Capítulo 1

Nociones de lógica

Al utilizar un lenguaje natural podemos comunicarnos con otras personas mediante expresiones constituidas por palabras, que son agrupadas adecuadamente para construir el mensaje que se desea comunicar. Cada expresión debe estar construida de acuerdo a las reglas sintácticas del lenguaje. Esto es necesario para que la información correspondiente a cada expresión pueda ser entendida por un receptor.

Sin duda, una expresión debe ser correcta sintácticamente para facilitar su comprensión. Una expresión como *eléctrica ordenador el máquina es una* no es sintácticamente correcta y puede ocurrir que no se entienda lo que significa. Una nueva ordenación de esas palabras determina la expresión *el ordenador es una máquina eléctrica*, que es sintácticamente correcta y no hay dificultad para entenderla.

A la hora de comunicarnos, además de la sintaxis de lo escrito, se debe tener en cuenta la componente semántica, es decir, el significado. Sería deseable que nos encontráramos con que cada expresión tuviera un único significado a la hora de aprender un nuevo lenguaje pero esto no es así. Se puede comprobar en todos los lenguajes naturales la existencia de expresiones cuyo significado varía en función del contexto. Si el valor semántico de una expresión fuese único, entonces la expresión podría ser calificada de verdadera, falsa, ni verdadera ni falsa, o de cualquier otra forma, con independencia del contexto.

En el lenguaje natural que empleamos en Matemáticas, existen expresiones que poseen significados distintos dependiendo del contexto donde se ubican, por ejemplo, $a + b$ representa la suma de dos elementos pero no es lo mismo sumar números que sumar matrices. El lector debe estar atento al marco contextual para entender el significado de cada expresión contenida en este libro. Si en todas las expresiones que se escriben en Matemáticas, se añade explícitamente el contexto donde la expresión tiene sentido, puede ocurrir que el contenido esencialmente interesante sea difícil de

recordar: puede ocurrir que la información relevante quede oculta por la información relativa al contexto. Un ejemplo es la expresión $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ dentro de algún marco de estructuras algebraicas donde el producto es conmutativo, es un caso donde el contexto no hace falta describirlo explícitamente de forma completa, desde los elementos a las leyes de composición y la descripción de todas sus propiedades.

En este capítulo estudiamos las expresiones sintácticamente correctas de las que no hay duda sobre su significado y que pueden ser catalogadas de verdaderas o de falsas con certeza absoluta. Esencialmente, se tratan expresiones de las cuales tan sólo interesa su valor de verdad. Únicamente se otorgan dos posibles significados semánticos; verdadero y falso. Por ejemplo, *La vaca es un animal* es una expresión sintácticamente correcta de valor semántico *verdadero*. También la expresión *Una piedra es un animal* es sintácticamente correcta pero su valor semántico es *falso*.

Tradicionalmente, la pareja de valores semánticos (*Verdad, Falso*) se suele representar con los símbolos (V, F) en la lógica tradicional en español, con los símbolos (T, F) en la lógica tradicional en inglés y con los símbolos (1, 0) en Matemáticas y en Computación.

A la hora de leer este capítulo suponemos que el lector posee suficiente dominio de los significados de palabras y frases del idioma español. Se usa el lenguaje natural, que no está libre de expresiones ambiguas, para introducir con la menor ambigüedad posible los elementos básicos de lógica, el vocabulario, los símbolos y las reglas elementales de uso.

1.1. Expresiones matemáticas: Proposiciones

El lenguaje empleado en Matemáticas sirve para hacer referencia a características o propiedades de los objetos tratados, y se utiliza construyendo sentencias sintácticamente correctas para describir esas características.

Ejemplos de algunas expresiones sencillas en Matemáticas son: *El número natural cuatro es un número par*, *El número natural elegido es un número par* o *El número natural elegido en primer lugar es menor que el número natural elegido en segundo lugar*. Coloquialmente, éstas se expresan de una forma reducida como: *El cuatro es par*, *El número natural elegido es par* o *El primer número natural es menor que el segundo*.

