1}{6}\sigma^2(u-t)^3 + \frac{\mu}{2}(u-t)^2$.

De estos cálculos se concluye que $P(t,u) = (-A(t,u) - B(t,u)r(t))$ coincide con (15.19).

(2). Modelo de Vasiček: El proceso estocástico $\tilde{r} = \{r(t)\}_{t\in J_T}$ verifica la ecuación diferencial estocástica

$$dr(t) = (\mu + \nu r(t))dt + \sigma dW_t^*, \ \ r(0) = r_0, \tag{15.22}$$

donde r_0, μ, ν y σ son constantes reales no nulas, es decir, $\tilde{r}$ es un proceso estocástico de Itô respecto a $\widetilde{W^*}$, ([91] pág. 35, [93] pág.120).

Se comprueba fácilmente que este modelo cumple las condiciones de (15.16). Así, es un modelo afín y en la página 126 de [93] se ha obtenido

$$\begin{aligned} P(t,u) = \exp\Bigg(-\Bigg(\left(-\frac{\mu}{\nu} - \frac{\sigma^2}{2\nu^2}\right)(u-t) - \frac{\sigma^2}{4\nu}\left(\frac{\exp(\nu(u-t))-1}{\nu}\right)^2 - \\ - \left(-\frac{\mu}{\nu} - \frac{\sigma^2}{2\nu^2}\right)\frac{\exp(\nu(u-t))-1}{\nu}\Bigg) - \frac{\exp(\nu(u-t))-1}{\nu} r(t)\Bigg). \end{aligned} \tag{15.23}$$

(3). Modelo de Ho-Lee: El proceso estocástico $\tilde{r} = \{r(t)\}_{t\in J_T}$ verifica la ecuación diferencial estocástica

$$dr(t) = \theta(t)dt + \sigma dW_t^*, \ \ r(0) = r_0, \tag{15.24}$$

donde $\theta(t)$ es una función determinista continua y r_0, σ son constantes reales positivas, es decir, $\tilde{r}$ es un proceso estocástico de Itô respecto a $\widetilde{W^*}$, ([91] pág. 68, [93] pág 127). Este modelo cumple las condiciones (15.16), y por tanto, es un modelo afín.

En la página 130 de [93] se ha obtenido

$$P(t,u) = \exp\left(-\left(\int_t^u (u-s)\theta(s)ds - \frac{\sigma^2}{6}(u-t)^3\right) - (u-t)r(t)\right). \tag{15.25}$$

(4). Modelo de Hull-White o modelo de Vasiček generalizado: El proceso estocástico, $\tilde{r} = \{r(t)\}_{t\in J_T}$, verifica la ecuación diferencial estocástica

$$dr(t) = (\theta(t) - kr(t))dt + \sigma dW_t^*, \ r(0) = r_0, \tag{15.26}$$

donde, $k > 0$, $\sigma > 0$, y $\theta(t)$ es función determinista continua, (véase [65]). Este modelo cumple (15.16), y por consiguiente, es un modelo afín.

En la fórmula (6.80) de la página 61 de [91] se ha obtenido $P(t,u) = \exp(-A(t,u) - B(t,u)r(t))$ donde $A(t,u)$ y $B(t,u)$ están dadas por (6.68) y (6.67), respectivamente, de la página 59 del citado libro, (véase la página 44 del presente libro).

(5). Modelo de Hull-White generalizado: El proceso estocástico que se considera, $\tilde{r} = \{r(t)\}_{t\in J_T}$, verifica la ecuación diferencial estocástica

$$dr(t) = (a(t) - b(t)r(t))dt + \sigma(t)dW_t^*, \;\; r(0) = r_0, \tag{15.27}$$

donde $a(t)$, $b(t)$ y $\sigma(t)$ son funciones deterministas continuas, es decir, $\tilde{r}$ es un proceso estocástico de Itô respecto a $\widetilde{W^*}$, ([91] pág. 52, [93] pág 130).

