Índice general

Soluciones 111

Ejercicio 1 (Antonio Valdés, extraordinaria junio 2022)

Demuestra que la sucesión dada por los determinantes

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

coincide con la sucesión de Fibonacci $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ 111

Ejercicio 2 (José María Ancochea, febrero 2015)

Sabiendo que $36741, 32856, 41107, 60347$ y 48951 son múltiplos de 37 , demostrar, sin calcular el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 7 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & 3 & 4 & 7 \\ 4 & 8 & 9 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

que Δ es divisible por 37. 112

Ejercicio 3 (Antonio Valdés, final mayo 2023)
Se define $\Delta_1(u) = 1$ y, para $n > 1$,

$$\Delta_n(u) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 2 & u & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 3 & 0 & u & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ n-1 & 0 & \dots & \dots & 0 & u & -1 \\ n & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & u \end{vmatrix}.$$

Halla una expresión que relacione $\Delta_n(u)$ y $\Delta_{n-1}(u)$ y calcula $\Delta_n(u)$ como polinomio en u.
112

Ejercicio 4 (Antonio Valdés, final junio 2021)
Calcúlese el determinante de la matriz $\mathtt{A} = (a_{ij})$ de orden n tal que $a_{ij} = \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ n & \text{otro caso} \end{cases}$
113

Ejercicio 5 (María Jesús de la Puente, extraordinaria junio 2022)
Para cada $n \in \mathbb{N}$ demuestra que

$$\Delta_n = g_1\Delta_{n-1} - g_2\Delta_{n-2} + g_3\Delta_{n-3} + \cdots + (-1)^{n+1} g_n \Delta_0,$$

con $\Delta_0 = 1$ y

$$\Delta_n = \det \begin{pmatrix} g_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ g_2 & g_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \\ g_{n-1} & g_{n-2} & \cdots & \cdots & g_1 & 1 \\ g_n & g_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & g_1 \end{pmatrix}$$

114

Ejercicio 6 (María Jesús de la Puente, enero 2022)
Calcúlense los determinantes
1.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n+1-x \end{vmatrix}.$$

2.
$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix},$$

siendo la matriz de orden $2n$ con a en la diagonal principal y b en la diagonal secundaria (sugerencia: considérense primero los casos $n = 1, 2$ y 3. Pruébese la relación $D_n = (a^2 - b^2)D_{n-1}$ para $n \geq 2$).
116

Ejercicio 7 (Antonio Valdés, extraordinaria junio 2021)
Demuéstrese la siguiente igualdad para una matriz de orden n:

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b).$$

117

Ejercicio 8 (Antonio Valdés, final mayo 2022)
Calcúlese el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$$

118

Ejercicio 9 (Antonio Valdés, febrero 2021)
Sea A_n la matriz de orden n dada por

$$A_n = \begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix}.$$

Pruébese que

$$\det A_n = x^n + (-1)^{n-1} y^n$$

118

Ejercicio 10 (María Jesús de la Puente, 2014 final)
Calcular el determinante

$$\Delta(x,a,b,c,d) = \begin{vmatrix} x & a & b & c & d \\ a & x & b & c & d \\ a & b & x & c & d \\ a & b & c & x & d \\ a & b & c & d & x \end{vmatrix}$$

Suponiendo a,b,c,d dados, ¿qué valores de x anulan $\Delta(x,a,b,c,d)$? Generalizar.

119

Ejercicio 11 (Antonio Valdés, final mayo 2023)

Una matriz circulante cuadrada es una matriz cuyas filas son las sucesivas permutaciones circulares de la primera fila, es decir, una matriz M de la forma

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_n & \dots & \alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

El objetivo es calcular el determinante de estas matrices. Para ello, se sugiere el siguiente procedimiento: consideremos la matriz

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calcúlese M_0^k para cada $k = 1, \dots, n$. Dedúzcase que M_0 es diagonalizable y calcúlese una base formada por autovectores de la matriz M_0.
2. Dedúzcase que las matrices circulantes son diagonalizables.
3. Sea $f(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \cdots + \alpha_n x^{n-1}$ y sea $w = e^{2\pi i/n}$. Conclúyase que

$$\det M = \prod_{k=0}^{n-1} f(w^k).$$

121

Ejercicio 12 (María Jesús de la Puente, enero 2024)

Suponiendo que la característica de $\mathbb{K}$ es distinta de 3, calcula todas la matrices $X \in M_3(\mathbb{K})$ que conmutan con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, i.e., $AX = XA$.