De la primera expresión simple anterior, *El cuatro es par*, podemos decir que describe una propiedad del número cuatro, es decir, es una sentencia verdadera. De esta expresión se dice que es una proposición lógica, y para hacer referencia a dicha expresión se suele utilizar una simple letra minúscula, por ejemplo p , y para hacer referencia a su valor semántico se escribe $p = 1$, o simplemente se dice que la proposición p es verdadera.

- **Proposición lógica simple** Una proposición simple describe una propiedad de un objeto concreto y se le puede atribuir sin ambigüedad el valor de verdadero o falso.

Como ya hemos dicho, para hacer referencia sintáctica a una proposición simple, se suele emplear una letra minúscula, por ejemplo $p, q, r, s, \dots$. Cada letra (proposición) posee un único valor semántico, verdadero o falso, que se expresa igualando la letra a 1 o a 0.

Ejemplo 1.1 Las expresiones: *Esta frase es una proposición*, *El Sol es una estrella*, *La hipotenusa es el mayor de los tres lados de un triángulo rectángulo* y *2 es un número primo* son proposiciones simples que tienen el valor verdad.

Las expresiones, *9 es el cubo de 3*, *La función derivada de la función $f(x) = x^2$ es la función nula* y *La Luna es un planeta* son proposiciones simples que son falsas.

También son proposiciones simples las sentencias siguientes: *Está lloviendo* y *No entiendo lo que es una proposición*, pero en estos casos el valor que toma la proposición lo asigna el lector en el momento de la lectura.

Al disponer de una colección de expresiones sencillas o simples como las anteriores, se pueden construir expresiones compuestas, combinando esas expresiones simples mediante palabras de conexión propias del lenguaje, como pueden ser las conjunciones y otras más. Por ejemplo, al combinar la conjunción copulativa *y* con las expresiones *Doce es divisible por dos*, *Doce es divisible por tres*, se puede construir la expresión compuesta *Doce es divisible por dos y por tres*. De esta forma, se incrementa la colección de expresiones disponibles, que a su vez pueden volverse a combinar. Con proposiciones simples se construyen **proposiciones compuestas**. Por ejemplo, la expresión condicional *Si llueve el suelo se moja*, es una proposición compuesta por las proposiciones simples *Llueve* y *El suelo se moja*.

Tanto si las proposiciones son simples como si son compuestas, nos referiremos a ellas empleando únicamente la palabra “proposición”.

Ejemplo 1.2 La expresión *El número natural elegido es un número par*, que describe la propiedad “ser número par”, no es una proposición: el número aludido es desconocido, y puede ser cualquier número de toda una familia de números. Esto impide atribuir claramente el valor semántico, puesto que hay números para los cuales la expresión es verdadera y números para los que es falsa. Este tipo de expresiones son denominadas predicados lógicos y son introducidos en el capítulo 2.

La expresión *El número natural elegido en primer lugar es menor que el número natural elegido en segundo lugar*, que describe la propiedad “ser menor que”, tampoco es una proposición. De nuevo el motivo de no considerarla proposición es que los números aludidos son desconocidos y pueden ser cualquier número de toda una

familia de números. No se puede atribuir claramente el valor semántico, puesto que hay números para los cuales la expresión es verdadera y números para los que es falsa. Este tipo de expresiones son denominadas relaciones lógicas, o predicados de dos argumentos, y también serán introducidas en el capítulo 2.

Marco lógico Cualquier estudiante que intenta aprender un nuevo idioma es consciente de que debe aprender una colección grande de palabras, unas reglas sintácticas para combinar esas palabras en frases y los significados tanto de las palabras como de las frases. De forma análoga, a como se intenta aprender un lenguaje, se debe aprender lógica, es decir, se deben conocer las “palabras empleadas”, las reglas de combinarlas, y los significados de éstas y de las posibles combinaciones.