Este modelo también es afín y en las páginas 52-61 de [91] se ha demostrado con detalle que $P(t,u) = (-A(t,u) - B(t,u)r(t))$, donde

$$\begin{aligned}
&B(t,u) = \int_t^u \exp\left(-\int_0^v b(z)dz + \int_0^t b(z)dz\right) dv,\\
&A(t,u) = \int_t^u \left(\int_t^v a(s)\exp\left(\int_0^s b(z)dz - \int_0^v b(z)dz\right) ds\right) dv -\\
&-\int_t^u \left(\int_t^v \left[\int_t^s \sigma(y)^2 \exp\left(-\int_0^s b(z)dz - \int_0^v b(z)dz + 2\int_0^y b(z)dz\right) dy\right] ds\right) dv.
\end{aligned} \tag{15.28}$$

(6). Modelo de Cox-Ingersol-Ross: El proceso estocástico $\tilde{r} = \{r(t)\}_{t\in J_T}$ verifica la ecuación diferencial estocástica

$$dr(t) = (a - b^* r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t^*, \;\; r(0) = r_0, \tag{15.29}$$

donde r_0, a y σ son constantes reales no negativas y $b^* \in \mathbb{R}$, es decir, $\tilde{r}$ es un proceso estocástico de Itô respecto a $\widetilde{W^*}$, ([91] pág. 70). Por la **Proposición 15.2.1.**, pág. 6, es un modelo afín, y por (6.110) de la página 75 de [91], $P(t,u) = \exp(-a\phi(u-t) - \psi(u-t)r(t))$, donde las funciones ϕ y ψ están definidas en la página 74 del citado libro.

Se observa que en este modelo la segunda ecuación de (15.17) es

$$\frac{\partial B(t,u)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t,u) + b^* B(t,u) - 1, \; B(u,u) = 0, \tag{15.30}$$

que es una ecuación diferencial de Riccati que, en general, no tiene solución como se ha comentado en las páginas 134 y 135 de [93]. Sin embargo, en este caso sí existe solución y es la función $\psi(t-u)$ citada anteriormente,

$$B(t,u) = \psi(t-u) = \frac{2(\exp(\gamma(u-t)) - 1)}{(b^* + \gamma)(\exp(\gamma(u-t)) - 1) + 2\gamma}, \tag{15.31}$$

donde $\gamma = \sqrt{(b^*)^2 + 2\sigma^2}$.

A partir de la expresión de $B(t,u)$ dada por (15.31), mediante la primera ecuación de (15.17) se obtiene la expresión de $A(t,u) = a\phi(u-t)$, donde

$$\phi(u-t) = -\frac{2}{\sigma^2}\ln\left(\frac{2\gamma\exp\left(\frac{(\gamma+b^*)(u-t)}{2}\right)}{\gamma - b^* + (\gamma+b^*)\exp(\gamma(u-t))}\right). \tag{15.32}$$

15.2.2. Modelos no afines

(7). Modelo de Dothan: El proceso estocástico $\tilde{r} = \{r(t)\}_{t\in J_T}$ verifica la ecuación diferencial estocástica

$$dr(t) = \lambda\sigma r(t)dt + \sigma r(t)dW_t^*, \;\; r(0) = r_0, \tag{15.33}$$

donde r_0 y σ son constantes reales positivas, y $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir, $\tilde{r}$ es un proceso estocástico de Itô respecto a $\widetilde{W^*}$, ([91] páginas 93-94). Por la **Proposición 15.2.1.**, pág. 6, este modelo no es afín, ya que $\gamma^2(t, r(t)) = \sigma^2 r^2(t)$.

Por el **Teorema 4.9.10.** de la página 162 de [89], la solución de la ecuación diferencial estocástica (15.33) es el movimiento Browniano geométrico

$$r(t) = r_0 \exp\left(\left(\lambda\sigma - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t^*\right), \;\; t \in J_T. \tag{15.34}$$

En este caso, como se dice en la **Proposición 6.12.1.** de la página 97 de [91], el precio $P(t,u)$ del bono cupón-cero está dado por

$$P(t,u) = \exp\left(\frac{-\sigma^2\left(1-2\frac{\lambda}{\sigma}\right)^2(u-t)}{8}\right)\cdot$$
$$\cdot\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\exp\left(-vr(t) - \frac{2(1+z^2)}{\sigma^2 v}\right)\theta\left(\frac{4z}{\sigma^2 v}, \frac{\sigma^2(u-t)}{4}\right)\frac{dv}{v}\frac{dz}{z^{2(1-\lambda/\sigma)}}, \tag{15.35}$$

donde, para todo $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

$$\theta(\alpha,\beta) = \frac{\alpha\exp\left(\frac{\pi^2}{2\beta}\right)}{\sqrt{2\pi^3\beta}}\int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{y^2}{2\beta} - \alpha\cosh(y)\right)\operatorname{senh}(y)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{\beta}\right)dy. \tag{15.36}$$