122

Ejercicio 13 (Raquel Mallavibarrena, 2009)
Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz de Hermite por filas de A, H. Obtener una matriz regular Q tal que $H = QA$
123

Ejercicio 14 (Antonio Valdés, enero 2022)
Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Encuéntrese una matriz regular P tal que $PA = H$, siendo H la forma normal de Hermite de A por filas.
2. ¿Es única la matriz P encontrada en el apartado anterior? Pruébese su unicidad o proporciónese otra matriz distinta Q que satisfaga la misma identidad (sugerencia: ¿puedes encontrar alguna matriz Q' tal que $Q'H = H$?).
124

Ejercicio 15 (Antonio Díaz-Cano, enero 2020)
Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.
a) ¿Son equivalentes por filas? ¿Son equivalentes por columnas?
b) ¿Son equivalentes? Hallar, si es posible, matrices regulares P y Q tales que $A = QBP$.
125

Ejercicio 16 (Antonio Valdés, febrero 2021)
Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz nilpotente, es decir, tal que $A^k = 0$ para algún entero $k \geq 1$. Pruébese que

$$(\mathrm{Id} - A)^{-1} = \mathrm{Id} + A + \cdots + A^{k-1}.$$

126

Ejercicio 17 (Antonio Valdés, enero 2022)
Sea A una matriz regular de orden n triangular superior. Demuéstrese que A^{-1} es también triangular superior.
126

Ejercicio 18 (Antonio Díaz-Cano, enero 2020)
a) Se sabe que el sistema cuya matriz ampliada es $(A|b)$ es incompatible, siendo $A \in M_{m\times n}(K)$ y $b \in M_{m\times 1}(K)$. ¿Qué se puede decir del rango de A? ¿Puede ser b un múltiplo escalar de la primera columna de A?
b) Sea $A \in M_{10\times 9}(K)$. ¿Hay algún vector $b \in K^{10}$ tal que el sistema de matriz ampliada $(A|b)$ sea incompatible?
c) Sea $AX = b$ un sistema de 400 ecuaciones y 450 incógnitas. Se sabe que el subespacio $\{X \in K^{450} | AX = 0\}$ tiene dimensión 50. ¿Es compatible el sistema $AX = b$ para cualquier vector $b \in K^{400}$?
127

Ejercicio 19 (María Jesús de la Puente, enero 2024)
a) El producto de dos matrices elementales es una matriz elemental.
b) El producto de dos matrices singulares es una matriz singular.
127

Ejercicio 20 (Raquel Mallavibarrena, 2009)
Discutir y resolver cuando sea posible el sistema

$$\begin{aligned} ax &= b \\ y + z &= 0 \\ x + ay + z &= 0 \end{aligned}$$

128

Ejercicio 21 (Eduardo Aguirre, febrero 2012)
Determinar todas las parejas $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ para las que los siguientes sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes:

$$(S_1) : \begin{cases} x_1 + ax_2 \quad + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 \quad + bx_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} bx_1 \quad + 4x_3 &= 0 \\ ax_1 - 2x_2 \quad + (b-1)x_3 - 2x_4 &= 0 \end{cases}$$

129

Ejercicio 22 (José Manuel Gamboa, febrero 2010)
Se consideran los subespacios vectoriales V y W de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones implícitas

$$V: \begin{cases} (a+1)x_1+(1-a)x_2+x_3+x_4=0 \\ (b-1)x_1+(1+b)x_2+2x_3-x_4=0 \end{cases} \quad \text{y}$$

$$W: \begin{cases} 4x_1+4x_2+bx_3=0 \\ (b-3)x_1+(b+1)x_2+ax_3-2x_4=0 \end{cases}$$

1. Calcular, en función de a y b, las dimensiones de V y W.
2. ¿Existe alguna pareja $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ para la que $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$? En caso afirmativo hallar una.
3. Determinar todas las parejas $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ para las que $V = W$.
4. Encontrar una pareja $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $V \neq W$ y $V \cap W \neq \{0\}$.
5. Encontrar una base del espacio cociente $\mathbb{R}^4/V$ en el caso $a = b = 1$ y encontrar las coordenadas, respecto de dicha base, de la clase $\zeta = (1,2,3,4)^\intercal + V$.
130

Ejercicio 23 (María Jesús de la Puente, enero 2024)
1. Demuestra que toda matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ se expresa, de modo único, como suma de una matriz triangular superior y una matriz antisimétrica.
2. Halla una base $\mathscr{B}$ del espacio $M_3(\mathbb{K})/M_3^{anti}(\mathbb{K})$ y las coordenadas de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + M_3^{anti}(\mathbb{K})$$

y de

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + M_3^{anti}(\mathbb{K})$$

respecto de $\mathscr{B}$.
133

Ejercicio 24 (María Jesús de la Puente, enero 2024)
Sea la característica de $\mathbb{K}$ distinta de 2. En $\mathbb{K}^4$ se consideran el subespacio U_a generado por los vectores $u_1 = (1,1,0,0)^\intercal$, $u_2 = (a,1,0,0)^\intercal$, $u_3 = (1+a,2,0,0)^\intercal$, y el subespacio W_a de ecuaciones