- **Lógica proposicional**

Las “palabras básicas” son las proposiciones y los valores de las proposiciones son sólo dos: verdadero o falso. Todas las reglas sintácticas para combinar proposiciones utilizan la negación de una proposición, la conjunción y disyunción de dos proposiciones, el condicional de una proposición respecto a otra y el bicondicional de dos proposiciones.

Al escribir una proposición, se escribe una letra minúscula, o una combinación de letras minúsculas conectadas con determinados símbolos que se denominan **conectores lógicos** que corresponden a la forma de combinar proposiciones.

1.2. Conectores lógicos básicos

A continuación se presentan los elementos conectores de proposiciones en el marco de la lógica proposicional.

Negación

Dada la proposición p , *El cuatro es un número par*, la negación de esta proposición es la proposición *El cuatro no es un número par*, y se representa con alguna de las notaciones siguientes: $\neg p$, $\bar{p}$ y p' .

En este caso p toma el valor 1 (verdad), mientras que $\neg p$ toma el valor 0.

En general, la **negación de una proposición** p es otra proposición $\neg p$ que es cierta si p es falsa, y falsa si p es cierta. La tabla 1.1 indica el valor de la proposición $\neg p$ en función del valor de la proposición p .

Disyunción

Dadas las proposiciones p , *El cuatro es un número par*, y q , *El cuatro es un número impar*, la proposición disyunción de p y q , “ p o q ”, es la proposición *El cuatro es*

p	$\neg p$
0	1
1	0

Tabla 1.1: Tabla de verdad de $\neg p$

un número par o un número impar, y se representa con alguna de las notaciones siguientes: $p \vee q$, $p + q$ y $p \cup q$.

En este caso p toma el valor 1 (verdad), q toma el valor 0 (falso) y a $p \vee q$ se le asigna el valor 1.

En general, la **proposición disyunción** $p \vee q$ es verdadera si alguna de las dos proposiciones es verdadera. La tabla 1.2 recoge los valores que toma la proposición $p \vee q$ en relación a los valores tomados por p y q .

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabla 1.2: Tabla de verdad de $p \vee q$

Observación La proposición $p \vee q$ es falsa únicamente si p y q son falsas.

En lenguaje natural, la disyunción “o” tiene un doble significado que usualmente se deduce por el contexto. Por ejemplo en las frases, *El medicamento está indicado para el dolor de cabeza o la fiebre* y *Compraré el regalo hoy o mañana*, el significado de la palabra “o” es diferente. En la primera frase se indica que se debe tomar el medicamento si se cumple al menos uno de los dos prerequisites “tener dolor de cabeza” o “tener fiebre”, pudiendo tener ambas cosas. En la segunda frase parece que el “o” es excluyente, en el sentido de que si compro el regalo hoy, ya no lo compro mañana. El significado del conector disyunción $\vee$ está en la línea de la primera frase.

Conjunción

Dadas las proposiciones p , *El cuatro es un número par*, y q , *El nueve es un número impar*, la **proposición conjunción** de p y q , “ p y q ”, es la proposición *El cuatro es un número par y el nueve es un número impar*, y se representa con alguna de las escrituras siguientes: $p \wedge q$, $p \times q$ y $p \cap q$.

En este caso p toma el valor 1 (verdad), q toma el valor 1 (verdad) y $p \wedge q$ toma el valor 1.

En general, la proposición conjunción $p \wedge q$ es falsa si alguna de las dos proposiciones es falsa. La tabla 1.3 presenta los valores que toma la proposición $p \wedge q$ en relación a los valores tomados por p y q .

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabla 1.3: Tabla de verdad de $p \wedge q$

Observación La proposición $p \wedge q$ es verdadera sólo si p y q son verdaderas.

Condicional

Dadas las proposiciones p , *Ocho es un número par*, y q , *Ocho es suma de dos números iguales*, la proposición condicional “si p entonces q ”, es la proposición *Si ocho es un número par, entonces ocho es suma de dos números iguales*, y se representa con alguna de las notaciones siguientes: $p \rightarrow q$ o $p \Rightarrow q$.

En este caso p toma el valor 1 (verdad), q toma el valor 1 (verdad) y a $p \rightarrow q$ se le asigna el valor 1.

La tabla 1.4 recoge los valores que toma la **proposición condicional** $p \rightarrow q$ en relación a los valores tomados por las proposiciones p y q .

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Tabla 1.4: Tabla de verdad de $p \rightarrow q$

De la proposición $p \rightarrow q$ se suele decir que la primera proposición p es la proposición antecedente y que la segunda q es la proposición consecuente. Además, si la primera proposición es falsa, entonces la proposición condicional es verdadera. Esto suele indicarse coloquialmente diciendo que de un antecedente falso se deduce cualquier cosa o que una proposición falsa implica cualquier otra.

Observación La proposición $p \rightarrow q$ es falsa únicamente si p es verdadera y q es falsa.

Bicondicional

Dadas las proposiciones p , *Ocho es un número par*, y q , *Ocho es divisible por dos*, la proposición “ p si y sólo si q ”, es la proposición *Ocho es un número par si y sólo si ocho es divisible por dos*, y se representa con alguna de las escrituras siguientes: $p \leftrightarrow q$ y $p \Leftrightarrow q$.

En este caso p toma el valor 1 (verdad), q toma el valor 1 (verdad) y a $p \leftrightarrow q$ se le asigna el valor 1.

La tabla 1.5 recoge los valores que toma la **proposición bicondicional** $p \leftrightarrow q$ en relación a los valores tomados por las proposiciones p y q .

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabla 1.5: Tabla de verdad de $p \leftrightarrow q$

Si se elige cualquier par de proposiciones falsas, entonces la proposición bicondicional entre ellas siempre es verdadera.

Observación La proposición $p \leftrightarrow q$ es verdadera sólo si p y q toman el mismo valor.

Ejemplo 1.3 Dentro del contexto matemático podemos encontrar proposiciones con los conectores anteriores:

La función $f(x) = 1/x$ no está definida para $x = 0$. Se trata de una proposición negación verdadera $\neg p$, donde la proposición p es *La función $f(x) = 1/x$ está definida para $x = 0$* .

El punto $(1, 1)$ está contenido en la región del plano $x^2 + y^2 \leq 4$. Se puede ver como una proposición disyunción verdadera $p \vee q$ donde la proposición p es *El punto $(1, 1)$ está contenido en la región del plano $x^2 + y^2 < 4$* , que es verdadera, y la proposición q es *El punto $(1, 1)$ está contenido en la región del plano $x^2 + y^2 = 4$* , que es falsa.

La función $f(x) = x^2$ es continua en $[0, 1]$ y derivable en $(0, 1)$. Se puede ver como una proposición conjunción verdadera $p \wedge q$. La proposición p es *La función $f(x) = x^2$ es continua en $[0, 1]$* , que es verdadera, y la proposición q es *La función $f(x) = x^2$ es derivable en $(0, 1)$* que es verdadera igualmente.

Comentario En contexto matemático, usualmente sólo se escriben proposiciones que sean verdaderas. En particular, en los enunciados de tipo condicional, la proposición $p \rightarrow q$ tiene usualmente el sentido de “la proposición $p \rightarrow q$ es verdadera”. Para distinguir un sentido del otro, usaremos el símbolo $\implies$ en este último caso. Es decir, la notación $p \implies q$, que se lee “ p implica q ”, se usará exclusivamente para indicar que la proposición $p \rightarrow q$ es verdadera.

$p \implies q$ significa que la proposición $p \rightarrow q$ es verdadera.