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ ax_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Se pide una base y dimensión de $U_a \cap W_a$ y una base y dimensión de $U_a + W_a$, en función del valor $a \in \mathbb{K}$.
134

Ejercicio 25 (Pedro González, febrero 2021)
Estúdiese si son verdaderos o falsos los siguientes enunciados. En cada caso, dese una demostración o un contraejemplo.
a) Sean $U \subset V$ un subespacio vectorial de V y sea $\{u_1, \ldots, u_r\}$ una base de U. Sean $v_1, \ldots, v_s$ vectores linealmente independientes que no están en U. Si $\dim V = r + s$, entonces $\{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s\}$ es una base de V.
b) Sea $n \geq 1$ un número natural. El conjunto W formado por los polinomios $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ de grado $\leq n$ tales que $f(1) = f(2) = 0$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}[t]$ de dimensión $n - 1$.
135

Ejercicio 26 (Antonio Valdés, extraordinaria junio 2023)
Encuentra tres subespacios de $\mathbb{K}^3$ cuya intersección es el vector cero pero no forman una familia independiente.
135

Ejercicio 27 (Jorge Caravantes, enero 2018)
Sean $U = \{(1,-1,0,1),(0,1,0,-1),(1,1,-1,-1)\}$ y $V = \{(x,y,z,t) | x - y + 2z + t = z - t = 0\}$ dos subespacios de $\mathbb{R}^4$.
a) Calcula una base de $U \cap V$.

b) Demuestra que $B = \{[(1,0,0,0)],[(0,0,0,1)]\}$ es base de $\mathbb{R}^4/V$ y calcula las coordenadas de $[(-2,1,3,-2)]$ en función de B.
136

Ejercicio 28 (Francisco Javier Gallego Rodrigo, febrero 2000)
Sean E un espacio vectorial de dimensión n y F un subespacio de E de dimensión $n - 1$ (donde $n \geq 2$). ¿Existe una base $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de E tal que $u_i \notin F$ para todo $i = 1, \ldots, n$? Razonar la contestación.
137

Ejercicio 29 (María Emilia Alonso, febrero 2017)
Se considera el espacio vectorial $P_3(x)$ de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3. Se pide:
1. Encontrar una base que contenga a los polinomios $2x^2+3x$ y x^3+2x.
2. Demostrar que todo polinomio de grado menor o igual que 3 es suma única de un polinomio de la forma $ax^3+2bx^2+(3b+2a)x$ y otro de la forma $(c+d)x^2+(c-d)$.
Hallar a,b,c,d para el polinomio $6x^3-3x^2+5x+1$.
3. Demostrar que $P_3(x)$ es isomorfo a $\mathbb{R}^4$ construyendo un isomorfismo entre los dos espacios vectoriales.
138

Ejercicio 30 (María Emilia Alonso, febrero 2017)
Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales engendrados:
W_1 por $S_1=\{(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\}$
W_2 por $S_2=\{(1,1,0,1),(1,2,-1,2),(3,5,-2,5)\}$
Se pide:
a) Calcular las dimensiones de W_1+W_2 y $W_1\cap W_2$.
b) Ecuaciones paramétricas e implícitas de W_1+W_2.
c) Ecuaciones paramétricas e implícitas de $W_1\cap W_2$.
139

Ejercicio 31 (Antonio Díaz-Cano, enero 2020)
¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $M_2(\mathbb{R})$ son subespacios vectoriales y cuál es su dimensión?
a) $\{A\in M_2(\mathbb{R}) \mid a_{11}+a_{22}=0\}$;
b) $\{A\in M_2(\mathbb{R}) \mid a_{11}\cdot a_{22}=0\}$;
c) $\{A\in M_2(\mathbb{R}) \mid A=-A^\intercal\}$;
d) $\{A\in M_2(\mathbb{R}) \mid \text{rango } A\leq 1\}$.
140

Ejercicio 32 (José María Ancochea, final 2016)
Sean $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4\}$ vectores de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V tales que tres cualesquiera de ellos son linealmente independientes. ¿Se puede afirmar que los cuatro vectores son linealmente independientes? Demostrarlo en caso afirmativo o dar un contraejemplo.
141