Cuando se conoce una implicación concreta, tan sólo hay que estudiar si el antecedente es verdadero para concluir que el consecuente es verdadero, o que el consecuente es falso para concluir la falsedad del antecedente.

La base del conocimiento matemático contiene numerosos enunciados proposicionales de tipo bicondicional $p \leftrightarrow q$ que son verdaderos. Análogamente al condicional, el bicondicional $p \leftrightarrow q$ se usa en matemáticas en el sentido de “la proposición $p \leftrightarrow q$ es verdadera. Para distinguir una de la otra, usaremos el símbolo $\iff$ en este caso. Es decir, la notación $p \iff q$, que se lee “ p es equivalente a q ” se usará exclusivamente para indicar que la proposición $p \leftrightarrow q$ es verdadera.

$p \iff q$ significa que la proposición $p \leftrightarrow q$ es verdadera.

Cuando se conoce la verdad del bicondicional de dos proposiciones, tan sólo hay que estudiar si alguna de las proposiciones es verdadera, respectivamente falsa, para concluir que la otra también es verdadera, respectivamente falsa.

Otras formas frecuentes de expresar esta equivalencia entre proposiciones en la literatura matemática son: p si y sólo si q , que se resume en la expresión “ p sii q ”, “ p iff q ”, según se trate de literatura en español o en inglés.

Teniendo en cuenta la observación anterior se establece:

Dos proposiciones p y q son **equivalentes** si p y q toman el mismo valor.

Ejemplo 1.4

Dentro del contexto matemático podemos encontrar proposiciones con conectores condicionales como:

Al ser $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$ una función derivable en $\mathbb{R}$, entonces $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$. Se trata de una proposición condicional verdadera $p \rightarrow q$ donde la proposición p es *La función $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$ es una función derivable en $\mathbb{R}$* , que es verdadera,

y la proposición q es *La función $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$ es una función continua en $\mathbb{R}$* , que es igualmente verdadera.

En este caso decimos que la derivabilidad de la función $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$ en $\mathbb{R}$ implica la continuidad de ésta en todo $\mathbb{R}$.

La dimensión de $\mathbb{R}^2$ es dos si y sólo si el conjunto $\{(1,0), (0,1)\}$ constituye una base de $\mathbb{R}^2$. Se trata de una proposición bicondicional verdadera, $p \leftrightarrow q$ donde la proposición p es *La dimensión de $\mathbb{R}^2$ es dos*, que es verdadera, y la proposición q es *El conjunto $\{(1,0), (0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$* , que también es verdadera.

A la proposición condicional $p \rightarrow q$ se le asocian tres nuevas proposiciones condicionales:

El condicional $q \rightarrow p$ se denomina **condicional recíproco**.

El condicional $\neg p \rightarrow \neg q$ se denomina **condicional contrario**.

El condicional $\neg q \rightarrow \neg p$ se denomina **condicional contrarrecíproco**.

Conectores que actúan sobre una proposición

¿Cuántos conectores que actúen sobre una única proposición pueden ser definidos?

Hay tantos conectores como posibles tablas de verdad distintas se pueden construir con una única proposición p . Véanse en la tabla 1.6 todas estas tablas, y los correspondientes conectores que hemos representado con los símbolos C_0 , C_1 , C_2 y C_3 , que se corresponden con las expresiones de los números del cero al tres en notación binaria; 00, 01, 10, 11.

p	C_0p	C_1p	C_2p	C_3p
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Tabla 1.6: Tablas de verdad posibles con p

La conectiva C_1 es el conector identidad, $C_1p \iff p$, mientras que la conectiva C_2 es simplemente la conectiva negación, es decir, $C_2p \iff \neg p$.

Conectores que actúan sobre dos proposiciones

¿Cuántos conectores que actúen sobre dos proposiciones pueden ser definidos?

Si se escriben todas las posibles tablas de verdad para dos proposiciones p y q , se comprueba que hay dieciséis tablas distintas que presentamos en la tabla 1.7. Por tanto, se pueden definir dieciséis conectores distintos, uno por cada tabla, y los representamos con los símbolos C_0 , C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 , C_6 , C_7 , C_8 , C_9 , C_{10} , C_{11} ,

p	q	pC_0q	pC_1q	pC_2q	pC_3q	pC_4q	pC_5q	pC_6q	pC_7q
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
p	q	pC_8q	pC_9q	$pC_{10}q$	$pC_{11}q$	$pC_{12}q$	$pC_{13}q$	$pC_{14}q$	$pC_{15}q$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Tabla 1.7: Tablas de verdad con p y q

C_{12} , C_{13} , C_{14} y C_{15} , que se corresponden con los números del cero al quince en notación binaria; 0000, 0001, 0010, $\dots$, 1101, 1110, 1111.

Observemos que la conectiva C_1 es el conector conjunción, $pC_1q \iff p \wedge q$, la conectiva C_7 es el conector disyunción, $pC_7q \iff p \vee q$, la conectiva C_9 es el conector bicondicional, $pC_9q \iff p \leftrightarrow q$, y la conectiva C_{13} es el conector condicional, $pC_{13}q \iff p \rightarrow q$.

Ejemplo 1.5 **Disyunción excluyente**

La conectiva C_6 se denomina disyunción excluyente. Si p es *Bebo agua*, q es *Bebo horchata*, entonces la proposición pC_6q es verdadera cuando bebo agua u horchata, pero no ambas cosas. Se denota $p \oplus q$.

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabla 1.8: Tabla de verdad de $p \oplus q$

1.3. Construcción de nuevas proposiciones

Exponemos ahora la forma de crear nuevas proposiciones haciendo uso de varias proposiciones y de varios conectores lógicos. Hasta ahora sólo se han empleado proposiciones simples en la definición de los conectores lógicos para poder construir proposiciones compuestas. Los conectores descritos sólo actúan sobre una o dos proposiciones. Cuando se dispone de más de dos proposiciones hay que emplear

paréntesis, corchetes o llaves para indicar las proposiciones que son afectadas por cada conector.

Ejemplo 1.6 La conectiva negación $\neg$ afecta únicamente a la proposición que le sucede, así pues $\neg p$ sólo afecta a p , y cuando se escribe $\neg p \wedge q$, la proposición afectada es p . Para negar la proposición $p \wedge q$, se escribe $\neg(p \wedge q)$. Es decir, en la proposición $\neg p \wedge q$ la negación afecta sólo a la proposición p , mientras que en la proposición $\neg(p \wedge q)$ la negación afecta a la proposición $p \wedge q$. Estas proposiciones no son equivalentes, como se muestra en la tabla 1.9.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0

Tabla 1.9: Tablas de verdad de $\neg p \wedge q$ y de $\neg(p \wedge q)$

Ejemplo 1.7 La expresión escrita $p \wedge q \vee r$ no es una proposición correctamente expresada, puesto que podría admitir dos interpretaciones distintas: una como $(p \wedge q) \vee r$ y otra como $p \wedge (q \vee r)$. Éstas últimas sí son proposiciones correctamente escritas.

Ejemplo 1.8 En general, el orden de escritura de las proposiciones es importante. Así, $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow p$ son dos proposiciones no equivalentes, véase la tabla 1.10.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Tabla 1.10: Comparación de $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow p$

El valor de cualquier proposición simple, verdadera o falsa, se obtiene directamente de su enunciado. A veces, no resulta evidente la determinación del valor de una proposición compuesta, puesto que este valor depende de los valores que tomen las proposiciones simples que la componen. De entre todas las posibles tablas que se pueden obtener para una proposición compuesta, destacamos las siguientes:

- **Contradicción** Es la proposición que sólo toma el valor 0, y la notaremos **0**.
- **Tautología** Es la proposición que sólo toma el valor 1, y la notaremos **1**.